Экстремальные индексы, большие единицы, в схеме серий для максимумов

А.А.Голдаева, А.В. Лебедев

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

Москва, МГУ, 19 апреля 2017 года

Теория экстремумов, теория экстремальных значений (extreme value theory)

Стохастическая теория экстремумов занимается изучением максимумов и минимумов (а также других порядковых статистик) систем случайных величин.

Фундаментальная работа: Б.В.Гнеденко (1943)
Предшественники: М.Фреше (1927), Р.Фишер и Л.Типпетт (1928), Р. фон Мизес (1936)
Классические монографии: Я.И.Галамбош (1984), М.Лидбеттер, Г.Линдгрен, Х.Ротсен (1989), P.Embrechts, C.Klüppelberg, T.Mikosh (2003)
Современные исследователи в России: В.И.Питербарг, В.Б.Невзоров, А.В.Степанов, С.Ю.Новак, Н.М.Маркович, А.В.Лебедев, А.А.Голдаева и др. (+ ученики)

Экстремальные индексы: классическое определение

Определение A

Пусть ξ_n, $n \geq 1$, имеют распределение F и $M_n = \vee_{k=1}^n \xi_k$. Если для каждого $\tau > 0$ существует такая числовая последовательность $u_n(\tau)$, что $n\bar{F}(u_n(\tau)) \to \tau$ и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(\tau)) \to e^{-\theta\tau}$, то θ называется экстремальным индексом.

Смысл: максимумы n зависимых величин асимптотически растут как максимумы $[\theta n]$ независимых; превышения высокого уровня образуют кластеры среднего размера $1/\theta$. Бывает $\theta \in [0, 1]$.
Классика: М.Лидбеттер, Г.Линдгрен, Х.Ротсен (1989), P.Embrechts, C.Klüppelberg, T.Mikosh (2003), de Haan L., Ferreira A. (2006)
Недавние исследования: С.Ю.Новак (2014), N.Markovich (2014), K.Avrachenkov, N.M.Markovich, J.K.Sreedharan (2015), А.А.Голдаева (2014); Extremes (2016, Vol.19, No. 3).
Обобщение на случайные поля на решетках $\mathbf{N}^d$: H.Choi (2002), H.Ferreira, L.Perreira (2008)

Если взять максимумы $\hat{M}_n$ последовательности независимых случайных величин с тем же распределением F, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau)) = e^{-\tau}$, откуда следует:

1.
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) = \left(\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau))\right)^{\theta},$$

2.
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_{[\theta n]} \le u_n(\tau)), \quad \theta > 0,$$

3.
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \le u_n(\tau)) \ge \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\hat{M}_n \le u_n(\tau)).$$

Далее новое определение 1 обобщает свойство 1, а свойство 3 в схеме серий может нарушаться.

Экстремальные индексы: новое определение 1

Пусть задан набор случайных величин $\xi_{n,m}$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, с распределениями F_n, а также последовательность целочисленных случайных величин $\nu_n \xrightarrow{P} +\infty$, $n \to \infty$, и $M_n = \vee_{m=1}^{\nu_n} \xi_{n,m}$.

Определение 1.

Пусть для каждого $s \in (0,1)$ существует такая последовательность $u_n(s)$, что $\mathbf{E}F_n^{\nu_n}(u_n(s)) \to s$, и $\mathbf{P}(M_n \leq u_n(s)) \to \psi(s)$, $n \to \infty$. Тогда ψ назовем экстремальной функцией. Если $\psi(s) = s^\theta$, то θ назовем экстремальным индексом.

В общем случае определим частичные индексы

$$\theta^- = \inf_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s), \quad \theta^+ = \sup_{s \in (0,1)} \log_s \psi(s),$$
$$\theta_0 = \lim_{s \to 0+0} \log_s \psi(s), \quad \theta_1 = \lim_{s \to 1-0} \log_s \psi(s),$$

Индексы, как и ранее, принимают неотрицательные значения, однако ограничение сверху единицей снимается, по крайней мере, для θ^+.

Определение

Копулой (m-мерной) называется функция многомерного распределения на $[0,1]^m$ с равномерными частными распределениями.
Копулой распределения F в R^m называется копула C, удовлетворяющая

$$F(x_1,\ldots,x_m)=C(F_1(x_1),\ldots,F_m(x_m)),$$

где $F_1,\ldots,F_m$ — частные функции распределения.

Такое представление существует по теореме Скляра (1959) и единственно в случае непрерывных частных распределений.
Учебник: R.Nelsen (2006).

Экстремальные индексы для моделей с копулами (примеры)

А.В.Лебедев (2015)

Пример 1.

