Устойчивость структуры разрывов
и единственность решений обобщенного уравнения Хопфа.

А.П. Чугайнова, А.Г. Куликовский

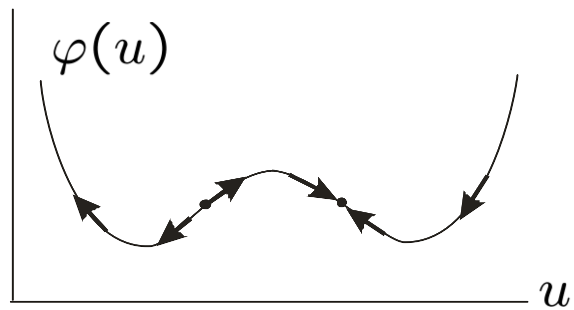
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Обобщенное уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0 \qquad u = u(x,t) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = c(u)$$

$$\varphi = u^4 - u^2$$

Непрерывные решения



$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = c(u)$$

Величина $c(u)$ определяется наклоном касательной к кривой $\varphi(u)$
Решение неопрокидывается, если $c(u)$ убывает с ростом t при $x = \mathrm{const}$
При движении по выпуклой части кривой $(\varphi'' < 0)$ направо или
по вогнутой части кривой $(\varphi'' > 0)$ налево.

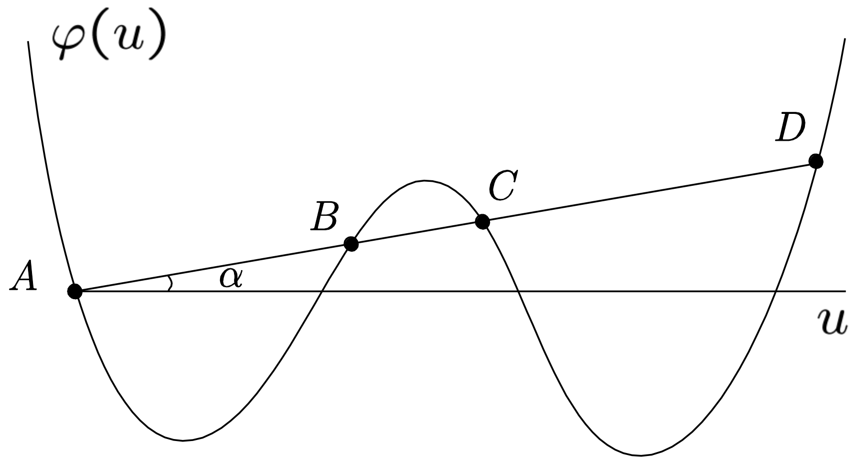
Разрывы.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0 \qquad u = u(x,t)$$

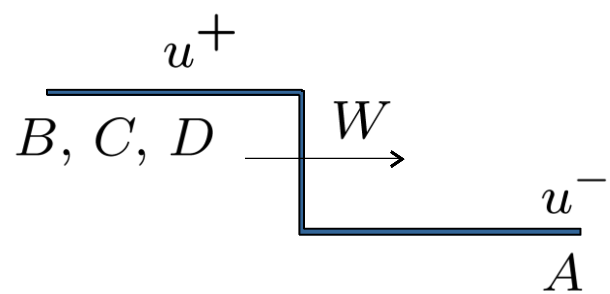
$$\varphi = u^4 - u^2$$

Соотношение на разрыве

$$W[u] = [\varphi(u)] \qquad \operatorname{tg}\alpha = W, \qquad W = \frac{[\varphi]}{[u]}$$



$$[u] = u^+ - u^-$$



Условия эволюционности.

Для обеспечения корректности решения дифференциальных систем уравнений по обе стороны от фронта разрыва необходимо выполнение ***условий эволюционности***.

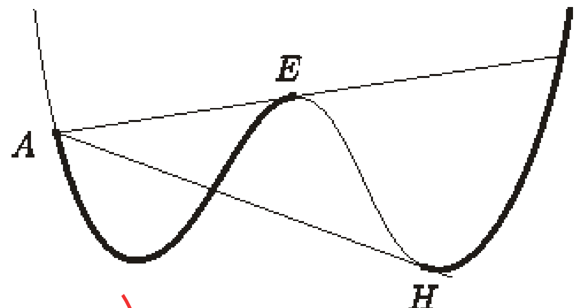
Условия эволюционности для гиперболических систем заключаются в возможности однозначно решить задачу о взаимодействии границы (поверхности разрыва) с малыми возмущениями, зависящими от *x* и *t*, в рамках линейного приближения.

Число характеристик, уходящих в обе стороны от разрыва на плоскости *x,t* должно быть на единицу меньше числа граничных условий.

Ландау, 1944 (для газ.дин.)
Лакс, 1957 (общий случай гип.с.ур.)

$$c^- < W < c^+$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = c(u) \qquad W = \frac{[\varphi]}{[u]}$$



Если на разрыве выполняется только соотношение, следующее из **закона сохранения**, то

$A \to B$ и $A \to D$ эволюционные разрывы
$A \to C$ неэволюционный разрыв

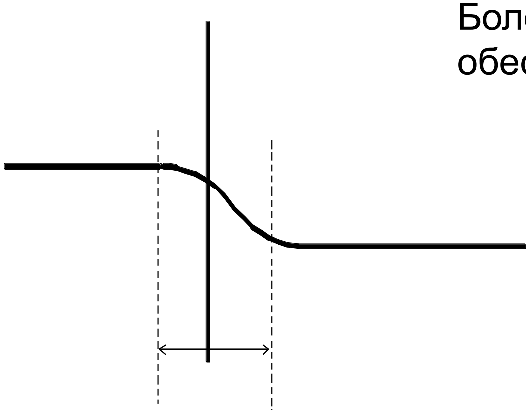
априорная эволюционность

Условия эволюционности позволяют отбросить некоторые из разрывов, удовлетворяющие законам сохранения, как нереальные (часть кривой *EH*).

