Стохастическая интерпретация параболических законов сохранения

Я.Белопольская

СПбГАСУ

23 октября 2017 г.

План доклада

1. Формулировка задачи и основные результаты.
2. Вероятностная интерпретация классических решений задачи Коши для скалярных уравнений.
3. Вероятностная интерпретация классических , обобщенных и вязкостных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений:

а) **Обратная задача Коши** – системы с **диагональной** главной частью,

б) **Прямая задача Коши** - системы с **недиагональной** главной частью.

Основная цель -**построение вероятностной модели решения задачи Коши для системы параболических законов сохранения**

$$\frac{\partial g_m}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_m^j(g)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{d_1} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F_{ml}^{ij}(g) \frac{\partial g_l}{\partial x_j} \right], \qquad (1)$$

а также обратной задачи Коши вида

$$\frac{\partial v_m}{\partial s} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f_m^j(v)}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F^{ij}(v) \frac{\partial v_l}{\partial x_j} \right] = 0, \qquad (2)$$

$g_m(0,x) = g_{m0}(x),\ v_m(T,x) = v_{m0}(x), 0 \le s \le t \le T.$

Вероятностный подход к построению решения $g^m(t,x)$ задачи (1) или $v_m(s,x)$ задачи (2) состоит из трех этапов:

1. Найти случайные процессы, позволяющие построить вероятностное представление решения задачи, при априорном предположении о том, что такое решение $g^m(t,x)$, $f_m(s,x)$ существует и регулярно;

2. Отказавшись от априорного предположения о существовании $g^m(t,x)$, $v_m(s,x)$, построить замкнутую стохастическую систему уравнений, связанную с (1) или (2), доказать ее разрешимость и исследовать свойства решения.

3. Сформулировать условия на параметры систем (1), (2), которые позволяют доказать что $\exists!$ решение стохастической задачи, обладающее нужными свойствами, и функция $g^m(t)$, $v_m(\mathbf{t})$, построенная в п. 2 – это единственное решение задачи Коши (1) в том или ином смысле.

Скалярный случай $u(T,y)=u_0(y)$,

$$\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{2}A^u_{ik}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_i}A^u_{kj}(y)+a^u_i(y)\frac{\partial u}{\partial y_i}=f(y,u) \tag{3}$$

$$i,k=1,\dots d, \quad x\in R^d, \quad 0\le s\le\theta\le T, u_0:R^d\to R$$

$$d\xi(\theta)=a^u(\xi(\theta))d\theta+A^u(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(s)=y\in R^d, \tag{4}$$

и соотношение

$$u(s,y)=E\left[u_0(\xi_{s,y}(T))+\int_s^T f(u(\theta,\xi_{s,y}(\theta))d\theta\right]. \tag{5}$$

C1

$$\|a(x,u)\|^2 + \|A(x,u)\|^2 \le C[1 + \|x\|^2 + \|u\|^{2q}],$$

$$\|\nabla a(x,u)\|^2 + \|\nabla A(x,u)\|^2 \le C[1 + K|u|^q],$$

$f(x,u), u_0(x)$ - ограничены по x, дифференцируемы по x и u, $f(x,u)$ полилинейна по u.

C2

$a^u(x), A^u(x), f^u(x), u_0(x)$ дважды дифференцируемы.

Theorem 1

Пусть выполнены условия **C1**. *Тогда* $\exists!$ *решение стохастической системы (4), (5). При выполнении условий* **C2** *функция* $u(s,x)$ *вида (5) является единственным классическим решением задачи Коши (3).*

При достаточной гладкости $u_0(x)$ и коэффициентов $a^u(x) = a(x, u, \nabla u)$, $A^u(x), f^u(x)$ аналогичные результаты можно получить и для квазилинейных параболических уравнений.

Нелинейные параболические системы. Обратная задача Коши

1 $\mathcal{L}^u u_k = a(x,u)\cdot\nabla u_k + \frac{1}{2} TrA(x,u)\nabla^2 u_k A^*(x,u)$

$$\frac{\partial u_k}{\partial s}+\mathcal{L}^u u_k+\sum_{l=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d} B^i_{lk}(x,u)\nabla_i u_l+\sum_{l=1}^{d_1} c_{lk}(x,u)u_l = 0 \tag{6}$$

$$u_k(T,x) = u_{0k}(x),$$

где $0 \le s \le T$.

