

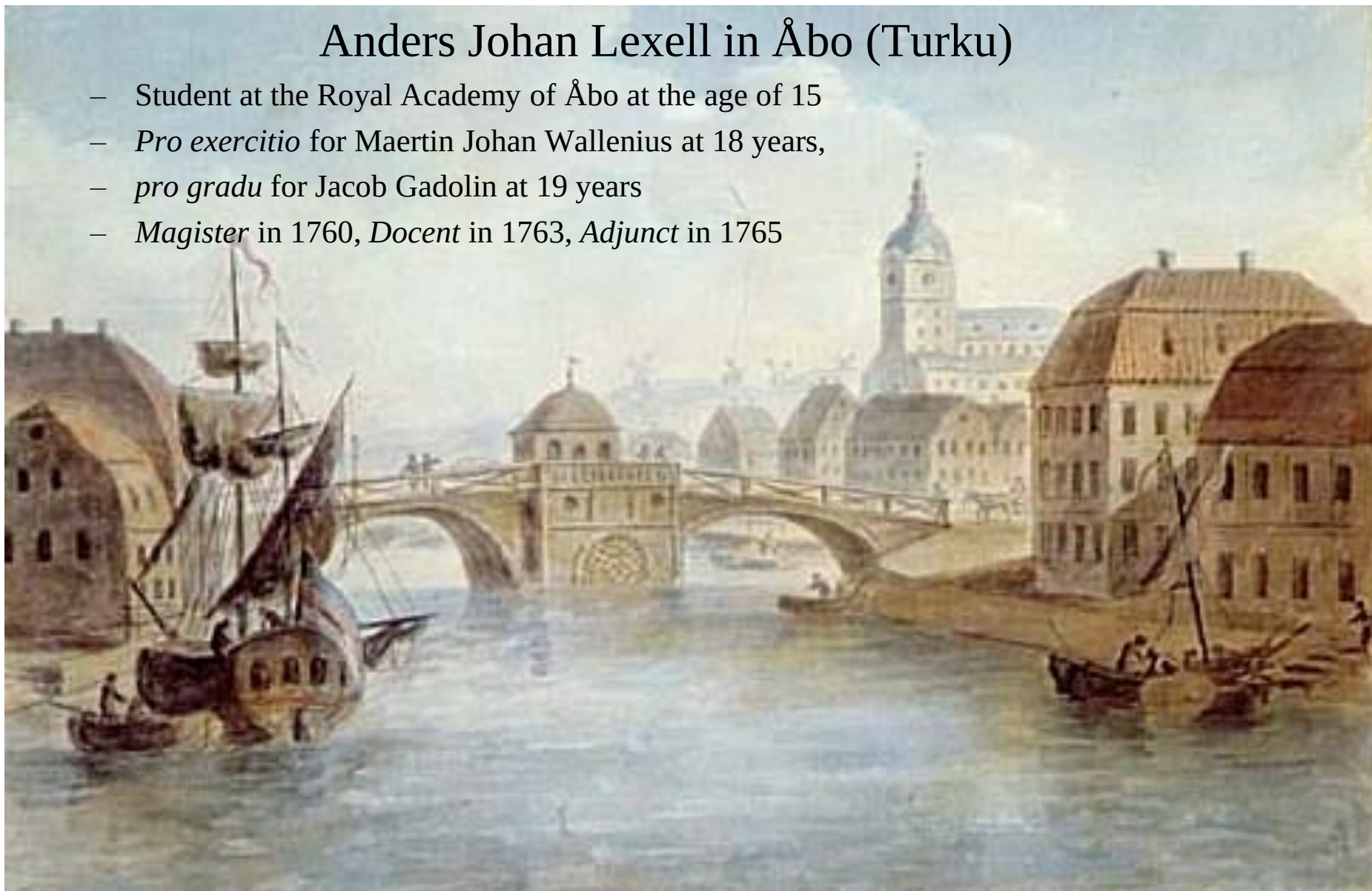
Anders Johan Lexell (1740–1784): a Finnish Mathematician and a Russian Academician

History of Mathematics seminar at the V. A. Steklov Institute, St. Petersburg
1 June 2017. By Johan Stén. University of Helsinki



