

Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени.

А. И. Жданов, В. И. Питербург

МГУ им. М.В. Ломоносова

Ломоносовские чтения

МГУ им. М.В. Ломоносова, 19 апреля 2017

Введение

Рассмотрим $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_d(t))$, $d \geq 2$, $t \in \mathbb{R}_+$ - гауссовский стационарный центрированный векторный процесс.

Пусть $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ - однородная функция положительного порядка $\beta > 0$, то есть для всех $a > 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ верно $g(a\mathbf{x}) = a^\beta g(\mathbf{x})$.

Процессом гауссовского хаоса назовем случайный процесс $g(\xi(t))$. В настоящей работе изучается поведение вероятности

$$P_\xi(u, p) := \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right), \quad p > 0,$$

для больших u , то есть, $u \rightarrow \infty$.

Используемые методы

В процессе доказательства основного результата используются 3 основных метода:

- ▶ метод двойных сумм;
- ▶ метод оценки интегралов типа Лапласа;
- ▶ дискретная аппроксимация случайных процессов.

Кратко опишем каждый из данных методов, применительно к рассматриваемой задаче.

Используемые методы: метод двойных сумм (I)

Пусть $\xi(t)$ — гауссовский стационарный центрированный процесс, ковариационная функция которого удовлетворяет условию Пикандса:

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2]. \quad (1)$$

В 1968 J. Pickands III предложил естественный способ исследования асимптотического поведения вероятности высоких выбросов процесса $\xi(t)$ (*метод двойных сумм*).

Используемые методы: метод двойных сумм (I)

Пусть $B_{\alpha/2}(t)$ - дробное броуновское движение с параметром Херста $\alpha/2$. Константами Пикандса называются величины

$$H_{\alpha}(T) = E \exp\left(\max_{t \in [0, T]} \sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - t^{\alpha}\right), \quad H_{\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} H_{\alpha}(T)/T,$$

при этом $H_{\alpha} \in (0, \infty)$.

Теорема (J.Pickands III)

Пусть выполнено условие (1). Тогда для любого p , такого что $|r(t)| < 1$, $t \in (0, p]$

$$P\left(\max_{t \in [0, p]} \xi(t) > u\right) = pH_{\alpha} u^{2/\alpha} \psi(u)(1 + o(1)), \quad u \rightarrow \infty,$$

где $\psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-\frac{u^2}{2}}$.

Используемые методы: метод двойных сумм (I)

Определим $N_p := \lfloor \frac{p}{Tu^{-\frac{2}{\alpha}}} + 1 \rfloor$ (целая часть). Используя стационарность и неравенство Бонферрони, имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \xi(t) > u\right) \leq N_p \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, Tu^{-\frac{2}{\alpha}}]} \xi(t) > u\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \xi(t) > u\right) \geq (N_p - 1) \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, Tu^{-\frac{2}{\alpha}}]} \xi(t) > u\right)$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{N_p-1} (N_p - k) \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, Tu^{-\frac{2}{\alpha}}]} \xi(t) > u, \max_{t \in [kTu^{-\frac{2}{\alpha}}, (k+1)Tu^{-\frac{2}{\alpha}}]} \xi(t) > u\right).$$

Асимптотика первой вероятности в правой части находится с использованием локального поведения ковариационной функции процесса $\xi(t)$ в окрестности нуля (1). После доказывается, что двойная сумма бесконечно мала по отношению к первому слагаемому (при $T \rightarrow \infty$).

Используемые методы: метод Лапласа (II)

Для *гауссовского хаоса* $g(\xi)$, где $\xi \sim N(0, I_d)$ и I_d - единичная $d \times d$ матрица, рассмотрим задачу изучения поведения вероятности

$$\mathbf{P}(g(\xi) > u),$$

для больших u , то есть, $u \rightarrow \infty$.

После некоторых преобразований данный интеграл сводится к интегралу типа Лапласа

$$\int_V a(x) e^{-\lambda f(x)} dx,$$

где V - компакт в $\mathbb{R}^n$, λ - большой параметр. Сформулируем соответствующий результат.

Используемые методы: метод Лапласа (II)

Введем сферические координаты $\mathbf{x} = (r, \varphi)$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) \in \Pi_{d-1} = [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$, $r = |\mathbf{x}|$. Пусть $J(r, \varphi)$ - Якобиан такого перехода. Будем писать $g(\varphi) = g(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$. Обозначим

$$g := \max_{\varphi \in \Pi_{d-1}} g(\varphi), \quad \mathcal{M}_\varphi := \{\varphi \in \Pi_{d-1} : g(\varphi) = g\}.$$

Рассматривается два типа структуры множества $\mathcal{M}_\varphi$:

- ▶ $\mathcal{M}_\varphi$ состоит из конечного числа точек;
- ▶ $\mathcal{M}_\varphi$ является гладким m -мерным многообразием, $1 \leq m \leq d - 2$.