Соответствующая стохастическая система имеет вид

$$d\xi_{s,x}(\theta) = a^u(\xi_{s,x}(\theta))d\theta + A^u(\xi_{s,x}(\theta))dw(\theta), \quad (7)$$

$$d\eta(\theta) = c^u(\xi_{s,x}(\theta))\eta(\theta)d\theta + C^u(\xi_{s,x}(\theta))(\eta(\theta), dw(\theta)), \quad (8)$$

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}\left[\langle \eta_{s,h}(T), u_0(\xi_{s,x}(T))\rangle\right], \quad (9)$$

$\langle h, u\rangle = \sum_{k=1}^{d} h_k u_k, \quad \xi(s) = x \in R^d, \quad \eta(s) = h \in R^{d_1},.$

$B^i_{lk} = C^j_{lk} A^i_j.$

C3 $\|c(x,u)\|^2 + \|C(x,u)\|^2 \le C[1+\|u\|^{2q}]$,
$\|\nabla c(x,u)\|^2 + \|\nabla C(x,u)\|^2 \le C[1+K|u|^{q_1}]$,
$u_0(x)$ C^1 функция $f(x,u) \in C^1$ полилинейна по u.
C4 Выполнено **C2** и $c^u(x), C^u(x) \in C^2$.

Theorem 2

Пусть выполнены условия **C1**, **C3**. *Тогда* $\exists!$ *решение стохастической системы (7)– (9) для всех* $s \in [T_1, T]$, *где* T_1 *зависит от коэффициентов и* u_0. *При выполнении условий* **C2**, **C4** *функция* $u(s,x)$ *вида (9) является единственным классическим решением задачи Коши (6).*

Аналогично для квазилинейных параболических уравнений.

2

$$\mathcal{L}^v_m v_m = a_m(x,v)\cdot\nabla v_m + \frac{1}{2} Tr A_m(x,v)\nabla^2 v_m A^*_m(x,v)$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial s} + \mathcal{L}^v_m v_m + [Q^v v]_m = 0, \qquad v_m(t,x) = v_{0m}(x), \tag{10}$$

$$[Q^v v]_m = \sum_{j=1}^{d_1} q_{lm} v_m \quad \textbf{и} \quad \sum_m q_{lm} = 0.$$

$P\{\gamma(t+\Delta t) = l | \gamma(t) = j, (\xi(\theta), \gamma(\theta)), \theta \le t\} =$
$q^v_{jl}(\xi(t))\Delta t + o(\Delta t), l \ne j$

$$d\xi(t) = a^v(\xi(t),\gamma(t))dt + A^v(\xi(t),\gamma(t))dw(t), \xi(s) = x, \tag{11}$$

$$d\gamma(\theta) = \int_R g^v(\xi(\theta),\gamma(\theta-),z)p(d\theta,dz), \quad \gamma(s) = l, \tag{12}$$

$$v(s,x,m) = E[v_0(\xi_{s,x}(T),\gamma_{s,m}(T))]. \tag{13}$$

$$g^v(x,l,z) = \begin{cases} m-l & z \in \Delta^v_{lm}(x), \\ 0 \end{cases}$$

$\Delta^v_{lm}(x)$ последовательные полуоткрытые справа интервалы, имеющие длину $q^v_{lm}(x)$.

1 и 2 – скалярные уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2} TrG(\kappa, u)\nabla^2 \Phi G^* z, u) + \langle g(z, u), \nabla \Phi \rangle = 0,$$

относительно $\Phi(s, z) = \langle h, u(s, x) \rangle, \quad z = (x, h).$

$$TrG\nabla^2 \Phi(s, x, h) G^* = A_{ik} \frac{\partial^2 \Phi(s, x, h)}{\partial x_i \partial x_j} A_{kj}$$

$$+2C_k^{lm} h_l \frac{\partial^2 \Phi(s, x, h)}{\partial x_j \partial h_m} A_{jk}, \quad \langle g, \nabla \Phi(s, x, h) \rangle$$

$$= a_j \frac{\partial \Phi(s, x, h)}{\partial x_j} + c_{lm} h_m \frac{\partial \Phi(s, x, h)}{\partial h_l}.$$

Обратная задача, классические решения нелинейных уравнений - Маккин, Фрейдлин, Далецкий, Бел. Системы **1** нелинейных уравнений – Далецкий, Бел. классические решения Бел. -вязкостные решения. Системы **2** Пенг, Парду и ... классические и вязкостные решения