Anders Johan Lexell in Åbo (Turku)

- Student at the Royal Academy of Åbo at the age of 15
- *Pro exercitio* for Maertin Johan Wallenius at 18 years,
- *pro gradu* for Jacob Gadolin at 19 years
- *Magister* in 1760, *Docent* in 1763, *Adjunct* in 1765



Åbo in 1811 by G. S. Sergejev



Lexell's father Jonas Lexell
1699-1768
Goldsmith and city councillor



CARL FREDRIK MENNANDER
Målning av P Krafft d ä
Foto SPA

1712-1786
Bishop, Chancellor of the Academy
Professor of Physics



JACOB GADOLIN
Målning (beskuren) av C F v Breda 1801
Foto SPA

1719-1802
Professor of Physics

Martin Johan Wallenius
1730-1772
Professor of Mathematics

Anders Planman
1724-1803
Professor of Physics

D. F. G.
DISSERTATIO
DE

METHODO INVENIENDI LINEAS CURVAS,

EX DATIS
RADIORUM OSCULI PROPRIETATIBUS,

QUAM

CONSENSU AMPL. FACULT. PHILOS.
IN REGIA ACAD. UPSALIENSI,

PUBLICO EXAMINI SUBJICIUNT

ANDREAS JOHANNES
LEXELL,

PH. M.

ET

ERICUS ÖSTLING,

GESTRICIUS.

IN AUDIT. CAROL. MAJ. DIE XXVIII APRILIS
ANNI MDCCCLXIII.

H. A. M. S.

UPSALIÆ.



D. A.

§. I.

Essentialem linearum curvarum caractere quem, cum a linea recta, tum inter se distinguuntur, constituit curvatura, seu ratio earundem a suis tangentibus rectis. Hæc ad unumquodque curvæ punctum, proportionalis gulo illi quam minimo, quem curva cum recta a punctum tangente efficit. Lineæ proinde curvæ id punctum mutui occurfus, non solum eandem tangentem; sed etiam cum illa angulos quam efficiunt æquales, eandem habent curvaturam, id sibi rite impositæ per arcum quam minimum coinatque sese osculari dicuntur. Harum alterura p. circulus, dicitur radius hujus circuli, qui ad communem curvarum arcum perpendicularis est, radius curvaturæ nec non radius osculi, centrum autem hujus, centrum circuli osculatoris nuncupari solet hinc quidem evidens est, curvaturam ope radii hujus inuicem determinari, quo scilicet major evadit radii curvaturæ, eo minor curvatura & vice versa.

Consideratio igitur linearum curvarum, ad curvaturæ earundem relata, duo imprimis probæ concernit, quorum prius est: *ex data indole curva*

✱) 19 (✱

Exempl. Si $VL(S) = \frac{x^3}{a^2}$, erit per hoc theorema $-\frac{a^2 dx}{x^3}$

$= p dp$ & si sumantur integralia $p^2 = \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{b^2}$, erit pro-

inde $p = \frac{a\sqrt{b^2 \pm x^2}}{bx}$, $\sqrt{1-p^2} = \frac{\sqrt{b^2 x^2 - a^2(b^2 \pm x^2)}}{bx}$

adeoque $dy = \frac{p dx}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{a\sqrt{b^2 \pm x^2} dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2(b^2 \pm x^2)}}$ generalis

æquatio pro curvis proprietatem memoratam habentibus.

Si $C = 0$ adeoque $b = \infty$, fit $dy = \frac{adx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ curva igitur eo

in casu est catenaria.

§. VIII.

Theor. 7: mum. *Prodiat tangente CV (Fig. I.) versus alteram ipsius C partem, ipsi occurrat recta LQ quæ ipsi LV normalis est, in puncto Q, dicatur intercepta CQ M, erit*

$$dx = -\frac{M\sqrt{1-p^2} dp}{p}, \quad dy = -M dp.$$

Quoniam triangulum CQL $\propto$ ipsi EGL, est GL(p): FG($\sqrt{1-p^2}$) = CQ(M): CL(R) = $\frac{M\sqrt{1-p^2}}{p}$, unde dx

$$= -\frac{M\sqrt{1-p^2} dp}{p} \quad \& \quad dy = -M dp.$$

1. Coroll. Hinc ob $R = \frac{Mv}{\sqrt{1-v^2}}$ erit $dx = \frac{Mv^2 dv}{1-v^2}$

$$dy = \frac{Mv dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

The Imperial Academy of Sciences at Saint Petersburg

- Founded by Peter the Great in 1724 /1725.
- One of the most prestigious Academies of Europe in the 18th -c.
- In 1766 Leonhard Euler, then in Berlin, accepted Catherine II invitation to invigorate the Academy



Monsieur.