Используемые методы: метод Лапласа (II)

Теорема (D.A. Korshunov, V.I. Piterbarg, E. Hashorva, 2015)

Пусть $g(\varphi) \in C^2(\Pi_{d-1})$, и каждая точка $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$ регулярна.
Тогда выполнены следующие предельные соотношения при $u \rightarrow \infty$:

$$p_{g(\xi)}(u) = \frac{h_0}{\beta g} \left(\frac{u}{g} \right)^{\frac{m+1}{\beta}-1} \exp \left(-\frac{u^{\frac{2}{\beta}}}{2g^{\frac{2}{\beta}}} \right) (1 + o(1))$$

$$P(g(\xi) > u) = h_0 \left(\frac{u}{g} \right)^{\frac{m-1}{\beta}} \exp \left(-\frac{u^{\frac{2}{\beta}}}{2g^{\frac{2}{\beta}}} \right) (1 + o(1)),$$

где h_0 - константа, зависящая от β , g , d и структуры $\mathcal{M}_\varphi$.

Дополнительные условия

Вернемся к задаче высоких выбросов процессов гауссовского хаоса. Предположим, что гауссовский стационарный центрированный векторный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- ▶ существуют симметричные положительно определенные $d \times d$ матрицы R и C , такие что ковариационная матрица $R(t) := E\xi(t)\xi(0)^\top$ удовлетворяет условию типа Пикандса:

$$R(t) = R - |t|^\alpha C + |t|^\alpha o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2] \quad (2)$$

где $o(1)$ это $d \times d$ матрица, компоненты которой стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$;

- ▶ $0 \prec R(t) \prec R$ для всех $t > 0$, то есть для всех $t > 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$:

$$0 < \mathbf{x}^\top R(t) \mathbf{x} < \mathbf{x}^\top R \mathbf{x}. \quad (3)$$

Дополнительные условия: упрощение

Можно предполагать, что компоненты вектора $\xi(t)$ независимы при каждом фиксированном t . Действительно, пусть Q - ортогональная матрица, такая что $Q^\top R^{-1/2} C R^{-1/2} Q = \tilde{C}$, где $\tilde{C}$ - диагональная матрица. Определим процесс $\eta(t) = Q^\top R^{-1/2} \xi(t)$. Тогда

$$E\eta(t)\eta(0)^\top = I_d - |t|^\alpha \tilde{C} + |t|^\alpha o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2] \quad (4)$$

$$P\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right) = P\left(\max_{t \in [0, p]} \tilde{g}(\eta(t)) > u\right),$$

где функция $\tilde{g}(x) = g(R^{1/2} Qx)$ также однородна, и того же порядка $\beta > 0$.

Основной результат

Обозначим

$$j(\varphi) = \frac{J(1, \varphi) |\det g''(\varphi)_{d-1-m}|^{-1/2}}{\int_{\mathcal{M}_\varphi} J(1, \varphi) |\det g''(\varphi)_{d-1-m}|^{-1/2} dV_\varphi}.$$

где dV_φ - элементарный объем в $\mathcal{M}_\varphi$. Здесь и в дальнейшем, если $m = 0$ интеграл по $\mathcal{M}_\varphi$ понимается как (конечная) сумма по всем точкам $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$. Введем функцию $\mathbf{v}(\varphi)$ на Π_{d-1} соотношением $g(\mathbf{v}(\varphi)) = 1$, если $g(\varphi) > 0$ и $\mathbf{v}(\varphi) = 0$, если $g(\varphi) \leq 0$.

Обозначим

$$H_\alpha(T; \mathcal{M}_\varphi) = \int_{\mathcal{M}_\varphi} j(\varphi) H_\alpha(T \langle \mathbf{v}(\varphi), C\mathbf{v}(\varphi) \rangle^{1/\alpha}) dV_\varphi,$$

$$H_\alpha(\mathcal{M}_\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} H_\alpha(T; \mathcal{M}_\varphi) / T.$$

Основной результат

Теорема

Пусть ковариационная функция гауссовского стационарного векторного процесса $\xi(t)$ удовлетворяет условиям (3), (4). Пусть $g(\varphi) \in C^2(\Pi_{d-1})$, и каждая точка $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$ регулярна. Тогда при $u \rightarrow \infty$

$$P_\xi(u, p) = ph_0 H_\alpha(\mathcal{M}_\varphi) g^{-(m-1)/\beta} u^{\frac{m-1+2/\alpha}{\beta}} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}} (1 + o(1)),$$

где константа h_0 определена выше.

Доказательство основного результата проводится с помощью метода двойных сумм, с предварительным применением дискретной аппроксимации.