Копула Гумбеля-Хоугаарда имеет вид

$$C(y_1,\dots,y_d) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{d}(-\ln y_i)^\alpha\right)^{1/\alpha}\right\}, \quad \alpha \geq 1.$$

При $\nu_n = n$, $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, $n \to \infty$, получаем $\theta = e^{-\gamma}$.

Пример 2.

При копуле Гумбеля-Хоугаарда с $(\alpha_n - 1)\ln n \to \gamma \geq 0$, $\nu_n/n \xrightarrow{d} \zeta$, $n \to \infty$, где ζ имеет устойчивое распределение с $\mathbf{E}e^{-u\zeta} = e^{-u^\beta}$, $0 < \beta < 1$, получаем $\theta = e^{-\gamma\beta}$.

Экстремальные индексы для моделей с копулами (предшественники)

Е.И.Панчева (1986), А.Н.Чупрунов (1999): максимумы независимых разнораспределенных случайных величин в схеме серий; условия сходимости.

Е.А.Савинов (2014): максимумы в схеме серий для одинаково распределенных случайных величин, связанных IT-копулами (копулами преобразования независимости); условия, при которых максимумы растут асимптотически как в случае независимых величин ($\theta = 1$).

Новая модель

1. Пусть $\eta_{n,m}$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, а κ_n принимают значения от 1 до n равновероятно и не зависят от $\eta_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$.

$$\xi^0_{n,m} = \begin{cases} \frac{\eta_{n,m}}{n}, & m \neq \kappa_n, \\ \eta_{n,m}, & m = \kappa_n. \end{cases}$$

Обозначим копулу $\xi^0_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, через C_n.

2. Будем предполагать, что $\nu_n/n \xrightarrow{d} \zeta > 0$, $n \to \infty$, где ζ имеет распределение G с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\phi(\tau) = \mathrm{E}\, e^{-\tau\zeta}$.

3. Построим $\xi_{n,m}$, $1 \leq m \leq \nu_n$, $n \geq 1$, равномерно распределенные на $[0,1]$ с копулами C_{ν_n}.

Новая модель (теорема об экстремальной функции)

Теорема 1.

Для экстремальной функции $\psi(s)$ верна формула

$$\psi(s) = \mathrm{E}(1 - \zeta\tau)_+, \quad s = \phi(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

или

$$\psi(s) = \mathrm{E}(1 - \zeta\phi^{-1}(s))_+, \quad s \in (0, 1].$$

Замечание 1.

Для n-мерной копулы существует нижняя граница Фреше-Хёффдинга

$$C_n(y_1, \dots, y_n) \geq (y_1 + \dots + y_n - (n-1))_+,$$

которая при $n > 2$ не является копулой. Однако, если формально использовать ее в качестве копулы, тот же результат, что в теореме 1. Модель описывает асимптотически максимальную отрицательную зависимость случайных величин.

Новая модель (случай устойчивых распределений)

Пусть ζ имеет устойчивое распределение G_α с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\phi(\tau) = \mathbf{E}e^{-\tau\zeta} = e^{-\tau^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 2.

$$\theta_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

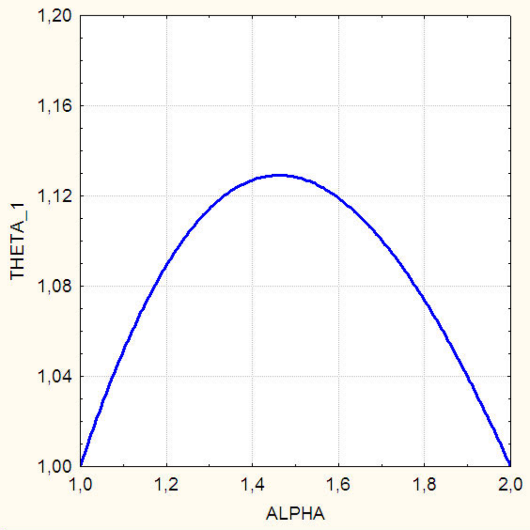
Замечание 2.

Наименьшее значение гамма-функции $\Gamma(1{,}46163\ldots) = 0{,}88560\ldots$ Следовательно, наибольшее значение экстремального индекса θ_1 при $\alpha_{\max} = 0{,}53837\ldots$ и равно $\theta_{1,\max} = 1/\Gamma(1{,}46163\ldots) = 1{,}12918\ldots$

Теорема 3.

$$\theta_0 = +\infty.$$

Новая модель (график $\theta_1(\alpha)$)

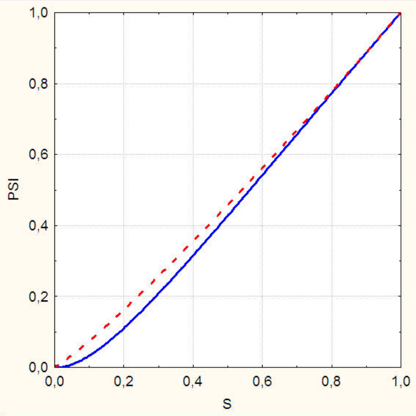


Новая модель (пример устойчивого распределения)

