Управление полным током и положением границы плазмы в установках TOKAMAK (Plasma current and boundary position control in TOKAMAK)*

А. А. Лукьяница (A. A. Luk'yanitsa)

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

luk@ic.msu.su

Управление эволюцией плазмы является одной из важнейших проблем термоядерного синтеза. В качестве системы, описывающей эволюцию плазмы в установках TOKAMAK, нами использовалась самосогласованная модель, реализованная численным кодом SCoPE [1]. Для управления границей плазмы нужно правильно подобрать токи в катушках полоидального магнитного поля, а для управления полным током — ток в соленоиде. Задача управления описывается следующим разностным уравнением

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \\ x_0 = x_{\mathrm{init}}, \end{cases} \tag{1}$$

которое получается путем линеаризации уравнений эволюции равновесия плазмы относительно вектора x_t, компонентами которого являются отклонения величины тока и положения границы от требуемых. Здесь A и B — квадратные матрицы размером соответственно $n \times n$ и $m \times m$, $x_t \in \mathbb{R}^n$ — вектор набора контролируемых переменных, а $u_t \in \mathbb{R}^m$ — управление. Для управления системой, описываемой (1), хорошо зарекомендовал себя контроллер LQR (Linear–Quadratic Regulator) [2], который позволяет построить последовательность векторов управления u_t на основе минимизации следующего функционала:

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{N} \bigl(x_t^{\mathrm{T}} Q x_t + u_t^{\mathrm{T}} R u_t\bigr),$$

где $Q = qI$ и $R = rI$ — диагональные матрицы, а N — число шагов управления. На каждом относительно малом промежутке времени мо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке программ фундаментальных исследований Президиума РАН № 43 и № 17.

дель плазмы можно считать квазистационарной и свести поиск управления к поиску матрицы усиления K:

$$u_t = -Kx_t,$$

где

$$K = (R + B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA,$$

а матрица P получается из решения дискретного алгебраического уравнения Риккати

$$P = Q + A^{\mathrm{T}}PA - A^{\mathrm{T}}PB(R + B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}PA.$$

При длительной продолжительности разряда погрешность от замены уравнений эволюции равновесия линеаризованными уравнениями (1) может привести к нарушению устойчивости разряда. Для снижения этого эффекта нами был предложен метод адаптивной подстройки коэффициентов системы (1) в процессе управления, суть которого заключается в следующем. Пусть к шагу по времени M нами было построено управление $u_1, \ldots, u_M$, по которому был получен набор управляемых параметров $x_1, \ldots, x_M$. Для более точного определения коэффициентов уравнения (1), которые мы обозначим через $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, воспользуемся методом наименьших квадратов, введя следующий квадратичный функционал:

$$\Psi(\widehat{A}, \widehat{B}) = \sum_{m=1}^{M} \left(\widehat{A}x_{m-1} + \widehat{B}u_{m-1} - x_m\right)^2. \tag{2}$$

Продифференцировав (2) по $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ и приравняв производные к нулю, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C\widehat{A} + D\widehat{B} = V, \\ D\widehat{A} + G\widehat{B} = W, \end{cases} \tag{3}$$

которая может быть легко разрешена относительно $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ методом исключения Гаусса. Здесь были введены следующие обозначения:

$$C = \sum_{m=1}^{M} x_{m-1}^2, \qquad D = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}x_{m-1}, \qquad G = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}^2,$$

$$V = \sum_{m=1}^{M} x_{m-1}x_m, \qquad W = \sum_{m=1}^{M} u_{m-1}x_m.$$

Теперь при вычислении очередных управлений вместо матриц A и B используются линейные комбинации $\alpha A + (1-\alpha)\widehat{A}$ и $\alpha B + (1-\alpha)\widehat{B}$. Для параметра α, как правило, использовалось значение $\alpha = 0.5$.

Предложенный метод позволил получать решение даже в тех случаях, с которыми не справлялись подпрограммы из обычно применяемой для этих целей библиотеки SLICOT, основанной на известных библиотеках численных алгоритмов BLAS и LAPACK. С помощью разработанного метода были построены оптимальные управления для TOKAMAKов с параметрами установок MAST, T-15 и строящегося международного реактора-токамака ITER. В частности, для установки T-15 время удержания плазмы превысило в полтора раза время, достигаемое путем управления с помощью градиентного метода.

Список литературы

1. *Зайцев Ф.С.* Математическое моделирование эволюции тороидальной плазмы. М.: МАКС Пресс, 2011.
2. *Kwakernaak H., Sivan R.* Linear optimal control systems. New York: Wiley-Intersci., 1972.

Задача терминального управления в системе с ограничением на фазовые переменные (The problem of terminal control in a system with restriction on phase variables)*

Л. Н. Лукьянова (L. N. Luk'yanova)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

lln@cs.msu.su

В работе рассматривается управляемая система [1–4]

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} = u, \qquad x, u \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \qquad x(T) = x_T \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00539).