Je ne se'aurais vous exprimer les sentiments de joie et de la reconnaissance, des quelles je suis penetree, en recevant votre derniere lettre, car je n'aurois jamais ose', me former un espoir si flatteur que ma dissertation obtiendrait cette grande et parfaite approbation, dont vous m'assurez, vous ne devez pas donc etre si etrange, que votre lettre m'a rendu egalement joyeux, surpris et confus. De quelle maniere aurois-je pu mentir, que mon ouvrage seroit compare, a celui des plus illustres Mathematiciens Mesieurs Euler et d'Alembert? Et si je voudrois m'approprier cet eloge, on auroit sans doute raison, de me juger l'homme le plus vain et le plus ambitieux. Quelque fois j'ai pense que vous m'aviez flatte, et que mon ouvrage n'ais pas recu une approbation si honorable, que celle, qui est marquee dans votre lettre. Mais pourquoi aussi dou-

te, pourquoi soupconner la fidelite de celui, qui moi a toujours ete sans reserve, de mon ravissement, d'avoir recu des vobres, par les plus grands Mathematiciens de l'Europe, me rappelle sans cesse ces vers de Marivaux, ruidant abste pater, laudato vire.

Et maintenant je vous en supplie, de declarer a Monsieur l'Academi' la profonde veneration avec la quelle je le regarde, et honore, et gracieux, qu'il a bien voulu se donner la peine de daigner l'assurer, que je pourrais profiter de sa bonte' et de sa grace, et de sa bonte' pour me faire obtenir quelque chose, car ma fortune est trop mediocre, pour que je sois capable d'obtenir quelque chose sans appointement, dans un Etat qui est extremement cher, comme l'on m'a fait esperer, que je pourrais obtenir, quelque fonction comme de l'Academi', je serois content.

la bonte, de presenter la lettre ci-jointe a Monsieur d'Etat von Stahlin, qui si je ne me trompe pas, est l'Academi', et s'ayez persuadee, que je serois de la maniere la plus parfaite amitie' votre

tres humble serviteur et fidele ami
Andre' Jean Lexell

DE INTEGRATIONE AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS:

$$a^x dy + b \cdot a^{x-1} \cdot a^{n-1} y dx + c \cdot a^{n-1} \cdot a^{n-1} y dx^2 + \dots + r y dx^n = X dx^n$$

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Ex occasione aequationis differentialis $a^x dy - y dx^x = 0$, cuius integrali inueniendo super eram intentus, incidi in methodum eam integrandi, haud inelegantem, quippe quae non solum eo nomine se commendabat, quod pro speciali isto exemplo videbatur esse facillima; sed etiam quia optimo cum successu applicari posset, ad perficiendam integrationem aequationis differentialis supra propositae, quae formae est generalis et innumeras sub se complectitur. Deinceps vero cum perspicerem, a summis Mathematicis, imprimis ab Illustr. *Eulero* in Tom. VII. Miscellan. Berolin. et Tom. III. Nov. Comment. Acad. Imper. Petropol. antea iam traditas fuisse, hanc aequationem integrandi Methodos, merito dubius haesi, utrum quae ad hanc materiem illustrandam meditatatus eram, publicae luci committerem, an non satius foret, eadem penitus

METHODVS INTEGRANDI, NONNVLLIS AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM EXEMPLIS ILLVSTRATA.

Auctore

AND. I. LEXELL.

§. I.