Требование существования структуры разрыва.

В работах: Галин 1959, Олейник 1959, Калашников 1959, Рождественский и Яненко 1978 показано, что отбор разрывов не должен ограничиваться только условиями эволюционности. предложено использовать *требование существования структуры*.

Решения с разрывами как предел непрерывных решений усложненной модели.



Более сложные модели сред, учитывающие **физические механизмы**, обеспечивающие непрерывность изменения величин.

Для газа – уравнения теплопроводного вязкого газа Навье-Стокса или уравнения Больцмана.

Гиперболические уравнения возникают как предельные случай, когда внешний масштаб задачи много больше масштаба структуры разрыва.

Одна и та же гип.система ур. может соответствовать различным полным системам уравнений.

Для описания решений внутри переходного слоя решается задача о структуре разрыва.

Отбор по этому признаку оказывается особенно полезным в случаях, когда это приводит к устранению неединственности решения задач (Галин,1959). **Хотя, это не всегда так**.

Дополнительные соотношения на разрыве.

Все достаточно **малые** эволюционные разрывы удовлетворяют требованию существования структуры. (Годунов, Куликовский)

Конечные эволюционные разрывы могут не иметь структуры. (Годунов, Куликовский)

Дополнительные соотношения на разрыве – условия обеспечивающие существование структуры**.**

Требование существования структуры определяет необходимое число дополнительных соотношений для эволюционности разрыва. (Куликовский, 1984)

Обобщенное уравнение КдВБ

Для иллюстрации ограничений, накладываемых требованием существования структуры, рассмотрим простой пример с одним законом сохранения. (Куликовский, 2004)

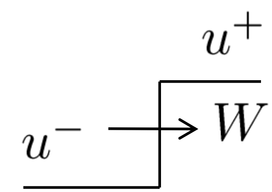
$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-m\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$m,\mu=const \quad \mu>0, \quad m>0$$

Стационарная структура разрывов

$$u=u(\xi), \qquad \xi=-x+Wt$$

$$m\frac{d^2u}{d\xi^2}+\mu\frac{du}{d\xi}=F(u), \qquad F(u)=Wu-\varphi(u)+C$$



$$\lim_{\xi\to-\infty}u(\xi)=u^-, \qquad \lim_{\xi\to\infty}u(\xi)=u^+$$

$$C=\varphi(u^-)+Wu^- \quad C=\varphi(u^+)+Wu^+$$

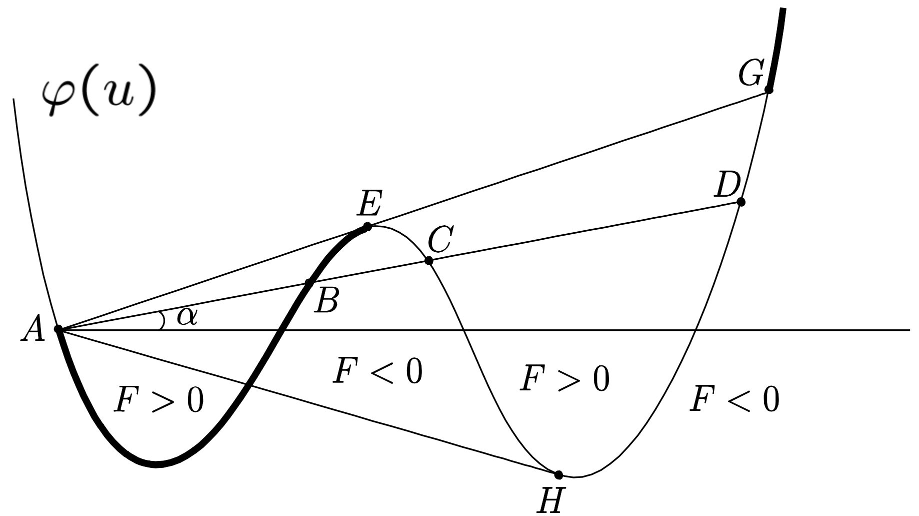
$$[\varphi(u)]=W[u], \quad [u]=u^+-u^-$$

$$m\frac{d^2u}{d\xi^2} + \mu\frac{du}{d\xi} = F(u), \qquad F(u) = Wu - \varphi(u) + C$$

$$W = \frac{[\varphi(u)]}{[u]} = \text{tg}\alpha$$

1 $$m = 0, \qquad \frac{du}{d\xi} = \frac{F(u)}{\mu}$$

Олейник, Калашников



$F(u)$ - при фикс. u разность ординат секущей и кривой $\varphi(u)$

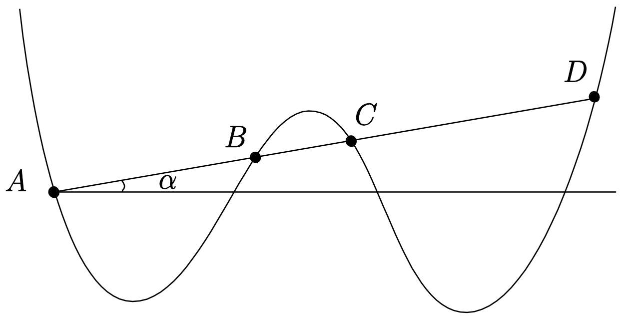
Направление изменения u определяется знаком $F(u)$

