Гамильтоновы системы в решении краевых задач с фазовыми ограничениями для уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана (Hamiltonian systems in solutions of boundary problems with state constraints for Hamilton–Jacobi–Bellman equations)*

Н. Н. Субботина (N. N. Subbotina)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

subb@uran.ru

Как известно, многие практические задачи приводят к необходимости рассмотрения уравнений в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби–Беллмана в подобластях фазового пространства, определяемых заданными фазовыми ограничениями [1]. При этом, как правило, решение понимается в обобщенном смысле. Оно известно на начальном многообразии, представляющем собой часть границы рассматриваемой подобласти, и требуется определить его внутри области фазовых ограничений и на оставшейся части границы. Основным инструментом в конструировании решений таких задач являются обобщения метода Коши, опирающегося на “фазовые и сопряженные характеристики” задачи, т.е. на решения гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями на границе заданных фазовых ограничений. Существенную роль в этих построениях играют вспомогательные задачи управления нелинейными системами в классе обобщенных управлений [2] и необходимое условие оптимальности — принцип максимума Л.С. Понтрягина [3].

В докладе представлены исследования краевой задачи с фазовыми ограничениями для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, возникающей в молекулярной биологии для модели Кроу–Кимуры генетической эволюции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \tag{1}$$

где гамильтониан $H(\cdot)$ имеет вид

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00074).

$$H(x,p) = -f(x) + 1 - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p}. \tag{2}$$

Функция $f(\cdot)$ в (2) задана и называется фитнесом. Уравнение (1) рассматривается в полосе $\Pi = \{(t,x)\colon t \geq 0,\ -1 \leq x \leq 1\}$. Задано начальное условие

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [-1,1]. \tag{3}$$

В современной теории уравнений Гамильтона–Якоби известны две эквивалентные концепции обобщенного решения: минимаксного [4] и вязкостного [5], опирающиеся на аппарат и методы негладкого анализа. Однако понятие минимаксного решения не вводилось для задач с фазовыми ограничениями. Вязкостные решения были определены и для задач с фазовыми ограничениями, но они вводились в предположении коэрцитивности гамильтониана, а в данной задаче гамильтониан некоэрцитивен при $x = \pm 1$.

Поэтому введено следующее оригинальное определение непрерывного решения рассматриваемой задачи, где $\Pi = (0,\infty) \times (-1,1)$.

Определение 1. Непрерывная функция $u(\cdot)\colon \overline{\Pi} \to R$ называется обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет начальному условию (3) и справедливы следующие соотношения:

$$a + H(x,s) \leq 0 \qquad \forall\,(a,s) \in D^{+}u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Pi, \tag{4}$$

$$a + H(x,s) \geq 0 \qquad \forall\,(a,s) \in D^{-}u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Pi, \tag{5}$$

$$a + H(x,s) \geq 0, \qquad \forall\,(a,s) \in D^{-}u(t,x) \cap \partial u(t,x), \quad \forall\,(t,x) \in \Gamma_T. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma_T = \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x = 1\} \cup \{(t,x) \mid 0 < t < T,\ x = -1\}$,

$$D^{-}u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \liminf_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in\overline{\Pi}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right\},$$

$$D^{+}u(t,x) = \left\{ (a,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; \limsup_{\substack{(\tau,y)\to(t,x)\\(\tau,y)\in\overline{\Pi}}} \frac{u(\tau,y) - u(t,x) - a(\tau - t) - s(y-x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right\},$$

$$\partial u(t,x) = \mathrm{co}\biggl\{ (a,s) = \lim_{i\to\infty}\biggl(\frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial t}, \frac{\partial u(t_i,x_i)}{\partial x}\biggr),$$
$$(t_i,x_i)\to(t,x) \text{ при } i\to\infty,\ (t_i,x_i)\in\overline{\Pi}\cap\mathrm{Dif}(u)\biggr\},$$

символом $\mathrm{Dif}(u)$ обозначено множество всех точек дифференцируемости функции $u(\cdot)\in C(\overline{\Pi})$, символ co обозначает выпуклую оболочку.

Характеристическая (гамильтонова) система для задачи (1)–(3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x,p) = -(1+x)e^{2p} + (1-x)e^{-2p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x,p) = f'(x) + \frac{e^{2p}-e^{-2p}}{2}, \\ \dot{z} &= pH_p(x,p) - H(x,p) = p\dot{x} + q \end{aligned} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$x(0,y) = y, \quad p(0,y) = u_0'(y), \quad z(0,y) = u_0(y), \qquad y\in[-1,1]. \tag{8}$$

На базе решений гамильтоновой системы получены достаточные условия существования обобщенного решения и предложен алгоритм его построения, аналогичный конструкции из работы [6], где обобщенное решение строится в компактной области.

Предложение. *Пусть в рассматриваемой задаче* (1)–(3) *выполняются следующие условия*:

- *функции* $f(\cdot)$, $u_0(\cdot)$ *непрерывно дифференцируемы*;
- *для решений* $x(t,y)$ *гамильтоновой системы* (7), (8) *справедливы при всех* $t\geq 0$ *соотношения*
$$x(t,+1)\geq x(t,y)\geq x(t,-1) \qquad \forall\, y\in[-1,+1];$$
- $u_0'(+1)<0,\ u_0'(-1)>0$;
- *производная* $f'(\cdot)=\partial f(\cdot)/\partial x\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ *определена, непрерывна, монотонно не возрастает и удовлетворяет неравенствам*
$$2f'(1)+e^{2u_0'(1)} < e^{-2u_0'(1)}, \qquad -2f'(-1)+e^{-2u_0'(-1)} < e^{2u_0'(-1)}.$$

Тогда существует обобщенное решение задачи (1)–(3) *в неограниченной полосе* $\overline{\Pi}$, *причем в подобласти*

$$G_0 = \{(t,x)\colon\ t\geq 0,\ x\in[x(t,-1),x(t,+1)]\}$$

это решение имеет вид

$$u(t,x) = \max_{x(t,y)=x} \left[\int_0^t \big(p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau)) \big)\, d\tau + u_0(y) \right], \quad (9)$$

где $x(\tau) = x(\tau, y)$, $p(\tau) = p(\tau, y)$ *— решения системы* (7), (8).

Обсуждаются связи построенного обобщенного решения с минимаксным и вязкостным. Приведены иллюстрационные примеры.

Список литературы

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1975.
3. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.
5. *Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.L.* Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Amer. Math. Sos. 1990. V. 318, N 2. P. 643–683.
6. *Субботина Н.Н., Шагалова Л.Г.* О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 220–235.

Непрерывные выборки в задачах минимизации (Continuous selections in minimum problems)*

И. Г. Царьков (I. G. Tsar'kov)

МГУ, Москва, Россия

tsar@mech.math.msu.su

В работе изучаются задачи существования непрерывных выборок в задачах точной и приближенной минимизации возмущенного однородного выпуклого функционала (а также функционалов более общего вида) на некотором подмножестве M банахова пространства. Устанавли-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00295-а).