Constat iam inter omnes fere, qui ad calculum integralem excolendum, animum adplicuere, quod vnaquaeque aequatio differentialis reducat per integrationem ad tot aequationes differentiales gradus proxime inferioris, quot unitates continet iste numerus, quo exprimitur, cuius sit gradus aequatio illa proposita. Dum igitur talis adhibetur integrandi methodus, quae ad singulas hasce aequationes differentiales inueniendas, simul et vno negotio perducit, haud mediocre inde oritur subsidium ad detegendam aequationem finitam, qua completum integrale aequationis differentialis primum allatae absoluitur. Quoties nimirum omnes hae quaesitae aequationes inter se differunt, toties per earundem comparisonem, vltimum istud integrale statim inuenitur; sin vero aliquot earum inter se plane congruant, tum non vnica quidem operatione, totam integrationem perficere licet, id tamen lucri accipitur, ut aequatio differentialis, ad aliam, quae

Leonhard Euler

- 1707-1783
- Petersburg Academy of Sciences 1727-1741
- Prussian Academy of Sciences in Berlin 1741-1766
- Petersburg Academy of Sciences 1766-1783



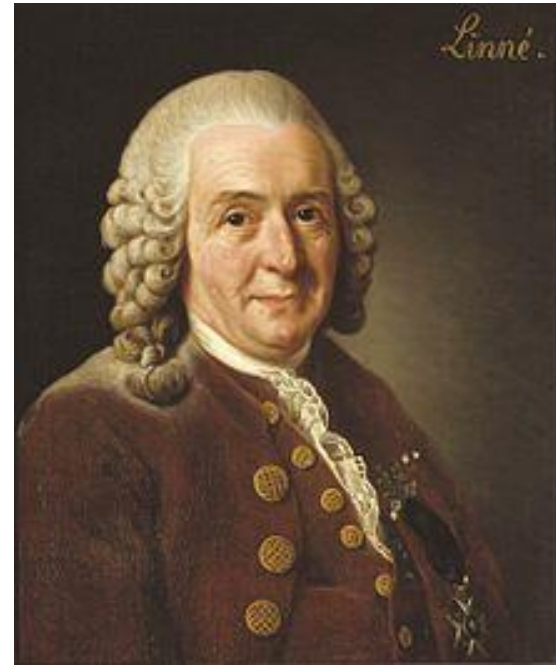
Pehr Wilhelm Wargentin

- 1717-1783
- Astronomer, statistician, secretary of the Royal Swedish Academy of Sciences
- Lexell's principal contact in Sweden



Carl Linnaeus

- 1707-1775
- Natural historian,
- Founder of taxonomy and binomial nomenclature



Johann III Bernoulli

- 1744-1807
- Astronomer, mathematician and travel journalist



Lexell's fields of research:

- Integral and differential calculus

$$a^2yy'' + a^2b(y')^2 - y^2 = 0,$$

$$x^2yy'' + bx^2(y')^2 + cxyy' - ay^2 = 0,$$

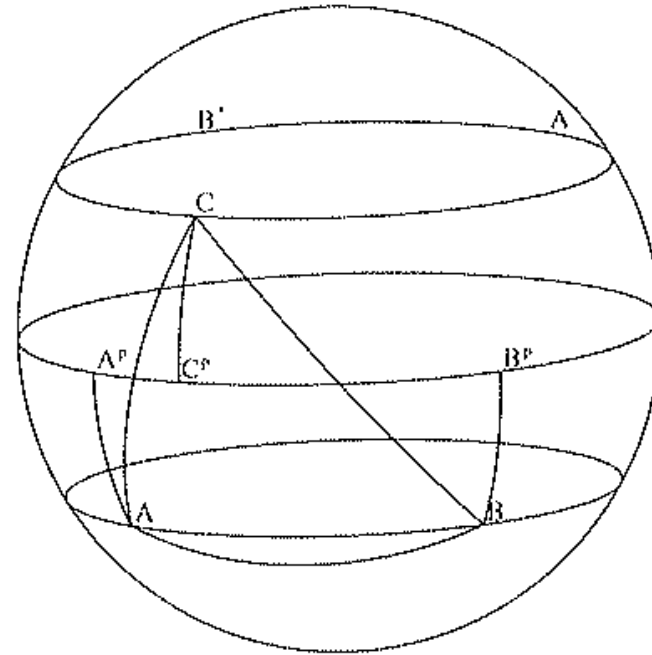
$$y^2y''' + ayy'y'' - b(y')^3 = 0, \quad \text{and}$$

$$y'''' + ay'''y' + b(y'')^2 + cy''(y')^2 - f(y')^4 = 0,$$

$$y'''y' + a(y'')^2 + by''(y')^2 + c(y')^4 = 0,$$

- Elliptic and related integrals
- Series expansions in terms of trigonometric functions
- Proof of Lagrange's inversion theorem for series