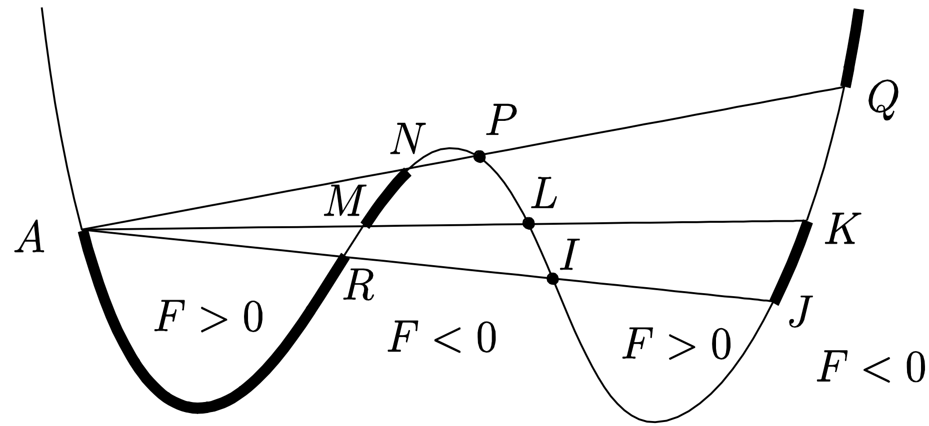
В данном случае все разрывы, имеющие структуру, эволюционные,
но не все эволюционные разрывы имеют структуру.
Не имеют структуры эволюционные разрывы, состояние за которыми точки части кривой *HG.*
Дополнительных соотношений нет.

2 $m > 0, \quad \mu > 0$

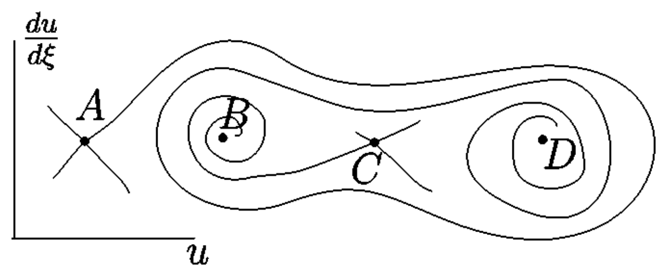
Куликовский, 1984

$$m\frac{d^2u}{d\xi^2} + \mu\frac{du}{d\xi} = F(u), \qquad F(u) = Wu - \varphi(u) + C$$





A, B,C, D – стационарные точки F(u)=0
(A – седло, B,D – фокус или узел) .
C - неустойчивая особая точка (седло).
Стационарная структура разрыва A->C
возможна только при определенном
значении W --
дополнительное условие на разрыве

