this theory, leading to a left-invariant structure over the group $\mathrm{SE}(2; N)$, restricting to a finite number of rotations. This apparently very simple group is in fact quite atypical: it is maximally almost periodic, which leads to much simpler harmonic analysis compared to SE(2). Based upon this semi-discrete model, we improve on the image-reconstruction algorithms and we develop a pattern-recognition theory that leads also to very efficient algorithms in practice.

## Численные методы решения одной задачи оптимального управления (Numerical methods for the solution of an optimal control problem)

**С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)**

*Московский государственный университет, Москва, Россия*

samsonov@cs.msu.su

Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления. Использование линейности управляемой системы позволяет построить эффективно работающие численные алгоритмы. Разработке численных методов для линейных задач оптимального управления посвящен целый ряд работ. Следует, однако, заметить, что в большинстве опубликованных работ исследуется только сходимость методов и задается какой-то критерий остановки вычислений, который обеспечивает "близость" вычисляемых величин к искомым, но не гарантирует заданной точности. Обычно используемые численные алгоритмы требуют численного решения некоторых задач из теории дифференциальных уравнений, линейной алгебры и т.д. Однако вычислительные погрешности решения этих вспомогательных задач могут оказаться весьма значительными, поэтому большой интерес представляют такие численные методы, для которых удается получить оценку точности вычислений с учетом вычислительных погрешностей.

Данный доклад как раз и посвящен численным методам, решающим линейные задачи оптимального управления с заданной точностью и с учетом вычислительных погрешностей [1].

**Список литературы**

1. *Самсонов С.П.* Численный метод решения линейных задач оптимального управления с заданной точностью // Проблемы динамического управления. 2009. Вып. 4. С. 156–158.

# Simultaneous control of ensembles of nonlinear control systems

**Andrey Sarychev**

*Dip. di Matematica e Informatica U.Dini, University of Florence, Italy*

asarychev@unifi.it

Over the last decade there is a growing interest with regard to the *control of ensembles* (*parameterized families*) *of nonlinear control systems*

$$\dot{x}^\theta = f^\theta(x^\theta, u), \qquad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\nu, \tag{1}$$

*by a single $\theta$-independent control $u(\cdot)$.* Such problem arises for example, when one seeks for a control, which may compensate a dispersion of parameters.

One of notable examples is the Bloch model in NMR spectroscopy, seen as a bilinear control system in $SO(3)$ with a parameter subject to dispersion. Partial controllability results for this model have been obtained by N. Khaneja and S. Li, who also suggested applying the Campbell–Hausdorff formula for "generating higher order Lie brackets ... which carry higher order powers of the dispersion parameters."

An alternative problem setting amounts to *finding for a control system $\dot{x} = f(x,u)$ a "simultaneous control" $u(t)$ which* (*approximately*) *drives an ensemble of points $x(\theta)$, $\theta \in \Theta$, to a target $z(\theta)$.* In our presentation we opt for $L_p$-approximate controllability: $\int_\Theta \|x(T;\theta) - z(\theta)\|^p \, d\theta < \epsilon^p$.

In a recent publication [1] with A. Agrachev and Yu. Baryshnikov we aimed at introducing a Lie algebraic ("geometric control") approach to the controllability of (1).

We started with finite ensembles (finite $\Theta$), to which Lie rank criteria of *exact controllability* can be applied after proper modification. We proved