- Differential geometry,
especially spherical geometry
Lexell's theorem,
Lexell circle



- Polygonometry, polyhedron geometry
- Solar parallax determined the transit of Venus 1769
- Longitude determinations by means of Jupiter's moons
- Euler's lunar theory, perturbation theory (Venus)
- Orbit of the comet of 1769
- Orbit of the comet of 1770 ("Lexell")
- Orbit of the planet Uranus 1781

RECHERCHES ET CALCULS

Sur la vraie orbite elliptique de la Comete de l'An.
1769. et son tems periodique,

executées sous la direction

de
Mr. LEONHARD EULER,

par les soins

de Mr. LEXELL,

Adjoint de l'Academie Imperiale des Sciences de Saint-Petersbourg.



A St. PETERSBOURG,

De l'imprimerie de l'Academie Imperiale des Sciences

1770.

56 RECHERCHES SUR LA COMETE.

Pour cet effet posons

$$u = \sqrt{p} + \sqrt{q},$$

pour avoir

$$u^2 = p + q + 3u\sqrt{pq},$$

cette valeur étant substitué nous donne

$$p + q + 3u\sqrt{pq} = -3u + \frac{1}{c^2}N$$

d'où il est clair que

$$1^\circ. \sqrt{pq} = -1 \text{ et } 2^\circ. p + q = \frac{1}{c^2}N,$$

de là on voit, que $pq = -1$, donc posant $p = -\tan \alpha$ on aura $q = -\cot \alpha$ et partant l'autre équation devient $\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{1}{c^2}N$ ou bien

$$\frac{\sin \alpha^2 - \cos \alpha^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = -2 \cot \alpha = \frac{1}{c^2}N = 2 \cot (180^\circ - 2\alpha)$$

de sorte que $\cot (180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{c^2}N$, posant donc $180^\circ - 2\alpha = 2\mu$ pour avoir $\cot 2\mu = \frac{1}{c^2}N$, d'où l'on trouvera aisément l'angle μ et ensuite on aura $p = \cot \mu$ et $q = -\tan \mu$, qu'on cherche une autre angle ν de sorte que

$$\tan \nu = \sqrt{p} \tan \mu \text{ pour avoir}$$

$$\sqrt{p} = \cot \nu \text{ et } \sqrt{q} = -\sqrt{p} \tan \mu = -\tan \nu$$

et partant notre quantité cherché

$$u = \cot \nu - \tan \nu = \frac{\cot^2 \nu - \tan^2 \nu}{\frac{1}{\cot \nu} + \tan \nu} = \frac{\cot^2 \nu - \tan^2 \nu}{\frac{1 + \tan^2 \nu}{\cot \nu}} = 2 \cot 2\nu.$$

Voilà

6 RECHERCHES SUR LA COMETE.

Probleme.

Pour un tems proposée quelconque $=T$, ayant le lieu de la Comete $=L$, (qu'on peut prendre tant pour la Longitude, que la Latitude) si pour un tems précédent $T-p$ on connoit le lieu de la Comete $=L-m$ et pour un tems suivant $T+q$, le lieu de la Comete $=L+n$, trouver le lieu de la Comete pour un tems indéterminée $=T+z$.

Solution.

Posons ce lieu qu'on cherche

$$L + Mz(z+p) + Nz(z-q)$$

de sorte que prenant $z=0$, ce lieu devienne $=L$, mais puisque prenant $z=-p$, le lieu doit être $=L-m$, nous aurons cette équation

$$L-m = L + Np(p+q)$$

d'où l'on tire $N = \frac{-m}{p(p+q)}$. De la même manière puisque posant $z=q$, le lieu doit être $L+n$, on aura cette équation

$$L+n = L + Mq(p+q),$$

d'où l'on tire $M = \frac{n}{q(p+q)}$, par conséquent pour le tems indéterminée $T+z$ le lieu de la Comete sera

$$= L + \frac{nz(z+p)}{q(p+q)} - \frac{mz(z-q)}{p(p+q)}$$

ou bien

$$= L + \frac{(npz + mqz)z}{pq(p+q)} - \frac{(mp - mq)z}{pq(p+q)}.$$

MM.

