References

1. *Acemoglu D.* Introduction to modern economic growth. Princeton: Princeton Univ. Press, 2008.
2. *Aseev S.M.* Adjoint variables and intertemporal prices in infinite-horizon optimal control problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 290. P. 223–237.
3. *Aseev S.M., Veliov V.M.* Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291, Suppl. 1. P. S22–S39.
4. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.
5. *Michel P.* On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. V. 50. P. 975–985.

Локальная управляемость и оптимальность (Local controllability and optimality)

Е. Р. Аваков (E. R. Avakov), Г. Г. Магарил-Ильяев (G. G. Magaril-Il'yaev)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

eramag@mail.ru, magaril@mech.math.msu.su

Доклад посвящен взаимосвязям между условиями локальной оптимальности управляемой динамической системы относительно данного процесса и необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядков для этого процесса.

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \qquad u(t) \in U \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $\varphi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, U — непустое подмножество $\mathbb{R}^m$, $x(\cdot) \in AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ и $u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)$.

Положим $\mathcal{U} = \{u(\cdot) \in L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^m)\colon u(t) \in U \text{ для п.в. } t \in [t_0, t_1]\}$.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $u = u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим через $x(\cdot, x_0, u)$ решение дифференциального уравнения (1) такое, что $x(t_0, x_0, u) = x_0$.

Пусть V, V_1 — открытые множества в $C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)$, а V_2 — открытое множество в $L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$. Введем следующие множества:

$$R(x_0,t_1)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\colon x(t_1,x_0,u)=x\},$$
$$R(x_0,t_1,V)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\colon x(\cdot,x_0,u)\in V,\ x(t_1,x_0,u)=x\},$$
$$R(x_0,t_1,V_1,V_2)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists\, u\in\mathcal{U}\cap V_2\colon x(\cdot,x_0,u)\in V_1,\ x(t_1,x_0,u)=x\}.$$

Будем называть их соответственно множеством *достижимости*, множеством *локальной достижимости* и множеством *слабой локальной достижимости.*

Если $u=u(\cdot)\in\mathcal{U}$ и $x(\cdot)=x(\cdot,x_0,u)$, то пару $(x(\cdot),u(\cdot))$ будем называть процессом (с началом в точке x_0) для системы (1).

Окрестности точек $x(\cdot)$ и $u(\cdot)$ обозначаем соответственно $V(x)$ и $V(u)$.

Определение. Будем говорить, что динамическая система (1) *локально управляема* (*слабо локально управляема*) относительно процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, если $\widehat{x}(t_1)\in\operatorname{int}R(x_0,t_1,V(\widehat{x}))$ для любой окрестности $V(\widehat{x})$ $(\widehat{x}(t_1)\in\operatorname{int}R(x_0,t_1,V_1(\widehat{x}),V_2(\widehat{u}))$ для любых окрестностей $V_1(\widehat{x})$ и $V_2(\widehat{u}))$.

В противном случае пару $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ будем называть *локальным* (*слабым локальным*) *оптимальным процессом* для системы (1).

Мотивировать вторую часть определения и тем самым установить связь между управляемостью и оптимальностью можно следующими простыми соображениями. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{gathered}J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)\,dt\to\min,\\ \dot{x}=\varphi(t,x,u),\qquad u(t)\in U,\\ x(t_0)=x_0,\qquad x(t_1)=x_1.\end{gathered}\tag{2}$$

Обычным образом определяются сильный и слабый (в случае открытого множества U) локальные минимумы в этой задаче.

Сопоставим данной задаче следующую динамическую систему:

$$\dot{\overline{x}}=\overline{\varphi}(t,\overline{x},u),\qquad u(t)\in U,\tag{3}$$

где $\overline{x}=(x_0,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$ и $\overline{\varphi}(t,\overline{x},u)=(f(t,x,u),\varphi(t,x,u))$. Положим $\overline{x}_0=(0,x_0)$.

Справедливость следующего утверждения почти очевидна.

Предложение. *Если* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ *— сильный (слабый) локальный минимум в задаче* (2), *то пара* $(\widehat{\overline{x}}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$, *где* $\widehat{\overline{x}}(\cdot)=(\widehat{x}_0(\cdot),\widehat{x}(\cdot))$, *является локальным (слабо локальным) оптимальным процессом для динамической системы* (3).

Положим $H(t,x,u,p(\cdot))=\langle p(t),\varphi(t,x,u)\rangle$, где $p(\cdot)\colon[t_0,t_1]\to(\mathbb{R}^n)^*$. Для краткости пишем $\widehat{\varphi}_x(t)=\varphi_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$, $\widehat{\varphi}_u(t)=\varphi_u(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))$ и $w=(x,u)$.

Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$ — процесс для системы (1). Для каждой пары $q(\cdot)= (h(\cdot),v(\cdot))\in C([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)$ рассмотрим следующую систему соотношений относительно переменной $p(\cdot)\in AC([t_0,t_1],(\mathbb{R}^n)^*)$:

$$-\dot{p}(t)=p(t)\,\widehat{\varphi}_x(t), \tag{4}$$

$$H_u(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))=0 \qquad \text{для п.в. } t\in[t_0,t_1], \tag{5}$$

$$\max_{u\in U}H(t,\widehat{x}(t),u,p(t))=H(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t)) \qquad \text{для п.в. } t\in[t_0,t_1], \tag{6}$$

$$Q(p(\cdot))[q(\cdot),q(\cdot)]=-\int_{t_0}^{t_1}H_{ww}(t,\widehat{x}(t),\widehat{u}(t),p(t))[q(t),q(t)]\,dt\ge 0 \tag{7}$$

в предположении, что соответствующие производные существуют и что U — открытое множество в соотношениях (5) и (7).

Обозначим через $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u})$, $\Lambda_m(\widehat{x},\widehat{u})$ и $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u},q)$ множества ненулевых функций $p(\cdot)$, удовлетворяющих условиям (4), (5), условиям (4), (6) и условиям (4), (6), (7) соответственно.

Теорема 1. *Если* $\Lambda(\widehat{x},\widehat{u})=\varnothing$, *то динамическая система* (1) *слабо локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Теорема 2. *Если* $\Lambda_m(\widehat{x},\widehat{u})=\varnothing$, *то динамическая система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))$.

Оба результата можно считать известными. Первый (но в других терминах) содержится в [1]. Второй можно извлечь из принципа максимума для системы (1), полученного в [2]. Из этих теорем в силу определения и предложения следуют соответственно классические уравнения Эйлера–Лагранжа и принцип максимума Понтрягина для задачи (2).

Нас интересует ситуация, когда не выполнены условия теоремы 1 и/или теоремы 2. Введем пространство

$$K(\widehat{x},\widehat{u})=\bigl\{q=q(\cdot)=(h(\cdot),v(\cdot))\in AC([t_0,t_1],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([t_0,t_1],\mathbb{R}^m)\colon \\ \dot{h}(t)=\widehat{\varphi}_x(t)h(t)+\widehat{\varphi}_u(t)v(t),\ h(t_0)=h(t_1)=0\bigr\}.$$

Теорема 3. *Если существует такое* $q \in K(\widehat{x}, \widehat{u})$, *что* $\Lambda(\widehat{x}, \widehat{u}, q) = \varnothing$, *то система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Отсюда в силу определения и предложения получаем необходимые условия сильного минимума второго порядка для задачи (2). Ранее они были получены в [3], но в случае, когда $\widehat{u}(\cdot)$ — кусочно непрерывная функция.

Развивая определение анормальности, данное Блиссом в [4], скажем, что динамическая система (1) относительно процесса $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ имеет *порядок анормальности* $k \in \mathbb{N}$, если размерность линейной оболочки выпуклого конуса $\Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ равна k.

Назовем процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *особым*, если конус $\Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \cup \{0\}$ не является острым.

Следующее утверждение, которое сразу следует из теоремы 3, удобно для приложений.

Следствие. *Пусть динамическая система* (1) *относительно неособого процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *имеет порядок анормальности* 1 *и* $p(\cdot) \in \in \Lambda_m(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$. *Тогда если найдется элемент* $q \in K(\widehat{x}, \widehat{u})$ *такой, что* $Q(p(\cdot))[q, q] < 0$, *то система* (1) *локально управляема относительно процесса* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$.

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = u^2 - x_1^2, \qquad u(t) \in \mathbb{R} \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Легко проверить, что $\Lambda_m(0,0) = \{p(\cdot) = (0, \alpha) \colon \alpha \le 0\}$ и $Q(p(\cdot))[q, q] = = -2\alpha \int_0^T (\dot{h}_1^2(t) - h_1^2(t))\, dt$ для любого $q = ((h_1(\cdot), h_2(\cdot)), v(\cdot))$. Таким образом, данная система относительно неособого процесса $(0, 0)$ имеет порядок анормальности 1 и в случае, если $T > \pi$, она согласно следствию локальна управляема относительно данного процесса.

Список литературы

1. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
2. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. *Osmolovskii N.P., Maurer H.* Applications to regular and bang-bang control second-order necessary and sufficient optimality conditions in calculus of variations and optimal control. Philadelphia, PA: SIAM, 2012.
4. *Блисс Дж.* Лекции по вариационному исчислению. М.: ИЛ, 1950.