Локальная лемма

Используя комбинацию метода Лапласа и локальные свойства ковариационной матрицы $R(t)$ в окрестности нуля (4), можно доказать следующую лемму:

Лемма (Локальная)

Пусть выполнены условия (3), (4). Пусть $g(\varphi) \in C^2(\Pi_{d-1})$, и каждая точка $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$ регулярна. Тогда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P_\xi(u, Tu^{-2/\alpha\beta})}{\mathcal{L}(u)} = h_0 g^{-(m-1)/\beta} H_\alpha(T; \mathcal{M}_\varphi),$$

где $\mathcal{L}(u) = u^{(m-1)/\beta} \exp(-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta})$ и h_0 определено выше.

Аппроксимация в дискретном времени

Рассмотрим решетку на прямой

$$\mathcal{R}(u, \delta) = \{k\delta u^{-2/\alpha\beta}, \quad k \in \mathbf{Z}\}$$

и соответствующую вероятность

$$P_{\xi}(\delta; u, p) := \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p] \cap \mathcal{R}(u, \delta)} g(\xi(t)) > u\right), \quad p > 0.$$

Обозначим (с условием очевидного определения $H_{\alpha, \delta}(T)$)

$$H_{\alpha, \delta}(T; \mathcal{M}_{\varphi}) = \int_{\mathcal{M}_{\varphi}} j(\varphi) H_{\alpha, \delta}(T \langle \mathbf{v}(\varphi), C\mathbf{v}(\varphi) \rangle^{1/\alpha}) dV_{\varphi}.$$

Лемма (Локальная дискретная)

Пусть выполнены условия локальной леммы. Тогда

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P_{\xi}(\delta; u, Tu^{-2/\alpha\beta})}{\mathcal{L}(u)} = h_0 g^{-(m-1)/\beta} H_{\alpha, \delta}(T; \mathcal{M}_{\varphi}).$$

Аппроксимация в дискретном времени

В силу непрерывности функции g и п. н. непрерывности дробного броуновского движения, а также утверждений локальной и локальной дискретной лемм, верно следующее утверждение:

Лемма (Локальная аппроксимационная)

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P_{\xi}(u, Tu^{-2/\alpha\beta}) - P_{\xi}(\delta; u, Tu^{-2/\alpha\beta})}{\mathcal{L}(u)} \leq \varepsilon.$$

Аппроксимация в дискретном времени

Обозначим

$$H_{\alpha,\delta}(\mathcal{M}_\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} H_{\alpha,\delta}(T; \mathcal{M}_\varphi), \quad (5)$$

при этом $H_{\alpha,\delta}(\mathcal{M}_\varphi) \in (0, \infty)$.

Использование метода двойных сумм при переходе к дискретному аналогу вероятности $P_\xi(u, p)$ позволяет избавиться от необходимости оценки вероятностей высоких выбросов процесса гауссовского хаоса на двух интервалах и заменить данную оценку оценкой вероятности выхода траекторий процесса гауссовского хаоса за высокий уровень только в 2 точках:

Теорема (Дискретная)

Пусть выполнены условия локальной леммы. Тогда при $u \rightarrow \infty$

$$P_\xi(\delta; u, p) = p h_0 H_{\alpha,\delta}(\mathcal{M}_\varphi) g^{-(m-1)/\beta} u^{(m-1+2/\alpha)/\beta} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}} (1 + o(1)).$$

Аппроксимация в дискретном времени

Последовательное применение локальной леммы, локальной дискретной леммы, локальной аппроксимационной леммы и теоремы для дискретной решетки позволяет доказать следующую лемму, которая завершает доказательство основного результата:

Лемма (Глобальная аппроксимационная)

Пусть выполнены условия локальной леммы. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\limsup_{u \rightarrow \infty} \frac{P_{\xi}(u, p) - P_{\xi}(\delta; u, p)}{P_{\xi}(\delta; u, p)} \leq \varepsilon.$$

Благодарность

Спасибо за внимание!

-  Piterbarg Vladimir I. High extrema of Gaussian chaos processes. *Extremes*, 19(2), 1–20, 2016.
-  Patrik Albin, Enkelejd Hashorva, Lanpeng Ji, Chengxiu Ling. Extremes and Limit Theorems for Difference of Chi-type processes. <http://arxiv.org/abs/1508.02758>, 2015.
-  Korshunov D. A., Piterbarg V. I., Hashorva E. On the Asymptotic Laplace Method and Its Application to Random Chaos. *Mat. Zametki*, 97(6), 878–891, 2015.
-  Piterbarg V. High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent components. in: *Problems of Stability of Stochastic Models*. V. M. Zolotarev. — TVP-VSP Moscow-Utreht, 197–230, 1994.
-  Piterbarg V. I., Zhdanov A. On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes. *Extremes*, 18(1), 99–108, 2015.

-  Piterbarg V. I. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. American Mathematical Society [Providence, R.I., etc.], United States, p. 206, 2012.
-  Vladimir I. Piterbarg, *Twenty Lectures About Gaussian Processes*. Atlantic Financial Press, Lodon, 2015, pp. 192.
-  Zhdanov A., Probabilities of high excursions for trajectories of product of two Gaussian stationary processes. *Probability Theory and Applications*, 60(3), 605-613, 2015.