Циклическая динамика и оптимальные положения равновесия в управляемой модели бизнес-цикла Н. Калдора (Cyclic dynamics and optimal steady states in the controlled Kaldor model)

А. С. Асеев (A. S. Aseev)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

anton.ser.as@gmail.com

Рассмотрим следующую модифицированную модель бизнес-цикла Н. Калдора [1–3]:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \alpha\big[I(Y(t),K(t)) - S(Y(t))\big], \\ \dot{K}(t) = I(Y(t),K(t)) - \delta K(t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов. Будем считать, что функции инвестиций $I(Y,K)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, и сбережений $S(Y)$, $Y \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y,K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при} \quad K \leq I(Y)/\beta, \\ 0 & \text{при} \quad K > I(Y)/\beta, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y, \tag{2}$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$ и $I\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ — такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y\to\infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $Y_1 > 0$, что $I''(Y) > 0$, если $Y < Y_1$, и $I''(Y) < 0$, если $Y > Y_1$.

При функциях инвестиций $I(Y,K)$ и сбережений $S(Y)$, заданных условиями (2), система (1) отличается от оригинальной модели Калдора [2].

Доказательство следующего результата см. в [4].

Теорема 1. *Для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $0 < \gamma < 1$ прямоугольник $\widetilde{G} = \{(Y,K)\colon 0 \leq Y \leq \widetilde{Y},\ 0 \leq K \leq I_\infty/\beta\}$, где $\widetilde{Y}$ — любое число, не* *меньшее чем максимальный корень уравнения* $\gamma Y = I(Y)$, *является инвариантным относительно системы* (1). *Кроме того, для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая замкнутая непрерывная кривая без самопересечений* Γ_ε, *лежащая в прямоугольнике* $\widetilde{G}$ *и отстоящая от его границы не более чем на* ε, *что на кривой* Γ_ε *векторное поле системы* (1) *направлено строго внутрь ограниченного этой кривой множества.*

В общем случае система (1) может иметь от одного до трех положений равновесия, которые могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. При определенном подборе функций $I(Y,K)$ и $S(Y)$ система (1) может демонстрировать циклическую динамику (см. [1–4]), что можно интерпретировать как возникающие в экономике циклы экономического подъема с последующими спадами (т.е. кризисами).

Введем в модифицированную модель Калдора (1) новую функцию сбережений $S(Y,u) = \gamma(1-u)Y$, $u \in [0,1]$. Управляющий параметр $u \in [0,1]$ характеризует увеличение потребления на величину γuY.

Используя новую функцию сбережений, приходим к следующей *управляемой модели Калдора*:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = \alpha\big[I(Y(t)) - \beta K(t) - \gamma(1-u(t))Y(t)\big], \\ \dot{K}(t) = I(Y(t)) - (\beta+\delta)K(t). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь управление $u\colon [0,\infty) \mapsto [0,1]$ — произвольная измеримая функция.

Выясним, при каких значениях $Y > 0$ существует такая обратная связь $u(Y)$, что при ее подстановке вместо $u(t)$ в системе (3) имеются положения равновесия. Приравняв к нулю оба уравнения системы (3), получаем $u(Y) = 1 - \delta I(Y)/((\beta+\delta)\gamma Y)$. Допустимое управление должно удовлетворять ограничению $u(Y) \in [0,1]$. Следовательно, для любого $\widehat{Y} > 0$, удовлетворяющего неравенству $Y \geqslant \delta I(Y)/((\beta+\delta)\gamma)$, соответствующее управление $u(t) \equiv u(\widehat{Y})$ реализует состояние равновесия $(\widehat{Y}, \widehat{K})$, где $\widehat{K} = K(\widehat{Y}) = I(\widehat{Y})/(\beta+\delta)$, в управляемой модели Калдора.

Стоимость реализации управления $u \in [0,1]$ будем моделировать при помощи квадратичной функции $\varphi(Y,u) = \omega(\gamma uY)^2/2$, $\omega > 0$ (см. [5]), а в качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y,u)$ будем рассматривать величину национального дохода с учетом стоимости реализации соответствующей стимулирующей политики, т.е. положим $\Phi(Y,u) = Y - \varphi(Y,u)$.

