Об алгебрах гармонических кватернионных полей в $\mathbb{R}^3$

М.И. Белишев, А.Ф. Вакуленко.

Пусть $\mathcal{A}(D)$ есть алгебра функций, непрерывных в круге $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leqslant 1\}$ и голоморфных внутри D. Как известно, множество $\mathcal{M}$ ее характеров (гомоморфизмов $\mathcal{A}(D) \to \mathbb{C}$) исчерпывается мерами Дирака $\{\delta_{z_0} \,|\, z_0 \in D\}$ и имеет место гомеоморфизм. Мы представляем 3-мерный аналог этого классического результата.

Пусть $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leqslant 1\}$. Кватернионное поле – это пара $p = \{\alpha, u\}$, состоящая из функции α и векторного поля u в шаре B. Поле p – гармоническое, если α, u непрерывны в B и соотношения $\nabla\alpha = \operatorname{rot} u$, $\operatorname{div} u = 0$ выполнены внутри B. Пространство $\mathcal{Q}(B)$ не является алгеброй относительно адекватного (поточечного кватернионного) умножения. Тем не менее, оно содержит коммутативные алгебры $\mathcal{A}_\omega(B) = \{p \in \mathcal{Q}(B) \,|\, \nabla_\omega\alpha = 0, \nabla_\omega u = 0\}$ ($\omega \in S^2$), причем каждая $\mathcal{A}_\omega(B)$ изометрически изоморфна $\mathcal{A}(D)$. Это позволяет ввести множество $\mathcal{M}^{\mathbb{H}}$ $\mathbb{H}$-значных линейных функционалов на $\mathcal{Q}(B)$ ($\mathbb{H}$-характеров), которые мультипликативны на каждой $\mathcal{A}_\omega(B)$, и доказать, что $\mathcal{M}^{\mathbb{H}} = \{\delta^{\mathbb{H}}_{x_0} \,|\, x_0 \in B\} \cong B$, где $\delta^{\mathbb{H}}_{x_0}(p) = p(x_0)$.