

OPTIMIZATION OF STATIONARY SOLUTIONS IN POPULATION DYNAMICS*

Alexey Davydov

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; NITU “MISIS”,
Moscow, Russia; Vladimir State University, Vladimir, Russia*

davydov@vlsu.ru

In many examples, population dynamics under a given stationary exploitation mode converges to some stationary state. This effect could be observed even in the simplest case of logistic model [1]. But for models with more complicated dynamics, for example, for those that take into account some population structure or a nonlinear law for the appearance of new generation, or else some other natural processes in population dynamics, such a convergence could be non-obvious and needs justification (see, e.g., [2, 3]).

We consider integro-differential nonlinear models for the dynamics of an exploited population that are advanced generalizations of the McKendrick–von Foerster model [4]. For these models we prove the existence of a nontrivial stationary solution for a given (also stationary) exploitation mode and show the existence of such a mode which provides the maximum profit over all admissible modes on some of the respective stationary solutions [5, 6]. The illustrating numerical examples are also presented.

References

1. *Arnold V.I.* “Hard” and “Soft” Mathematical Models. Moscow: MCCME, 2004 (in Russian).
2. *Calsina A., Saldana J.* Asymptotic behaviour of a model of hierarchically structured population dynamics // *J. Math. Biol.* 1997. V. 35. P. 967–987.
3. *Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.V.* Optimal cyclic exploitation of renewable resources // *J. Dyn. Control Syst.* 2015, V. 21, N 3. P. 475–494. DOI:10.1007/s10883-015-9271-x.
4. *Murray J.D.* Mathematical Biology: An Introduction. 3rd ed. New York: Springer, 2002. (Interdiscip. Appl. Math.; V. 17.)
5. *Panesh A.A., Platov A.S.* Optimization of size-structured population with interacting species // *J. Math. Sci.* 2013. V. 188, N 3. P. 293–298.

*The work is supported in part by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 1.638.2016/FPM) and by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-08075a).

6. *Davydov A.A., Nassar A.F.* On the uniqueness of a positive stationary state in the dynamics of a population with asymmetric competition // Proc. Steklov Inst. Math. 2015. V. 291. P. 78–86.

О ДВУХ ПОДХОДАХ К НЕОБХОДИМЫМ УСЛОВИЯМ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ
(ON TWO APPROACHES TO NECESSARY CONDITIONS
IN STATE-CONSTRAINED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS)*

**А. В. Дмитриук (A. V. Dmitruk),
И. А. Самыловский (I. A. Samylovskiy)**

*ЦЭМИ РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
dmitruk@member.ams.org, ivan.samylovskiy@cs.msu.ru*

В докладе показано, что в определенных классах задач на основе подхода Р.В. Гамкрелидзе [1], состоящего в дифференцировании фазового ограничения вдоль отрезка выхода на фазовую границу, можно получить условия стационарности в форме Дубовицкого–Милютина [2], включая условия знакоопределенности множителя при фазовом ограничении и скачков сопряженной переменной в точках посадки на фазу.

Рассматривается следующий базовый класс задач:

$$\mathbf{A:} \quad \begin{cases} \dot{z} = f(z, x, u), & J_A = J(z(0), z(T), x(0), x(T)) \rightarrow \min, \\ \dot{x} = g(z, x, u), & \varphi_s(u(t)) \leq 0, \quad s = 1, \dots, \nu, \quad x(t) \geq 0, \end{cases}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}$ — фазовые переменные, $u \in \mathbb{R}^m$ — управление.

Исследуется процесс $w^0 = (z^0, x^0, u^0)$ такой, что траектория $x^0(t)$ выходит на фазовую границу на некотором отрезке $[t_1^0, t_2^0] \subset [0, T]$, т.е. $x^0(t) > 0$ на $[0, t_1^0)$, $x^0(t) = 0$ на $[t_1^0, t_2^0]$ и $x^0(t) > 0$ на $(t_2^0, T]$. Кроме того, пусть u^0 непрерывна на $\Delta_1 = [0, t_1^0]$, $\Delta_3 = [t_2^0, T]$ и липшицева на $\Delta_2 = [t_1^0, t_2^0]$, причем $\varphi_s(u^0(t)) < 0$ на Δ_2 для всех s и посадка траектории на фазовую границу и сход с нее происходят с ненулевой производной.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00585).