

Робастный знаковый тест для гипотезы о единичном корне авторегрессии

М.В. Болдин ¹

¹Кафедра теории вероятностей
Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова

Москва, 2017

Предварительные сведения

Пусть наблюдения $u_1, \dots, u_n$ не содержат засорений и порождаются $AR(1)$ моделью

$$u_t = \beta u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n; \quad n \geq 2; \quad u_0 = 0; \quad \beta \in R^1;$$

параметр β неизвестен; $\{\varepsilon_t\}$ – н.о.р.с.в. с неизвестной функцией распределения $G(x)$.

Условие (i).

$$P(\varepsilon_1 < 0) = P(\varepsilon_1 > 0) = 1/2.$$

При этом условии можно проверить гипотезу $H(\beta_0) : \beta = \beta_0$ при любом $\beta_0 \in R^1$ следующим образом. См. [Boldin M.V., Simonova G.I. and Tyurin Yu.N., Amer. Math. Society, 1997].

Пусть

$$S_t(\beta_0) = \text{sign}(u_t - \beta_0 u_{t-1}), \quad t = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$\Gamma_{tn}(\beta_0) := \sum_{k=t+1}^n S_{k-t}(\beta_0) S_k(\beta_0), \quad t = 1, \dots, n-1.$$

Интересующая нас знаковая тестовая статистика имеет вид

$$T_n(\beta_0) = \sum_{t=1}^{n-1} \beta_0^{t-1} \Gamma_{tn}(\beta_0).$$

Условие (ii).

$$E\varepsilon_1 = 0, E\varepsilon_1^2 < \infty.$$

Условие (iii).

$G(x)$ дважды дифференцируема с плотностью $g(x) = G'(x)$, $g(0) > 0$,
 $\sup_x |g'(x)| < \infty$.

Если выполнены Условия (i–iii), то при любом фиксированном $n \geq 2$ тест для $H(\beta_0)$ со статистикой $T_n(\beta_0)$ при односторонних альтернативах будет локально наиболее мощным среди всех тестов, основанных на $\{S_t(\beta_0)\}$.
Критическая область при правосторонней альтернативе имеет вид

$$(T_n(\beta_0) > \text{const}).$$

Это следствие разложения правдоподобия: пусть $s^n = (s_1, \dots, s_n)$; $s_t = \pm 1$, — неслучайные числа; $\gamma_{tn}(s^n) := \sum_{k=t+1}^n s_{k-t} s_k$, $t = 1, \dots, n-1$; тогда

$$P_\beta(S_1(\beta_0) = s_1, \dots, S_n(\beta_0) = s_n) = \frac{1}{2^n} \left\{ 1 + 2g(0)E|\varepsilon_1| \sum_{t=1}^{n-1} \beta_0^{t-1} \gamma_{tn}(s^n)(\beta - \beta_0) \right\} +$$

$$o(\beta - \beta_0), \beta \rightarrow \beta_0.$$

Обозначим информацию Фишера относительно параметра β , содержащуюся в знаках $\{S_t(\beta_0)\}$, через $I_n(\beta/\beta_0)$. Тогда

$$I_n(\beta_0/\beta_0) \sim (2g(0)E|\varepsilon_1|)^2 d_n^2(\beta_0), n \rightarrow \infty,$$

где

$$d_n^2(\beta) = \begin{cases} n/(1 - \beta^2), & |\beta| < 1; \\ n^2/2, & |\beta| = 1; \\ \beta^{2n}/(\beta^2 - 1)^2, & |\beta| > 1. \end{cases}$$

При гипотезе и единственном Условии (i)

$$d_n^{-1}(\beta_0) T_n(\beta_0) \rightarrow \begin{cases} N(0, 1), & |\beta_0| < 1; \\ R(\beta_0), & |\beta_0| = 1; \\ L(\beta_0), & |\beta_0| > 1. \end{cases}$$

Здесь $R(\beta) \sim \beta \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu^2 - 1)$, $\nu \sim N(0, 1)$; $L(\beta) \sim \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} \xi \eta$, ξ, η — н.о.р.с.в.,

$$\xi := \sum_{i \geq 1} \beta^{-(i-1)} \text{sign} \varepsilon_i.$$

Ближкие правосторонние альтернативы

$$A_n^+(\beta_n) : \beta = \beta_n := \beta_0 + d_n^{-1}(\beta_0) \tau, \tau \geq 0.$$

Ближкие левосторонние альтернативы $A_n^-(\beta_n)$ определяются аналогично для $\tau \leq 0$.