Для нахождения оптимального стационарного режима $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, максимизирующего величину $\Phi(Y, u(Y))$ в управляемой модели Калдора, необходимо решить следующую задачу (Q):

$$\Phi(Y, u(Y)) = Y - \varphi(Y, u(Y)) \to \max, \qquad Y \geqslant \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}.$$

Теорема 2. *Для любых допустимых значений параметров управляемой модели Калдора существует решение Y_* задачи (Q). Это решение Y_* является корнем уравнения $\frac{d}{dY}\Phi(Y, u(Y)) = 0$. Решение Y_* больше максимального корня Y_2 уравнения $Y = \delta I(Y)/((\beta+\delta)\gamma)$. Если $Y_1 \leq Y_2$, где Y_1 — корень уравнения $I''(Y) = 0$, то данное решение Y_* единственно.*

Для численного моделирования положим $\omega = 1$ и будем использовать значения параметров и логистическую функцию инвестиций $I(Y)$ из [6]. Именно, положим $\alpha = 2.2$, $\beta = 0.6$, $\delta = 0.5$, $\gamma = 0.5$ и

$$I(Y) = \frac{1}{a + e^{-b(Y-c)}} + d, \qquad a = 1, \quad b = 4.2, \quad c = 1, \quad d = 0.6. \tag{4}$$

Отметим, что при выбранных значениях параметров в неуправляемой модели Калдора существует предельных цикл (см. [4, 6]).

Для нахождения оптимального стационарного режима $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, решая численно уравнение $\frac{d}{dY}\Phi(Y, u(Y)) = 0$, найдем его единственный корень $Y_* = 5.454545561$ и соответствующие значения

$$K_* = K(Y_*) = 1.454545448, \qquad u(Y_*) = 0.733333397$$

и $\Phi(Y_*, u(Y_*)) = 3.4545449$. Для определения типа положения равновесия (Y_*, K_*) рассмотрим соответствующую матрицу Якоби

$$J(Y_*, K_*) = \begin{pmatrix} \alpha(I'(Y_*) - \gamma(1 - u(Y_*))) & -\alpha\beta \\ I'(Y_*) & -\beta-\delta \end{pmatrix}.$$

Подставив выбранную функцию инвестиций $I(Y)$, получаем

$$J(Y_*, K_*) = \begin{pmatrix} \alpha\left(\dfrac{be^{(-b(Y_*-c))}}{(a+e^{(-b(Y_*-c))})^2} - \gamma(1-u(Y_*))\right) & -\alpha\beta \\ \dfrac{be^{(-b(Y_*-c))}}{(a+e^{(-b(Y_*-c))})^2} & -\beta-\delta \end{pmatrix}.$$

Подставив значения параметров, находим

$$J(Y_*, K_*) = \begin{pmatrix} -0.2933332572 & -1.32 \\ 0.3147705942 \cdot 10^{-7} & -1.1 \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение $\det(J(Y_*, K_*) - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица, находим собственные значения $\lambda_1 = -0.2933333087$, $\lambda_2 = -1.099999948$. Следовательно, найденное положение равновесия — устойчивый узел.

Таким образом, при выбранных значениях параметров и функции инвестиций $I(Y)$ (см. (4)) в системе (3) существует единственный оптимальный стационарный режим $(Y_*, K_*, u(Y_*))$. Отметим, что найденное оптимальное положение равновесия (Y_*, K_*) устойчиво, а соответствующее ему значение мгновенной полезности $\Phi(Y_*, u(Y_*))$ больше, чем при неуправляемом циклическом движении.

Список литературы

1. *Chang W.W., Smyth D.J.* The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38, N 1. P. 37–44.
2. *Kaldor N.* A model of trade cycle // Econ. J. 1940. V. 50, N 197. P. 78–92.
3. *Lorenz H.-W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. New York: Springer, 1993.
4. *Асеев А.С.* Существование периодической траектории в модифицированной модели Калдора // Молодой ученый. 2017. №1. С. 103–108.
5. *Weitzman M.J.* Income, wealth, and the maximum principle, London: Harvard Univ. Press, 2003.
6. *Рязанова Т.В.* Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления в моделях экономической динамики: Отчет о научно-исследовательской работе. Екатеринбург: УрФУ, 2013.