Пусть $\alpha = 1/2$, тогда

$$\psi(s) = \Phi\Big(\frac{\ln s}{\sqrt{2}}\Big)(2 + \ln^2 s) + \sqrt{2}(\ln s)\varphi\Big(\frac{\ln s}{\sqrt{2}}\Big), \quad s \in (0, 1],$$

$$\theta_0 = +\infty, \quad \theta_1 = 1/\Gamma(3/2) = 2/\sqrt{\pi} \approx 1{,}128...$$



Новая модель (общие теоремы)

Теорема 4.

Пусть $1 - G(x) \sim Cx^{-\alpha}$ при $x \to +\infty$, $0 < \alpha < 1$, $C > 0$, тогда

$$\theta_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Теорема 5.

Пусть $\mu = \mathbf{E}\zeta < \infty$, тогда $\theta_1 = 1$.

Теорема 6.

Пусть $G(x) \sim \exp\{-e^{a\sqrt{-\ln x}}\}$, $x \to 0+0$, $a > 0$, тогда $\theta_0 = e^{a^2/2}$.

Теорема 7.

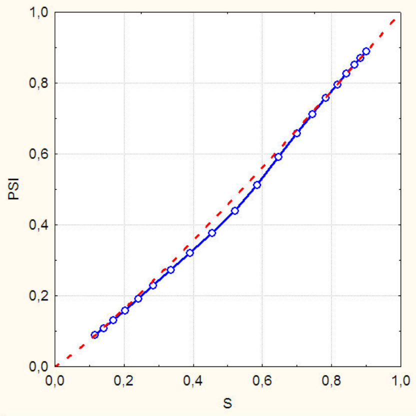
Точный экстремальный индекс $1 < \theta \le \theta_{1,\max}$ в данной модели невозможен.

Новая модель (пример $\theta_0 = \theta_1 > 1$)

Пусть ζ имеет функцию распределения вида

$$G(x) = \begin{cases} \exp\{-e^{a\sqrt{-\ln x}}\}, & 0 < x < 1, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\}, & x \geq 1, \end{cases}$$

где $a = \sqrt{\ln(4/\pi)}$, $\alpha = 1/2$, тогда $\theta_0 = \theta_1 = 2/\sqrt{\pi}$.



- *Avrachenkov K., Markovich N. M., Sreedharan J. K.* Distribution and dependence of extremes in network sampling processes // Computational Social Networks. 2015. Vol. 2. No. 12. 21 p.
- *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling extremal events for insurance and finance. — Springer, 2003. 638 p.
- Extremes for Time Series. Volume 19, Issue 3, September 2016, http://link.springer.com/journal/10687/19/3/page/1
- *de Haan L., Ferreira A.* Extreme value theory. An introduction. — Springer, 2006. 420 p.
- *Markovich N. M.* Modeling clusters of extreme values // Extremes, 2014. Vol. 17. No. 1. P. 97–125.
- *Markovich N. M.* Quality assessment of the packet transport of peer-to-peer video traffic in high-speed networks // Perform. Evaluation, 2013. Vol. 70. No. 1. P. 28–44.
- *Nelsen R.* An introduction to copulas. — Springer, 2006. 276 p.
- *Галамбош Я. И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик — М.: Наука, 1984. 304 с.
- *Голдаева А. А.* Тяжелые хвосты, экстремумы и кластеры линейных стохастических рекуррентных последовательностей: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2014. 94 с.

Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983. 304 с.

Лебедев А. В. Экстремальные индексы в схеме серий и их приложения // Информатика и ее применения, 2015. Т. 9. No. 3. С. 39 – 54.

Лебедев А. В. Неклассические задачи стохастической теории экстремумов: Дисс. … д. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2016. 227 с.

Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х. Экстремумы случайных последовательностей и процессов — М.: Мир, 1989. 392 с.

Новак С. Ю. Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений: Дисс. … докт. физ.-мат. наук. — СПб.: ПОМИ РАН, 2014. 230 с.

Панчева Е. И. Общие предельные теоремы для максимума независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31. No. 4. С. 730–744.

Савинов Е. А. Предельная теорема для максимума случайных величин, связанных IT-копулами t-распределения Стьюдента // Теория вероятностей и ее применения, 2014. Т. 59. No. 3. С. 594–602.

Федорюк М. В. Асимптотика: Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. 544 с.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения — М.: Мир, 1984. 752 с.

Чупрунов А. Н. О сходимости по распределению максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин со случайными коэффициентами // Теория вероятностей и ее применения, 1999. Т. 44. No.1. С. 138–143.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!