Асимптотическое распределение $d_n^{-1}(\beta_0) T_n(\beta_0)$ при этих альтернативах невырождено. См. [Болдин М.В., УМН, 1997].

Оценка наименьших квадратов

$$\beta_n = \sum_{t=1}^n u_{t-1} u_t / \sum_{t=1}^n u_{t-1}^2$$

При гипотезе $H(\beta_0)$ и Условии (ii)

$$d_n(\beta_0)(\beta_n - \beta_0) \rightarrow \begin{cases} N(0, 1), & |\beta_0| < 1; \\ F(\beta_0), & |\beta_0| = 1; \\ K(\beta_0), & |\beta_0| > 1. \end{cases}$$

Здесь $F(\beta) \sim \beta \frac{w^2(1)-1}{2\sqrt{2} \int_0^1 w^2(s)ds}$, $K(\beta) \sim \frac{\xi}{\eta}$, ξ, η — н.о.п.,

$$\xi = \sum_{i \geq 1}^{\infty} \beta^{-(i-1)} \varepsilon_i.$$

Случай $\beta = 1$ [Dickey D.A., Fuller W.A., Journal of the American Statistical Association, 1979],

близкие альтернативы [Chan N.H., Wei C.Z., Ann. Statist., 1987] ;

случай $|\beta| > 1$ [Anderson T., Ann. Math. Statist., 1959].

Последовательные о.м.п. [Shiryaev A.N., Spokoiny V.G., Statistical Experiments and Decisions, 2000].

Постановка задачи

Наблюдения авторегрессии содержат независимые аддитивные засорения, так что наблюдаются величины $y_0, y_1, \dots, y_n$,

$$y_t = u_t + z_t^\lambda \xi_t, \quad t = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь $\{u_t\}$ AR(1) последовательность, $\{z_t^\lambda\}$ —н.о.р.с.в., z_1^λ имеет распределение Бернулли с параметром λ , $0 \leq \lambda \leq 1$; $\{\xi_t\}$ —н.о.р.с.в. с неизвестным и произвольным распределением μ ; последовательности $\{u_t\}$, $\{z_t^\lambda\}$, $\{\xi_t\}$ независимы.

Последовательность $\{\xi_t\}$ интерпретируется как последовательность засорений в данных, λ есть уровень засорения.

См. [Martin R.D., Yohai V.J., Ann. Statist., 1986].

Пусть

$$S_t^y(\beta_0) = \text{sign}(y_t - \beta_0 y_{t-1}), \quad t = 1, \dots, n.$$

а $\Gamma_{tn}^y(\beta_0)$, $T_n^y(\beta_0)$ строятся по $\{S_t^y(\beta_0)\}$ так же, как $\Gamma_{tn}(\beta_0)$, $T_n(\beta_0)$ строятся по $\{S_t(\beta_0)\}$.

Введем информационную матрицу Фишера

$$I_n(\beta, \lambda/\beta_0) = (I_n^{ij}(\beta, \lambda/\beta_0))_{i,j=1,2}.$$

Это информация о векторе (β, λ) , содержащаяся в знаках $\{S_t^y(\beta_0)\}$.

Теорема 1.

Пусть выполнены Условия (i–iii). Тогда при любом $\beta_0 \in R^1$ и $n \rightarrow \infty$

$$I_n^{1,1}(\beta_0, 0/\beta_0) \sim I_n(\beta_0/\beta_0);$$

$$I_n^{2,2}(\beta_0, 0/\beta_0) \sim \{4[E_\mu G(\beta_0 \xi_1) + E_\mu G(-\xi_1) - 1]^2 + \\ [E_\mu(1 - 2G(-\xi_1))(1 - 2G(\beta_0 \xi_1))]^2\}n;$$

Далее будем интересоваться проверкой в схеме с засорениями гипотезы $H(1)$, которую переобозначим как H_0 . Таким образом, речь идет о гипотезе случайного блуждания для $\{u_t\}$. Переобозначим $T_n^y(1)$ через T_n^y .