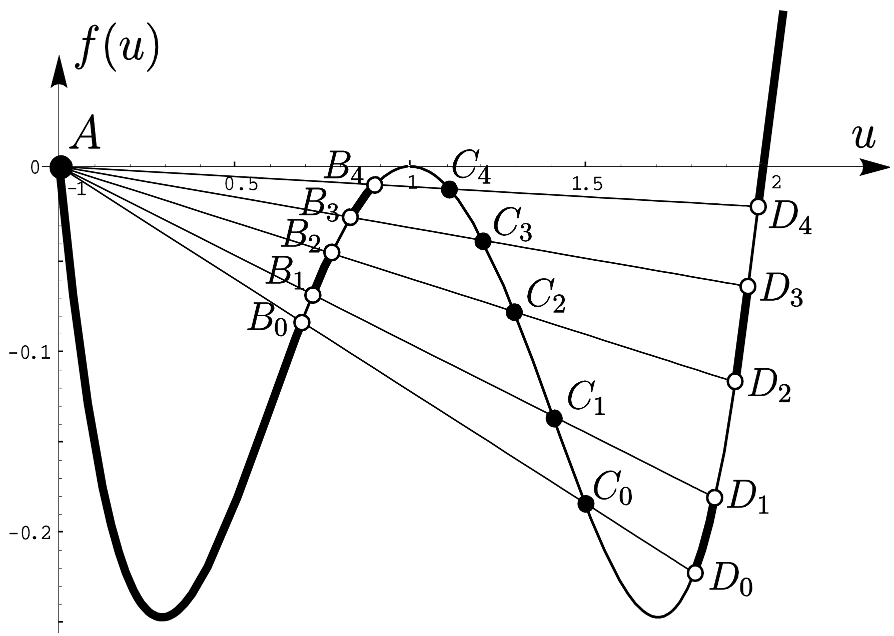


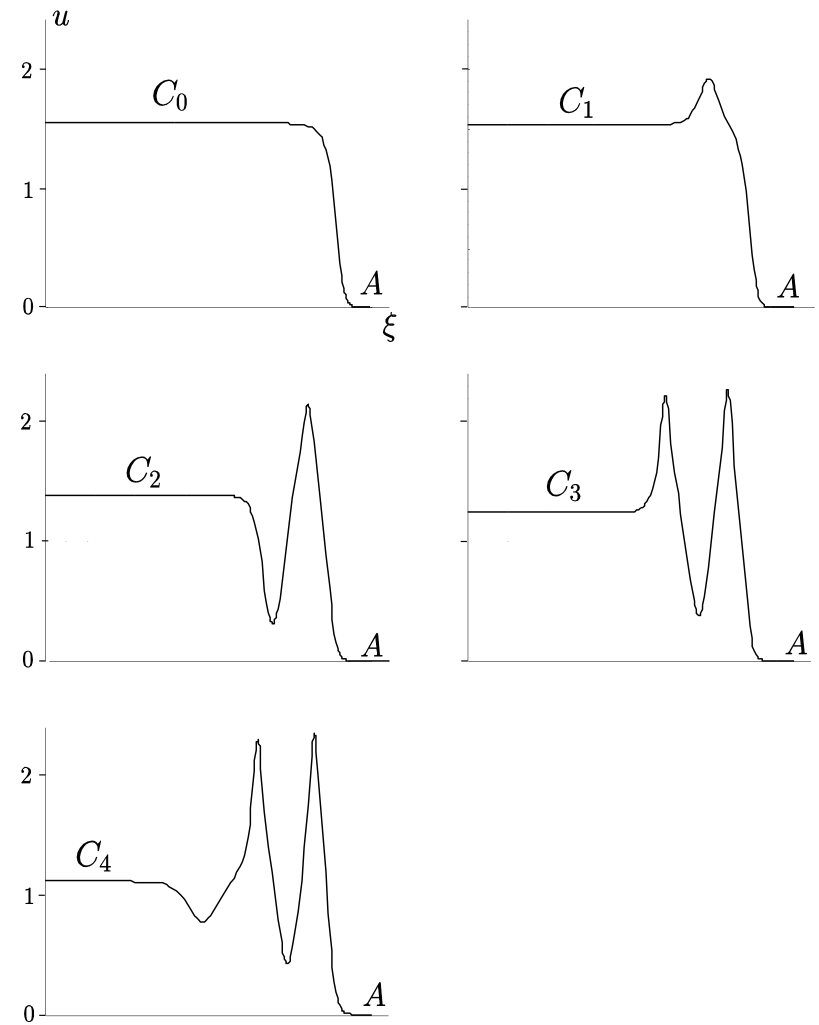
*Отдельные точки I,L,K соответствуют определенным значениям скорости разрыва W.
Это есть дополнительное условие на разрыве, необходимое для эволюционности разрыва
и следующее из существования его структуры.*

Множество разрывов со стационарной структурой.
Структуры особых разрывов.

$$u^- = 0, \quad \gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu} = \sqrt{520} \quad (m{=}1.3,\ \mu{=}0.05)$$

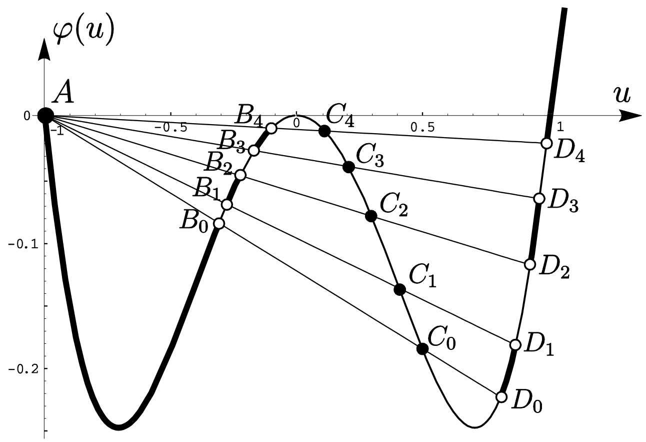
$$A \to C_i$$





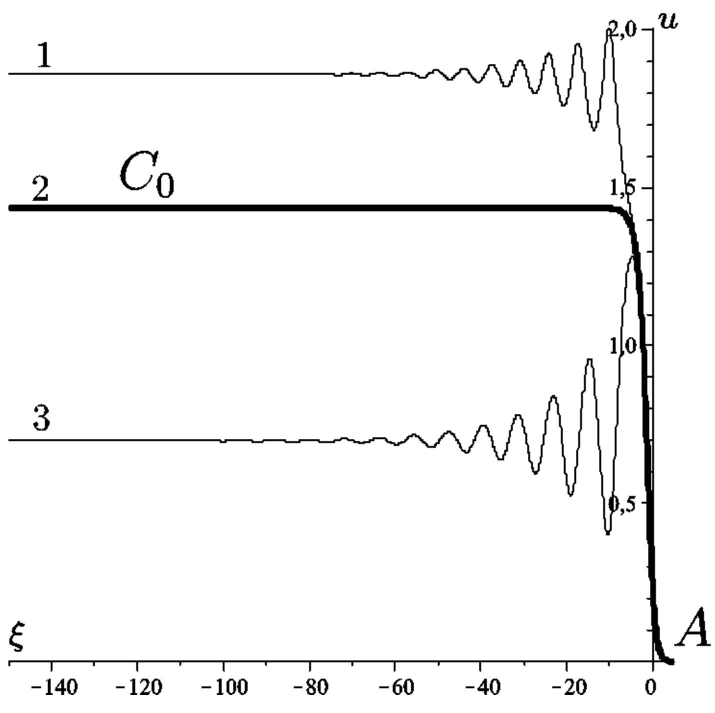
Изучено множество разрывов
в зависимости от параметра γ
Количество особых разрывов ***возрастает***
с увеличением параметра дисперсии при наличии вязкости.

