Задача управления квадрокоптером при наличии помех (The problem of controlling the quadrocopter in the presence of interference)*

В. П. Горьков (V. P. Gor'kov), Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko), А. Е. Румянцев (A. E. Rumyantsev)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

v-p-gorkov@yandex.ru, grigor@cs.msu.su, rumiantcev@yandex.ru

Рассматривается движение вектора (x, y, z, θ, ϕ) при воздействии вектора управляющих параметров $u = (u_1, u_2, u_3)$ и вектора помехи $v = (v_1, v_2, v_3)$, подчиняющееся уравнениям [1, 2]

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -u_1(t)v_1(t)\sin\theta(t), \quad \ddot{\theta}(t) = u_2(t)v_2(t), \\ m\ddot{y}(t) = u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\sin\phi(t), \quad \ddot{\phi}(t) = u_3(t)v_3(t), \\ m\ddot{z}(t) = u_1(t)v_1(t)\cos\theta(t)\cos\phi(t) - mg, \end{cases} \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $v_i(t) \in [\sigma_i, 1]$, $0 < \sigma_i \le 1$, $i = 1, 2, 3$, — параметр помехи, измеримая по Лебегу функция, $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции, $0 \le u_1 \le \rho_1$, $|u_j| \le \rho_j$, $j = 2, 3$, где m, g, σ_i, ρ_j — положительные константы. Заданы начальное положение системы (1): $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $\phi(0) = \phi_0$,

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0, \tag{2}$$

и конечное положение: $x(T) = 0$, $y(T) = 0$, $z(T) = z_T$, $\theta(T) = 0$,

$$\phi(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad \dot{y}(T) = 0, \quad \dot{z}(T) = 0, \quad \dot{\theta}(T) = 0, \quad \dot{\phi}(T) = 0, \tag{3}$$

где T — конечный нефиксированный момент времени. Соотношения (1)–(3) определяют дифференциальную игру управляющего игрока, распоряжающегося выбором управлений u_i, $i = 0, 1, 2$, при наличии вектора помехи $v = (v_1, v_2, v_3)$ [2, 3]. Целью управляющего игрока является приведение фазового вектора системы в ℓ-окрестность конечного положения (3) при любой допустимой помехе. Для достижения своей цели

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 14-11-539).

управляющий игрок располагает информацией об уравнениях игры (1), краевых условиях (2), (3) и в каждый момент времени t информацией о функциях $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, $\theta(s)$, $\varphi(s)$, $s \in [0,t]$, и их производных.

Задача терминального управления при наличии помехи состоит в нахождении для краевых условий (2), (3) параметров T, ρ_j, σ_j, $j = 1,2,3$, $\ell > 0$, для которых существует управление $u = (u_1, u_2, u_3)$ в классе позиционных управлений [2], переводящее систему (1) из положения (2) в ℓ-окрестность конечного положения (3) за время T при любой допустимой реализации помехи, и построении такого управления u.

Рассмотрим вспомогательную управляемую систему

$$\begin{cases} m\ddot{w}_1(t) = -\alpha_1(t)\sin w_4(t), \quad \ddot{w}_4(t) = \alpha_2(t), \\ m\ddot{w}_2(t) = \alpha_1(t)\cos w_4(t)\sin w_5(t), \quad \ddot{w}_5(t) = \alpha_3(t), \\ m\ddot{w}_3(t) = \alpha_1(t)\cos w_4(t)\cos w_5(t) - mg, \end{cases} \tag{4}$$