Будем далее предполагать, что λ зависит от n :

$$\lambda = \lambda_n = \min(n^{-1/2}\gamma, 1), \gamma \geq 0, \gamma \text{ фиксировано и неизвестно.}$$

Асимптотическая информация относительно β в точке $(\beta_0 = 1, \lambda = 0)$ та же самая, как в схеме без засорений, а потому близкими альтернативами к H_0 надо брать опять $A_n^\pm(\beta_n)$ с $\beta_0 = 1$. Удобно опускать множитель $\sqrt{2}$ перед τ , такие альтернативы обозначим как $A_n^\pm(\tau)$. Например,

$$A_n^+(\tau) : \beta = \beta_n := 1 + n^{-1}\tau, \tau \geq 0.$$

Будем строить тест на основе T_n^y аналогично тому, как он строился по $T_n(1)$. Таким образом, критическая область при правосторонней альтернативе имеет вид $(T_n^y > \text{const})$. Константу в последнем неравенстве выберем так, чтобы асимптотическая мощность при гипотезе в схеме без засорений была равна заданному α , $0 < \alpha < 1$. Обозначая эту константу $c_{n\alpha}^+$, получим:

$$W_n^+(\tau, \gamma, \mu) := P_{\beta_n, \gamma, \mu}(T_n^y > c_{n\alpha}^+)$$

есть мощность на альтернативе $A_n^+(\tau)$.

Константа

$$c_{n\alpha}^+ = (n/2)(t_{1-\alpha/2}^2 - 1), \quad t_{1-\alpha/2}$$

– квантиль стандартного гуссовского закона уровня $1 - \alpha/2$.

При левосторонней альтернативе критическая область имеет вид

$$(T_n^y < c_{n\alpha}^-), \quad c_{n\alpha}^- = (n/2)(t_{(1+\alpha)/2}^2 - 1).$$

Мощность на $A_n^-(\tau)$ обозначим $W_n^-(\tau, \gamma, \mu)$. Пусть $W_n^\pm(\tau) := W_n^\pm(\tau, 0, \mu)$.

Наша цель:

1. Доказать, что для мощности $W_n^\pm(\tau, \gamma, \mu)$ при условиях (i–iii) существует предельная мощность $W^\pm(\tau, \gamma, \mu)$, причем

$$\sup_{\gamma \leq \Gamma, \mu} |W_n^\pm(\tau, \gamma, \mu) - W^\pm(\tau, \gamma, \mu)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

2. доказать основную теорему:

Теорема 2.

Пусть выполнены Условия (i–iii). Тогда при альтернативе $A_n^\pm(\tau)$

$$\sup_{n \geq 2, \mu} |W_n^\pm(\tau, \gamma, \mu) - W_n^\pm(\tau)| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0.$$

Это равностепенная непрерывность семейства $\{W_n^\pm(\tau, \gamma, \mu)\}$ допредельных мощностей в точке $\gamma = 0$. Она интерпретируется как качественная устойчивость теста.

См. [Hampel F.R., Ann. Math. Statist., 1971], [Rieder H., Ann. Statist., 1982].
Стац. сл.: [Boldin M.V., Math. Methods Statist., 2011], [Болдин М.В., Теория вероятн. и ее прим., 2012], [Болдин М.В., Есаулов Д.М., Вестник МГУ, 2014].

Лемма 1.

Пусть $G(x)$ непрерывна. Пусть $Z_n^y := n^{-1/2} \sum_{t=1}^n S_t^y(1)$. Тогда при любом фиксированном $n \geq 2$ $T_n^y = (n/2)[(Z_n^y)^2 - 1]$ п.н.

Отсюда:

$$W_n^+(\tau, \gamma, \mu) = P_{\beta_n, \gamma, \mu}(|Z_n^y| > t_{1-\alpha/2}),$$

$$W_n^-(\tau, \gamma, \mu) = P_{\beta_n, \gamma, \mu}(|Z_n^y| < t_{(1+\alpha)/2}).$$

Т.о., тесты со статистиками T_n^y и $|Z_n^y|$ эквивалентны и нужно изучить симптотические свойства статистики Z_n^y .

Теорема 3.

Пусть выполнены Условия (i–iii). Пусть верна любая из альтернатив $A_n^+(\tau)$ или $A_n^-(\tau)$. Пусть $0 \leq \Gamma < \infty$, а $\delta(\mu) := E_\mu[G(\xi_1) + G(-\xi_1)] - 1$. Тогда

$$Z_n^y = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \text{sign} \varepsilon_t - 2g(0)n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [1 - (1 + \tau/n)^{n-t}] \varepsilon_t - 2\gamma\delta(\mu) + r_n(\tau, \gamma, \mu),$$

где при любом $\epsilon > 0$

$$\sup_{\gamma \leq \Gamma, \mu} P_{\beta_n, \gamma, \mu}(|r_n(\tau, \gamma, \mu)| > \epsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Пусть для $\tau \neq 0$

$$\sigma^2(\tau) := 1 - 4g(0)E|\varepsilon_1|(1 + \frac{1 - e^\tau}{\tau}) + 4g^2(0)E\varepsilon_1^2(1 + 2\frac{1 - e^\tau}{\tau} - \frac{1 - e^{2\tau}}{2\tau}).$$

При $\tau = 0$ доопределим $\sigma^2(0) := 1$. Пусть $\nu \sim N(0, 1)$ с ф.р. $\Phi(x)$.