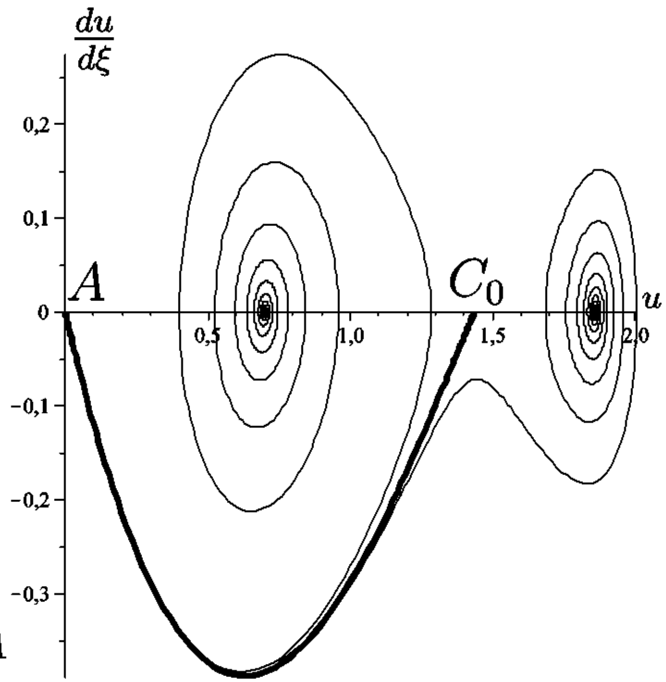
Stationary structure of non- special discontinuities



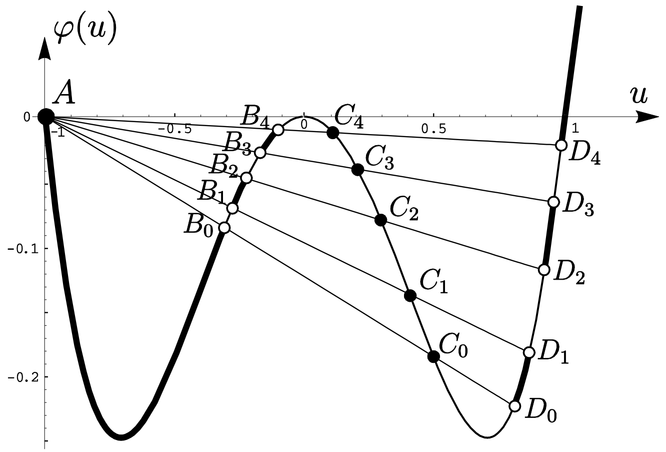
In the figure the structure and phase diagram of the special discontinuity $\mathbf{C_0}$ (bold line) and admissible non-singular discontinuities corresponding to points close to $\mathbf{B_0}$ and $\mathbf{D_0}$ are shown.

Points $\mathbf{B_0}$ and $\mathbf{D_0}$ are focuses.



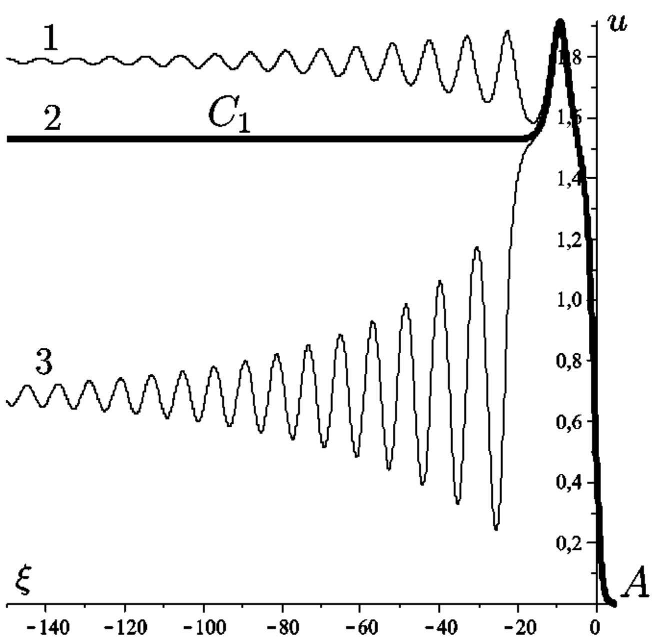


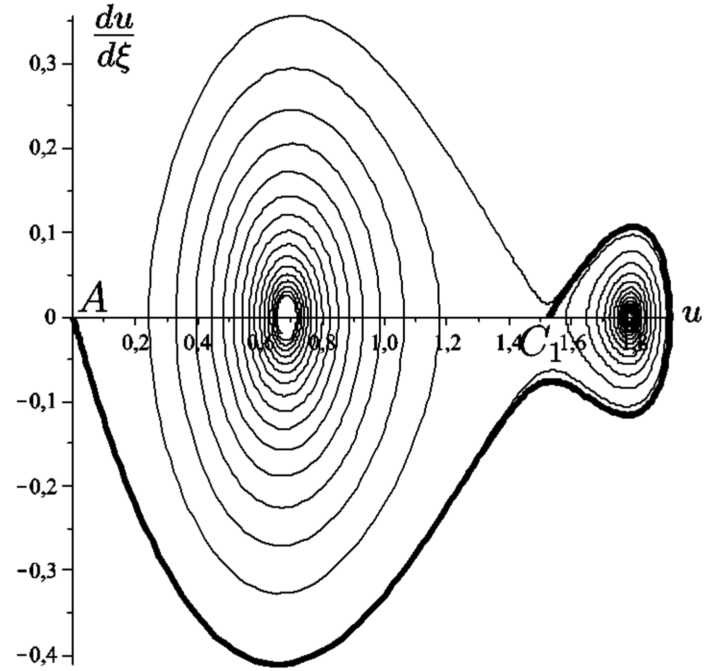
Stationary structure of non-special discontinuities