где $w_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1,\ldots,5$, $t \in [0,T]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции t, $0 \le \alpha_1 \le \rho_1\sigma_1$, $|\alpha_i| \le \rho_i\sigma_i$, $i = 2,3$, где положительные константы σ_j, ρ_j, $j = 1,2,3$, определены ранее. Положим $w = (w_1, \dot{w}_1, \ldots, w_5, \dot{w}_5)$, $w(0) = (w_1(0), \dot{w}_1(0), \ldots, w_5(0), \dot{w}_5(0)) = (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}(0), z_0, \dot{z}_0, \theta_0, \dot{\theta}_0, \phi_0, \dot{\phi}_0)$, $w(T) = (w_1(T), \dot{w}_1(T), \ldots, w_5(T), \dot{w}_5(T)) = (0,0,0,0,z_T,0,0,0,0,0)$. Выберем α_1, α_2, α_3 в следующем виде [1]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{r_1 + mg}{\cos\sigma_{l_1}(w_4)\cos\sigma_{l_1}(w_5)}, \\ \alpha_2 &= -\sigma_{\beta_1}\Big(\dot{w}_4 + \sigma_{\beta_2}\Big(w_4 + \dot{w}_4 + \\ &\quad + \sigma_{\beta_3}\Big(2w_4 + \dot{w}_4 - \frac{\dot{w}_1}{g} + \sigma_{\beta_4}\Big(3w_4 + \dot{w}_4 - \frac{\dot{w}_1}{g} - \frac{w_1}{g}\Big)\Big)\Big)\Big), \\ \alpha_3 &= -\sigma_{\gamma_1}\Big(\dot{w}_5 + \sigma_{\gamma_2}\Big(w_5 + \dot{w}_5 + \\ &\quad + \sigma_{\gamma_3}\Big(2w_5 + \dot{w}_5 + \frac{\dot{w}_2}{g} + \sigma_{\gamma_4}\Big(3w_5 + \dot{w}_5 + \frac{\dot{w}_2}{g} + \frac{w_2}{g}\Big)\Big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

где $r_1 = -a_{z_1}\dot{w}_3 - a_{z_2}(w_3 - z_T)$, a_{z_1}, a_{z_2} — положительные константы,

$$\sigma_\eta(\xi) = \begin{cases} -\eta, & \text{если } \xi < -\eta, \\ \xi, & \text{если } -\eta \le \xi \le \eta, \\ \eta, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

Лемма. *Управления* α_i, $i = 1, 2, 3$, *гарантируют приведение фазового вектора системы* (4) *в окрестность целевой точки* (3) *из начального положения* (2), *если выполнены следующие соотношения*: $\rho_1\sigma_1 > 4(2|z'(0)| + |z'(0) + 2z(0)|)$, $\rho_2\sigma_2 > \beta_1$, $\beta_1/2 > \beta_2$, $\beta_2/2 > \beta_3$, $\beta_3/2 > \beta_4$, $\rho_3\sigma_3 > \gamma_1$, $\gamma_1/2 > \gamma_2$, $\gamma_2/2 > \gamma_3$, $\gamma_3/2 > \gamma_4$, $\ell_1 = 1/2$.

Запишем систему (1) в форме уравнений, разрешенных относительно производных:

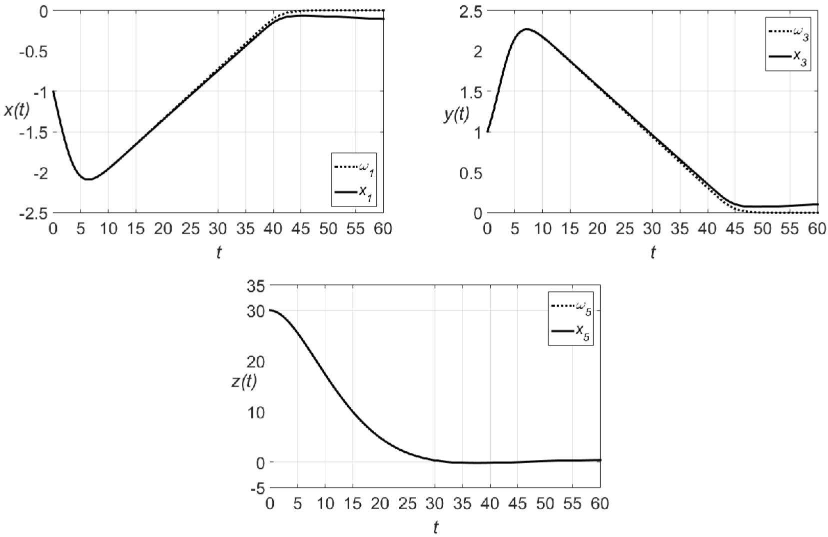
$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \quad m\dot{x_2} = -u_1 v_1 \sin(\theta_1), \\ \dot{y_1} = y_2, \quad m\dot{y_2} = u_1 v_1 \cos(\theta_1)\sin(\phi_1), \\ \dot{z_1} = z_2, \quad m\dot{z_2} = u_1 v_1 \cos(\theta_1)\cos(\phi_1) - mg, \\ \dot{\theta_1} = \theta_2, \quad \dot{\theta_2} = u_2 v_2. \\ \dot{\phi_1} = \phi_2, \quad \dot{\phi_2} = u_3 v_3. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\eta = (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$, $f(t, \eta, u, v)$ — правая часть системы уравнений (5), $u = (u_1, u_2, u_3)$, $V = \{v = (v_1, v_2, v_3)\colon v_i \in [\sigma_i, 1]\}$, $U = \{u = (u_1, u_2, u_3)\colon u_1 \in [0, \rho_1],\ |u_j| \leq \rho_j,\ j = 2, 3\}$. Для системы (5) выполнено условие седловой точки в маленькой игре [2, 4]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N$, где для всех i выполнено условие $\tau_{i+1} - \tau_i \leq \delta$ при достаточно малом δ. Для построения позиционного управления в игровой задаче (1) воспользуемся методом управления со вспомогательной системой [2, 4], где в качестве вспомогательной системы будет выступать система (4). Управление u в системе (5) выберем постоянным для $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$ по схеме экстремального прицеливания [2] из условия

$$\max_{v\in V}\big\langle(\eta(\tau_i) - w(\tau_i)), f\big(\tau_i, \eta(\tau_i), u^{(i)}, v\big)\big\rangle = \\ = \min_{u\in U}\max_{v\in V}\big\langle(\eta(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, \eta(\tau_i), u, v)\big\rangle, \tag{6}$$

а в управление помехи v подставим реализовавшуюся в этот момент помеху. Согласно лемме 2.8.1 из [4, с. 103] в момент прихода траектории $w(t)$ (4) в ℓ-окрестность конечной позиции фазовый вектор $\eta(t)$ системы (5) окажется в $(\ell+\varepsilon)$-окрестности целевой точки, где ε — малая положительная величина.

Теорема. *При выполнении соотношений на параметры процесса* (1), *приведенных в лемме, существуют позиционное управление* $\bar{u}(t, \eta(t))$ *и момент времени* $T > 0$ *такие, что применение управления* u, *выбранного из условия* (6), *гарантирует приведение траектории*



системы (5) *из положения* (2) *в* ℓ*-окрестность точки* (3) *в момент* T *при любой допустимой помехе.*

На рисунке приведены результаты численного расчета траекторий системы (1) для краевых условий $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = -0.3$, $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = 0$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0.2$, $y(T) = 0$, $\dot{y}(T) = 0$, $z(0) = 30$, $\dot{z}(0) = 0$, $z(T) = 0.5$, $\dot{z}(T) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(T) = 0$, $\dot{\theta}(T) = 0$, $\phi(0) = 0.1$, $\dot{\phi}(0) = 0.1$, $\phi(T) = 0$, $\dot{\phi}(T) = 0$, параметров $\rho_2 = 0.6$, $\rho_3 = 0.6$, $\ell = 0.1$, $\rho_1 = 1.35$, $\sigma_i = 0.82$, $i = 1, 2, 3$, $T = 60$. Параметры помехи соответствуют функции $v_i(t) = \cos(\xi_i(t))$, $i = 1, 2, 3$, $|\xi_i(t)| \leq 0.57$.

Список литературы

1. *Castillo P., Lozano R., Dzul A.E.* Modelling and control of mini-flying machines. London: Springer, 2005.
2. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
3. *Осипов Ю.С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // УМН. 2006. Т. 61, №4. С. 25–76.
4. *Субботин А.И. Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.