Центр. предельная теорема в Условиях (i – ii) влечет слабую сходимость

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^n \text{sign} \varepsilon_t - 2g(0)n^{-1/2} \sum_{t=1}^n [1 - (1 + \tau/n)^{n-t}] \varepsilon_t \rightarrow \sigma(\tau)\nu, \quad n \rightarrow \infty.$$

Этот факт и равномерная сходимость по вероятности в теореме 3 влекут:

Теорема 4.

Пусть выполнены Условия (i–iii). Пусть верна любая из альтернатив $A_n^+(\tau)$ или $A_n^-(\tau)$. Тогда для некоторой константы $\sigma_0^2 > 0$ при всех $\tau \in R^1$ дисперсия $\sigma^2(\tau) > \sigma_0^2$, и

$$\sup |P_{\beta_n, \gamma, \mu}(Z_n^y \leq x) - \Phi\left(\frac{x + 2\gamma\delta(\mu)}{\sigma(\tau)}\right)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Супремум берется по всем $x \in R^1$, $\gamma \leq \Gamma < \infty$ и произвольным μ .

Лемма 1 и Теорема 4 влекут

Следствие 1.

Пусть выполнены Условия (i–iii). Тогда:

1. При $A_n^+(\tau)$ мощность $W_n^+(\tau, \gamma, \mu)$ сходится к предельной мощности

$$W^+(\tau, \gamma, \mu) = 1 - \Phi\left(\frac{t_{1-\alpha/2} + 2\gamma\delta(\mu)}{\sigma(\tau)}\right) + \Phi\left(\frac{-t_{1-\alpha/2} + 2\gamma\delta(\mu)}{\sigma(\tau)}\right),$$

причем сходимость равномерная по $\gamma \leq \Gamma$ и произвольным μ :

$$\sup_{\gamma \leq \Gamma} |W_n^+(\tau, \gamma, \mu) - W^+(\tau, \gamma, \mu)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$$

2. Для $W_n^-(\tau, \gamma, \mu)$ при $A_n^-(\tau)$ верно аналогичное утверждение с

$$W^-(\tau, \gamma, \mu) = \Phi((t_{(1+\alpha)/2} + 2\gamma\delta(\mu))/\sigma(\tau)) - \Phi((-t_{(1+\alpha)/2} + 2\gamma\delta(\mu))/\sigma(\tau)).$$

Семейство предельных мощностей $\{W^\pm(\tau, \gamma, \mu)\}$ равномерно непрерывно по γ в точке $\gamma = 0$:

$$\sup_{\mu} |W^\pm(\tau, \gamma, \mu) - W^\pm(\tau)| \rightarrow 0, \gamma \rightarrow 0. \quad (1)$$

Теорема 4 и соотношения (1) влекут теорему 2.

- Для симметричных $G(x)$, очевидно, $\delta(\mu) = 0$, т.е. асимптотические уровень значимости и мощность знакового теста в схеме с засорениями те же, что в схеме без засорений при любом распределении μ .
- Очевидно, $\sigma^2(\tau) \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty$, и $W^+(\tau, \gamma, \mu) \rightarrow 1$
Но при $\tau \rightarrow -\infty$ дисперсия $\sigma^2(\tau) \rightarrow \sigma_\infty^2 := 1 - 4g(0)E|\varepsilon_1| + 4g^2(0)E\varepsilon_1^2$, так что

$$W^-(\tau, \gamma, \mu) \rightarrow \Phi((t_{(1+\alpha)/2} + 2\gamma\delta(\mu))/\sigma_\infty) - \Phi((-t_{(1+\alpha)/2} + 2\gamma\delta(\mu))/\sigma_\infty) < 1.$$

Качественно это означает, что проверить H_0 против левосторонней альтернативы (которая означает стационарность авторегрессии) труднее, чем против правосторонней альтернативы, которая означает “взрывную” авторегрессию.