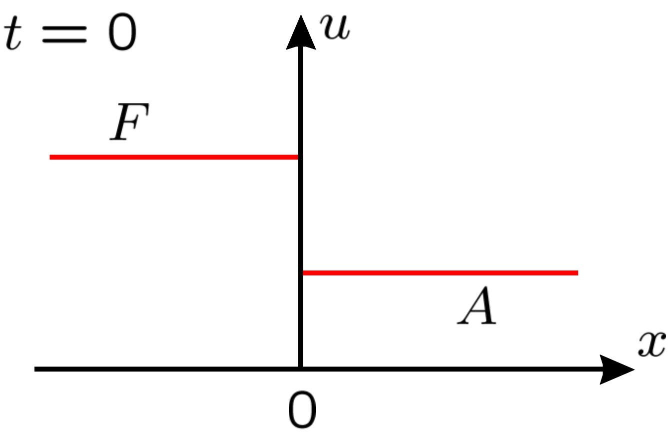
In the figure the structure and phase diagram of the singular discontinuity $\mathbf{C_1}$ (bold line) and admissible non-special discontinuities corresponding to points close to $\mathbf{B_1}$ and $\mathbf{D_1}$ are shown.

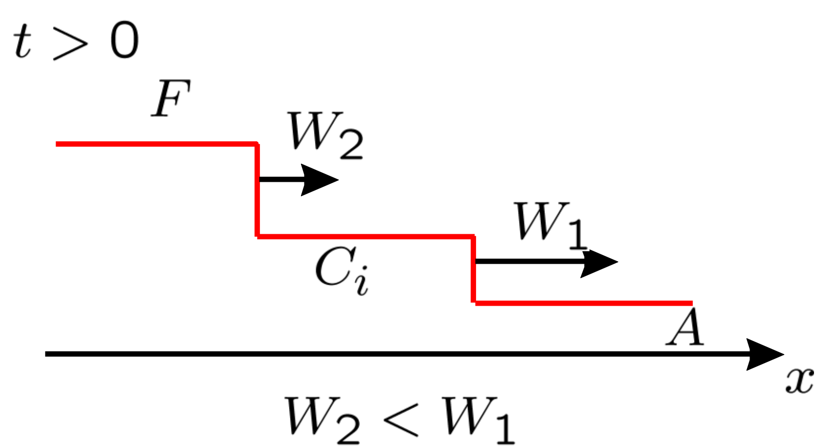
Points $\mathbf{B_1}$ and $\mathbf{D_1}$ are focuses.
Point $\mathbf{C_1}$ is saddle.





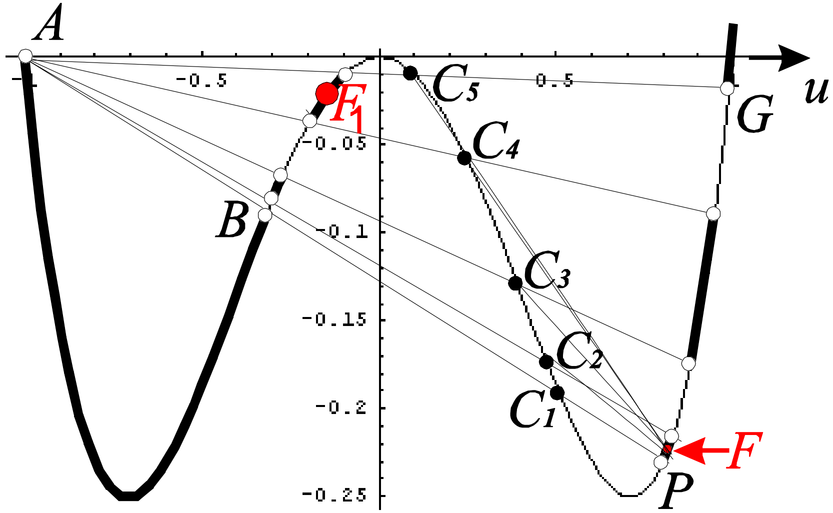
Задача о распаде произвольного разрыва.





$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0;$$

$$W[u] = [\varphi(u)]$$



Неединственность решений.
Какая асимптотика осуществляется?

