Некоторые оптимизационные задачи управления пучками траекторий. Теоремы существования оптимального управления (Some optimal control problems for pencils of trajectories. Existence theorems for optimal control)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii),
Е. А. Беляевских (E. A. Belyaevskikh)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
mni@mi.ras.ru, belchiki@mail.ru

В монографии [1] и других работах изучаются задачи управления пучками траекторий управляемого объекта следующего типа.

В евклидовом арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматривается движение управляемого объекта вида (ср. [2])

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, $u \in U$, U — непустой компакт из евклидова пространства $\mathbb{R}^r$ $(r \geq 1)$. В качестве допустимых управлений рассматриваются измеримые по Лебегу функции $u = u(t) \in U$, $t \geq 0$. Нелинейная функция $f(x,u)$ предполагается непрерывной по совокупности переменных и непрерывно дифференцируемой по компонентам вектора x на $\mathbb{R}^n \times U$. Предполагается также, что на $\mathbb{R}^n \times U$ выполняется неравенство

$$\langle x, f(x,u)\rangle \leq c(1 + |x|^2),$$

где символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение векторов, символ $|\cdot|$ означает длину вектора, c — неотрицательная константа. Относительно начального состояния $x(0) = x_0$ предполагается, что $x_0 \in M_0$, где M_0 — непустой компакт из $\mathbb{R}^n$.

Множество допустимых управлений на рассматриваемом далее отрезке $[0,T]$ ($T > 0$ — константа) обозначим через $\mathcal{U}$. Паре $x_0, u(\cdot)$, где $x_0 \in M_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, можно сопоставить абсолютно непрерывное решение $x(t, x_0, u(\cdot))$ уравнения (1) на $\Delta = [0,T]$. При данном $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ множество функций на Δ

$$\mathcal{M}(u(\cdot)) = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(\cdot, x_0, u(\cdot))$$

образует пучок траекторий управляемого объекта (1). На множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, можно рассматривать различные оптимизационные задачи. Такого рода задачи интересны, например, если начальное состояние x_0 управляемого объекта (1) известно неточно, но известно, что $x \in M_0$, где M_0 — заданное множество из $\mathbb{R}^n$.

В монографии [1] рассмотрены некоторые задачи управления пучками траекторий, связанные с задачами управления пучками заряженных частиц. Такие задачи представляют интерес, например, при проектировании ускорителей заряженных частиц.

Здесь мы остановимся на одной из оптимизационных задач, рассмотренных в [1]. На множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, рассмотрим минимизируемый интегральный функционал вида

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T \int_{M_{t,u(\cdot)}} \phi(t, y)\, dy\, dt, \tag{2}$$

где $\phi(t, y)$ — непрерывная функция на $\Delta \times \mathbb{R}^n$,

$$M_{t,u(\cdot)} = \bigcup_{x_0 \in M_0} x(t, x_0, u(\cdot)),$$

$t \in \Delta$. В (2) сначала выполняется интегрирование в смысле Лебега по $y \in M_{t,u(\cdot)}$, а потом интегрирование в смысле Лебега по $t \in \Delta$. Предполагается, что мера Лебега компакта M_0 положительна.

В настоящей работе получены достаточные условия, при которых существует оптимальное управление в рассматриваемой оптимизационной задаче на минимум функционала $I(u(\cdot))$ (см. (2) на множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. Эти достаточные условия, помимо уже сделанных предположений, состоят в том, что векторная функция $f(x, u)$ в (1) имеет специальный вид

$$f(x, u) = g(x) + B(x)u, \tag{3}$$

где векторная функция $g(x)$ и матричная функция $B(x)$ размерности $n \times r$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$, а U — выпуклый компакт.

В порядке обобщения можно рассмотреть минимизируемый функционал вида (ср. [2])

$$I_1(u(\cdot)) = I(u(\cdot)) + I_2(u(\cdot)),$$

где

$$I_2(u(\cdot)) = \int_{M_{T,u(\cdot)}} h(y)\,dy,$$

причем функция $h(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$ и интеграл понимается в смысле Лебега.

Для задачи минимизации функционала $I_1(u(\cdot))$ на множестве пучков $\mathcal{M}(u(\cdot))$, где $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, существование оптимального управления гарантируется при тех же условиях относительно $f(x,u)$, $\phi(t,y)$, о которых было сказано выше (см. (3)), и условии выпуклости компакта U.

Отметим, что при доказательстве теорем мы используем некоторые результаты из [3].

Список литературы

1. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969
3. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.

Синтез оптимального управления в задаче химиотерапии злокачественных опухолей (Optimal feedback in a mathematical model of chemotherapy of malignant tumours)*

Н. Г. Новоселова (N. G. Novoselova)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

n.g.novoselova@gmail.com

В работе изучается математическая модель химиотерапии злокачественных опухолей для немонотонной функции терапии, описывающей степень эффективности воздействия химиотерапевтического средства на клетки. На основе принципа максимума Л.С. Понтрягина [1] описано

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00074).