136 RECHERCHES SUR LA COMETE.

I. Longitude du $\odot = 11^\circ 25' 41''$

II. Inclinaison de l'orbite $= 40^\circ 49' 33''$

III. Le demiparametre de l'orbite $= 0,2451294$

IV. L'excentricité $= 0,9980036$

V. Distance du Perihelie au Soleil $= 0,1226851$

VI. Elongation du noeud descend. au Perihelie $= 149^\circ 10' 51''$

VII. Tems du Perihelie O&T. $7^\circ 15' 37'' = 7,65112$.

CX. On voit donc que l'orbite de cette Comete est en effet une ellipse, il vaudra donc bien la peine de déterminer tant l'axe de cette ellipse, que le tems periodique de la Comete. Pour cet effet, ayant trouvé la distance du Perihelie $\odot \Pi = \frac{b}{1+e}$, on n'a qu'à la diviser par $1-e$, pour avoir le demiaxe de l'orbite $\frac{b}{1-e^2} = a$ et alors aVa donnera le tems periodique exprimée en Années. D'où on fera le calcul suivant:

$$\text{Log. } \odot \Pi = 9,0887920$$

$$L(1-e) = 7,3002476 \quad a = 61,4531843$$

$$\text{Log. } a = 1,7885444 \quad aVa = 481,7$$

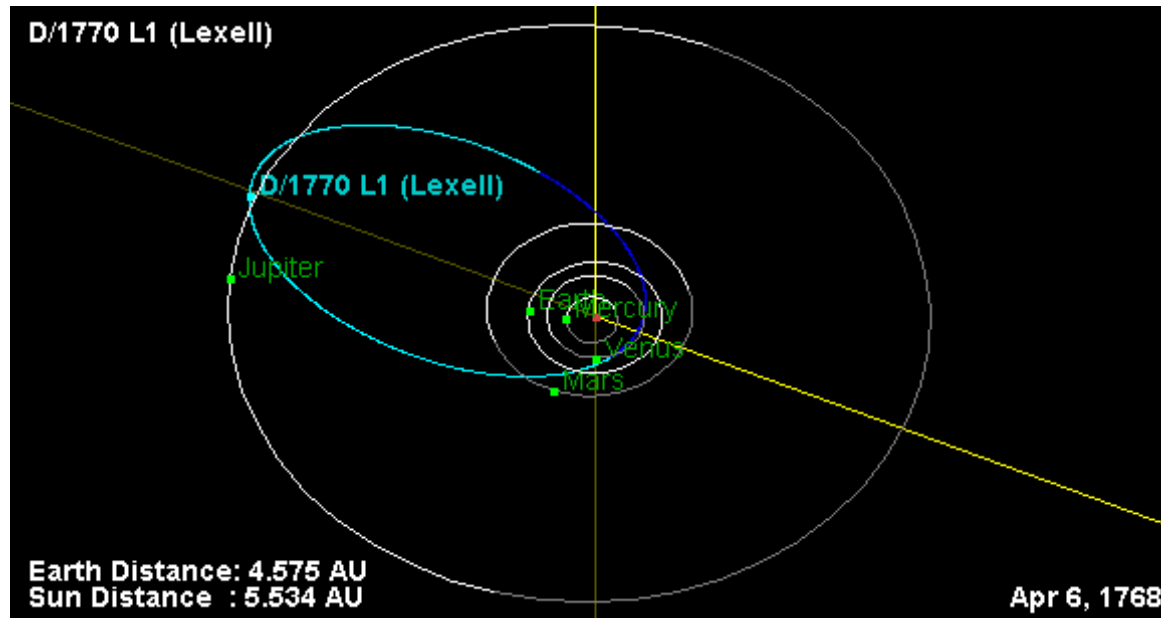
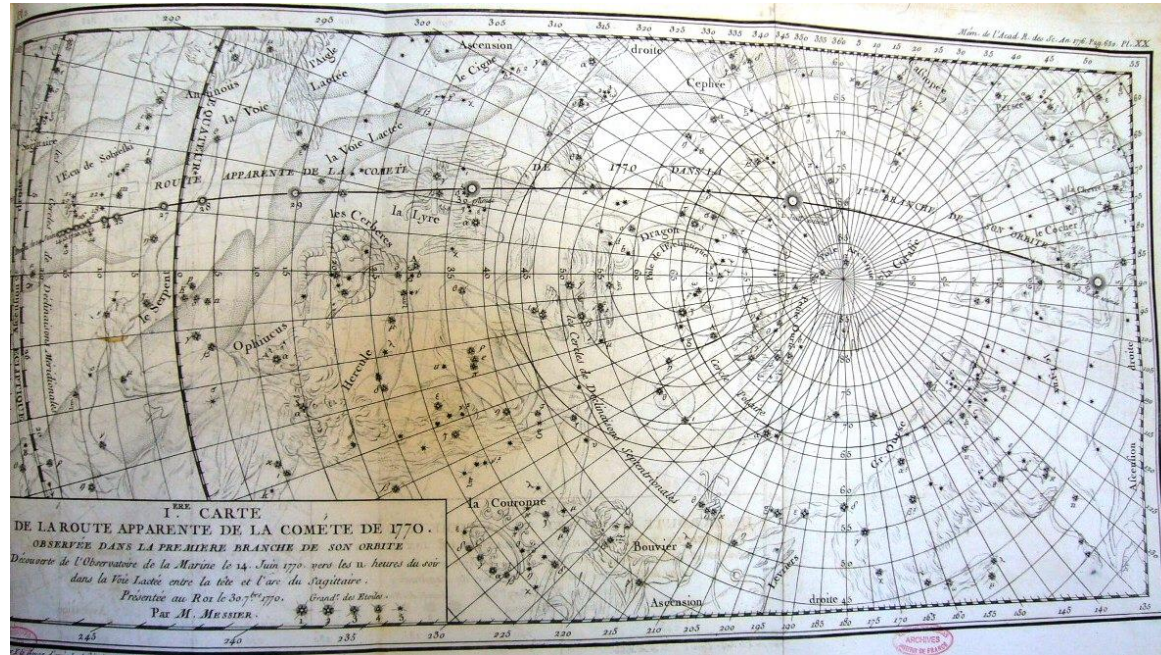
$$LVa = 0,8942722$$

$$LaVa = 2,6828166$$

dont le demiaxe de l'orbite est $61,45318$ et partant la distance de l'aphelie au Soleil $122,7836835$, enfin le tems periodique doit être de $481,7$ Années.

CXI.

Lexell's comet of 1770



King George's star: A new planet (Uranus)