Куликовский, Чугайнова 2004

Аналог задачи о распаде произвольного разрыва для КдВБ

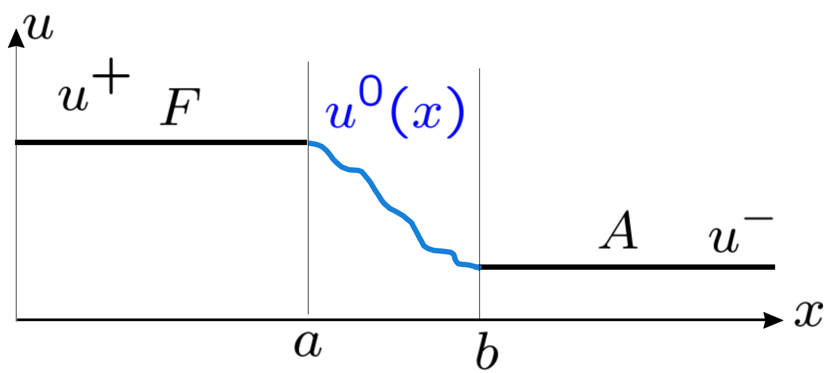
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

$$\varphi(u) = u^4 - u^2, \quad m, \mu = const, \quad m/\mu^2 >> 1$$

Начальные условия:

$$t = 0 \qquad u = \begin{cases} u^-, & \text{при} \quad x < a \\ u^0(x), & \text{при} \quad a \le x \le b \\ u^+, & \text{при} \quad b < x \end{cases}$$

$$u^-, u^+ = const$$



Получены решения с C_0 и новые нестационарные периодические решения.

Спектральная устойчивость разрывов

Чугайнова, Ильичев, Шаргатов, 2015

Уравнение КдВБ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

замена переменных

$$t \to t\sqrt{m}, \quad x \to x\sqrt{m}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu}, \quad v = u - 1, \quad \varphi(v) = f(u-1)$$

Стационарная структура разрывов $u = U(\xi), \quad \xi = x - Wt$

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} - \frac{1}{\gamma}\frac{dU}{d\xi} = WU - f(U), \quad \lim_{\xi\to-\infty} U(\xi) = U_l, \quad \lim_{\xi\to+\infty} U(\xi) = 0 \qquad (2)$$

Для исследования спектральной устойчивости стационарного решения уравнения (1) будем искать решение в виде

$$u(x,t) = U(\xi) + w(\xi,t)$$

Функция $U(\xi)$ удовлетворяет уравнению (2) .

Функция $w(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению (3)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(-\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial w}{\partial \xi} + (W - f'(U(\xi))w\Big) \qquad (3)$$

<u>Определение</u>. Решение $U(\xi)$ уравнения (2) называется спектрально (линейно) неустойчивым, если существует решение уравнения (3)

$$w(\xi,t) = \mathrm{e}^{\lambda t} Y(\xi), \qquad \mathrm{Re}\,\lambda > 0$$

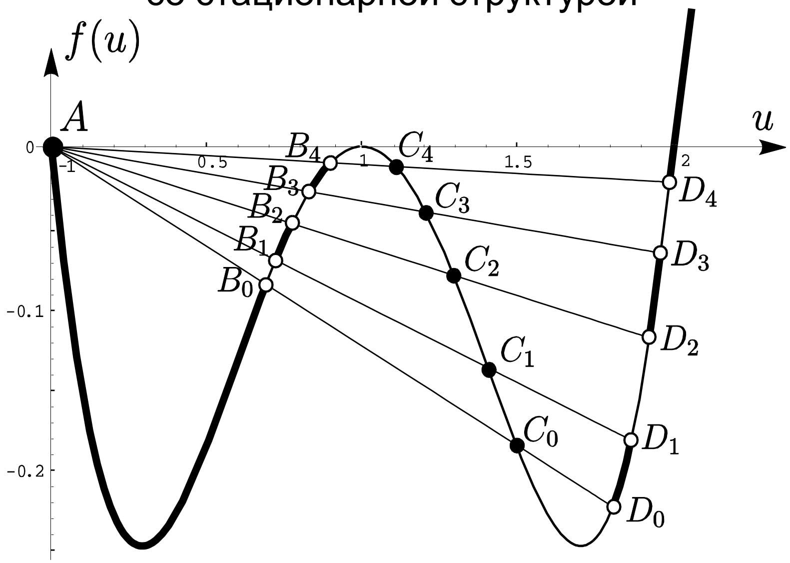
$Y(\xi) \to 0,$ при $\xi \to \pm\infty$

Допустимые разрывы.

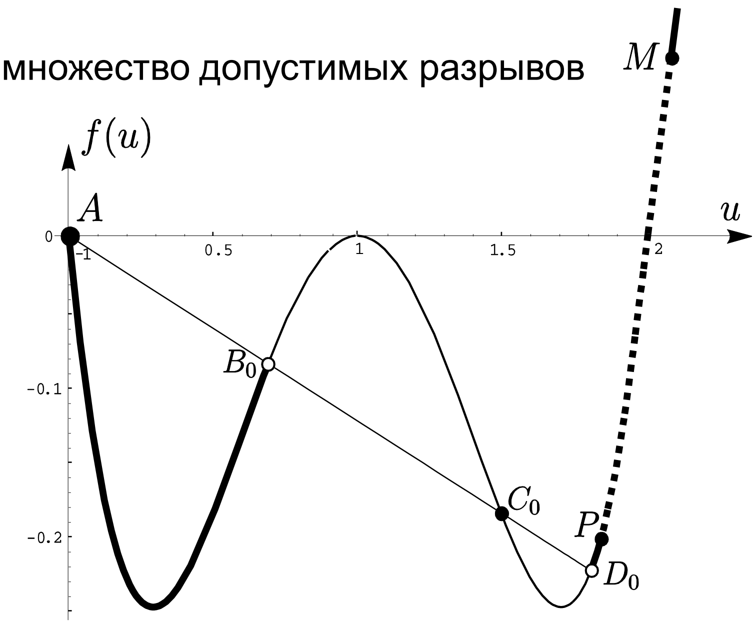
Опр. Допустимым разрывом называется разрыв с устойчивой стационарной или нестационарной структурой.

$\gamma = 22.8$

множество разрывов
со стационарной структурой



множество допустимых разрывов



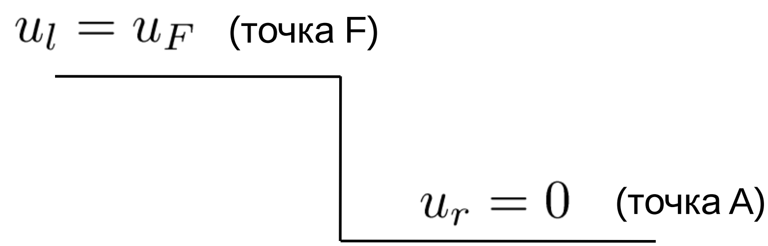
Множество допустимых разрывов состоит из

1. устойчивых разрывов со **стационарной структурой**: особый разрыв $A \to C_0$, неособые разрывы отрезки кривой $AB_0,\ D_0P$ и выше точки M
2. разрывов с устойчивой **нестационарной структурой** (нестационарные решения уравнения КДвБ с периодической по времени структурой)

Задача о распаде произвольного разрыва.

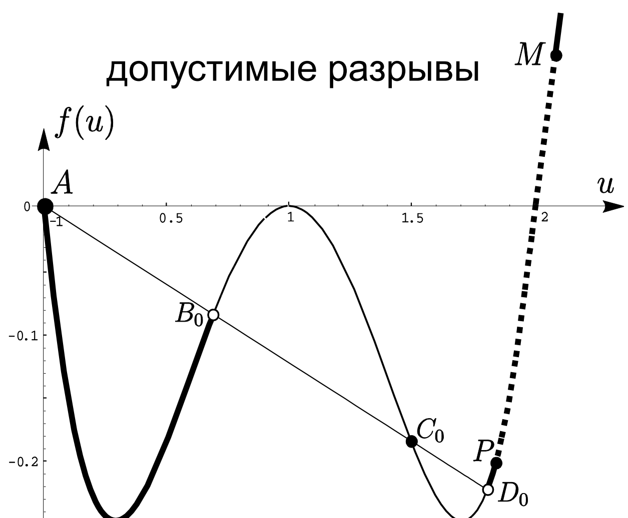
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \qquad\qquad f(u) = (u-1)^4 - (u-1)^2$$

$t = 0$

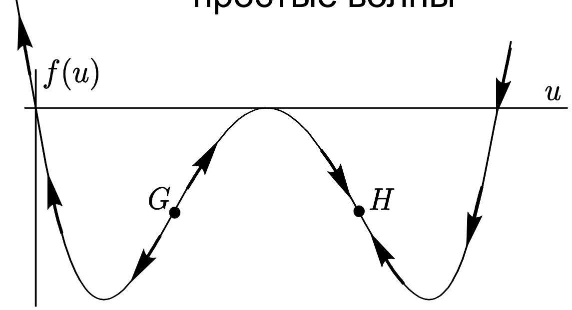


Будем рассматривать различное положение точки F на кривой $f(u)$ и в зависимости от этого строить решения, состоящие из ударных волн с устойчивой стационарной и нестационарной структурой (допустимых разрывов) и неопрокидывающихся простых волн.

допустимые разрывы



простые волны



Важно отметить два обстоятельства.
Во-первых, нестационарная структура имеет место не только в случаях, когда имеется неустойчивая стационарная структура, но также и тогда, когда стационарная структура не существует.
Во-вторых, неустойчивость стационарных структур не всегда приводит к появлению нестационарных структур. Так неустойчивость особых разрывов $A \to Ci$ приводит к их распаду на систему волн, содержащую особый разрыв $A \to C0$. Это же верно в отношении неособых разрывов $A \to F$, когда точка F принадлежит одному из отрезков B2k−1B2k,
k = 1, 2... кривой f(u) (рис. 2).

Заключение

Главный результат этой работы заключается в изменении понятия допустимости разрывов.

Допустимым разрывом называется разрыв с устойчивой стационарной или нестационарной структурой.

Показано, что построенное **решение задачи о распаде** произвольного разрыва с использованием **допустимых** разрывов и простых неопрокидывающихся волн существует и единственно при любых значениях параметров

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R(u_1,u_2)}{\partial u_\alpha}\right) = \mu\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}-m\frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial x^3} \qquad \alpha = 1,2$$

$$u_\alpha = u_\alpha(x,t) \qquad R(u_1,u_2) = \frac{1}{2}f(u_1^2+u_2^2)+\frac{1}{2}g(u_2^2-u_1^2)-\frac{1}{4}\kappa(u_1^2+u_2^2)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R(u_1,u_2)}{\partial u_1}\right) & = \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R(u_1,u_2)}{\partial u_2}\right) & = -m\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-m\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \qquad \varphi(u) = u^4-u^2$$

$$u = u(x,t)$$

$$f, g, \kappa, \mu, m = const, \qquad m/\mu >> 1, \;\; \mu > 0$$

Аналогия с движением тела массы m
под действием силы F(u) и трения.
W фикс. имеется четыре положения равновесия
F(u)=0 (A,B,C,D). Только одна представляет
состояние за разрывов или
в модельном представлении точку остановки
тела массы m.

замена переменных при $\mu \neq 0$

$$t \to t\sqrt{m}, \quad x \to x\sqrt{m}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu}, \quad v = u - 1, \quad \varphi(v) = f(u-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$