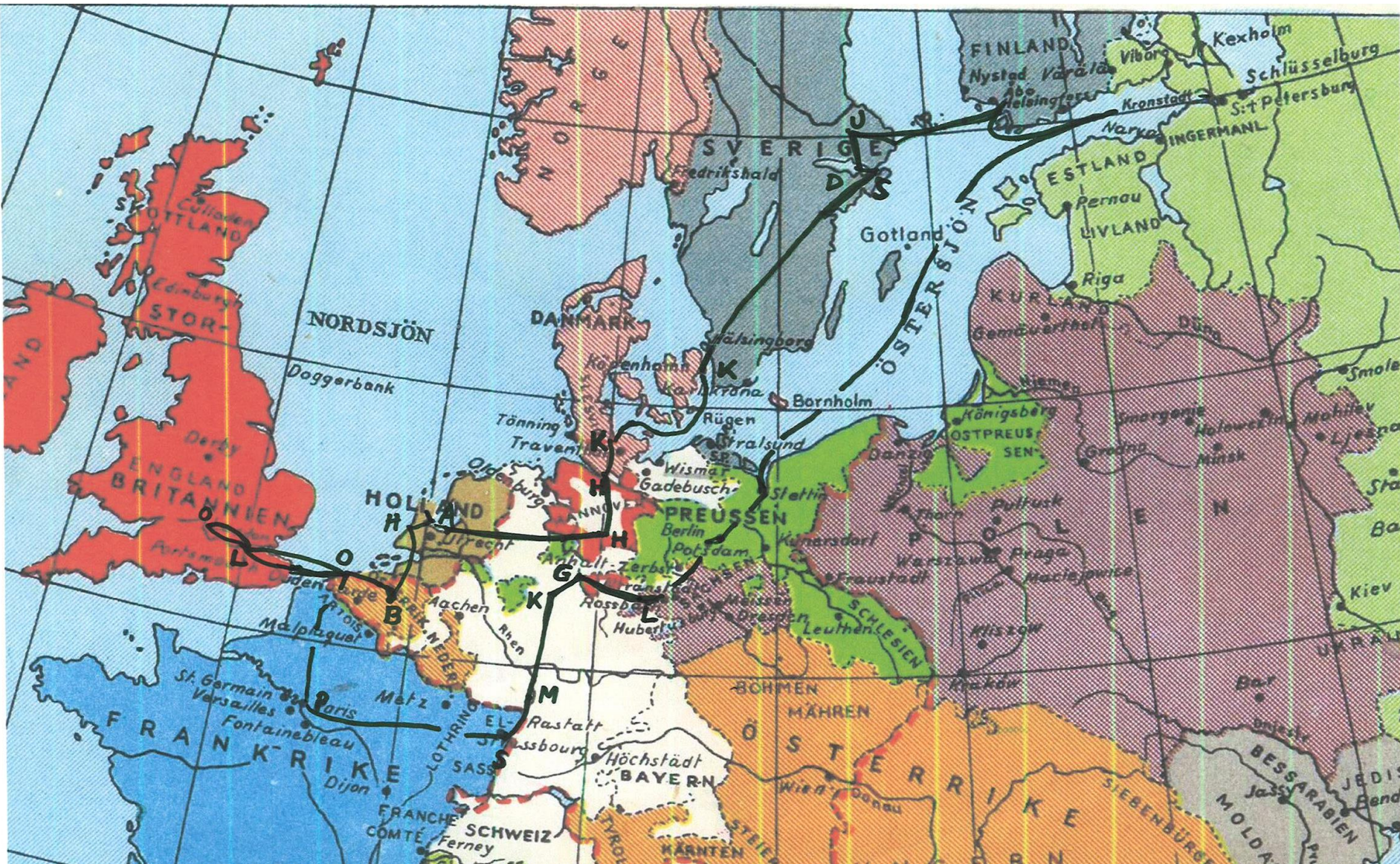
Discovered by
F. W. Herschel
on 13 March 1781

*Mouvement = $2^{\circ} 12' 2'' 43'''$ et l'inclinaison = $44^{\circ} 33''$. La fin par la observation
finis du 20 et 21 Fevr: combinées avec celles du 27 Mars l'année passée,
pour l'orbite circulaire, Longit. du Nœud = $2^{\circ} 12' 26'' 83'''$, ou $2^{\circ} 12'$
 $22' 33''$ et l'inclinaison de l'orbite = $45^{\circ} 28''$, ou $45^{\circ} 16''$, par conséquent
la Longit. du Nœud sera comprise entre $2^{\circ} 12'$ et $2^{\circ} 13'$ et l'inclinaison
de l'orbite entre $44'$ et $45'$.*

*Quoique je sois peut-être le premier, qui ait calculé le mouvement de
cet Astre dans une orbite circulaire, je n'ai pas prétendu par cela prou-
ver, que c'est réellement une Planète; cependant je ne saurais nier que
ma devise de plus en plus vraisemblable, depuis que j'ai trouvé qu'une
orbite Parabolique ne saurait satisfaire aux observations. Au reste il
m'a paru que les raisonnemens de Mr. Bode a fait usage pour pro-*

Lexell admitting in a letter to Johann III
Bernoulli that he was apparently the first to
have proposed a planetary orbit.

Lexell's academic journey 1780-1781



Imperial Academy of Sciences in 1784



Johan C.-E. Stén

A Comet of the Enlightenment

Anders Johan Lexell's Life
and Discoveries

 Birkhäuser

Lexell monument in Turku 2016