Вероятностное представление обобщенного решения прямой задачи Коши (Kunita 1994)

Пусть $Lu = \frac{1}{2}F\Delta u + a\cdot\nabla u, \quad F = AA^*.$

Рассмотрим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{14}$$

u – обобщенное решение (14), если $u(t)\in H^1$ и $\forall h\in C_0^\infty(R^d)$

$$\partial_t \int_{R^d} u(t,x)h(x)dx = \int_{R^d} u(t,x)[L^u]^* h(x)dx.$$

$$[L^u]^* h(x) = \frac{1}{2}\Delta[F^u(x)h(x)] - \nabla[a^u(x)h(x)].$$

Пусть $\mathcal{D}$ -пространство Шварца, H^k - соболевское пространство, $\mathcal{D}^*$, и H^{-k} – двойственные пространства, $\langle\langle u, h\rangle\rangle = \int_{R^d} u(x)h(x)dx$,

$$d\xi(\theta) = -\tilde{a}(\xi(\theta))d\theta - A(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(0) = y \in R^d.$$

$\psi_{0,t}, \varphi_{0,t} : R^d \to R^d$, $\varphi_{0,t}(y) = \xi_{0,y}(t)$,
$\varphi_{0,t} \circ \psi_{0,t}(x) = x$.
$\tilde{a} = a - \frac{1}{2}A\nabla A$
Зададим случайный процесс $u \circ \psi_{0,t} \in \mathcal{D}^*$ соотношением $\langle\langle u \circ \psi_{s,t}, h\rangle\rangle = \langle\langle u, h \circ \varphi_{0,t} J^u_{0,t}\rangle\rangle$,
$\int_{R^d} u(\hat{\xi}_{0,x}(t))h(x)dx = \int_{R^d} u(y)h(\xi_{0,y}(t))J^u_{0,t}dy$,

$$J^u_{0,t}(y) = \det \nabla\xi_{0,y}(t), \quad \hat{\xi}_{0,x}(t) = \psi_{0,t}(x).$$

Theorem 3

[Kunita (1994)] *При достаточно гладких коэффициентах* $a(x)$ *и* $A(x)$ *обобщенноое решение* $u(t) \in H^{-k}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \qquad u(0,x) = u_0(x)$$

допускает вероятностное представление вида $u(t) = E[u_0 \circ \psi_{0,t}]$ *где*

$$d\psi_{\tau,t}(x) = \tilde{a}(\psi_{\tau,t}(x))d\tau + A(\psi_{\tau,t}(x))d\tilde{w}(\tau),$$

$\tilde{w}(\tau) = w(t-\tau) - w(t)$ *- винеровский процесс и* $\psi_{t,t}(x) = x$.

Нелинейные параболические системы. Прямая задача Коши

$$\frac{\partial g_m}{\partial t}+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial f_m^j(g)}{\partial x_j}=\sum_{ij=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[F_{ml}^{ij}(g)\frac{\partial g_l}{\partial x_j}\right], \quad g_m(0,x)= \tag{15}$$

$m=1,2,\ldots d_1$. **Пример: 1) МГД-Бюргерс**

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\langle v,\nabla\rangle v=\frac{1}{2}\nu^2\Delta v+(\nabla\times B)\times B, \quad v(0,x)=v_0(x)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{1}{\sigma^2}\Delta B+\nabla\times(v\times B), \quad B(0,x)=B_0(x),$$

$\times$ - вект. произв., $v\in R^3$, $B\in R^3$, μ и σ – коэффициенты вязкости и проводимости

2) Параболические системы с кросс-диффузией

$$u_t^1 = \Delta(u^1(u^1 + u^2)) + c_u^1 u^1, \tag{16}$$

$$u_t^2 = \Delta(u^2(u^1 + u^2)) + c_u^2 u^2, \tag{17}$$

$$u^1(0, x) = u_0^1(x), \quad u^2(0, x) = u_0^2(x).$$

$$c_u^m(x) = \alpha_m - \beta_{m1} u^1(t, x) - \beta_{m2} u^2(t, x), \quad m = 1, 2.$$

Заметим, что наряду с соотношением $\forall h \in C_0^\infty(R^d)$

$$\int_{R^d} u_t^m(t,x)h(x)dx = \int_{R^d} u^m(t,x)[\mathcal{M}^u + c_u^m]h(x)dx, \tag{18}$$

$\mathcal{M}^u h = (u^1 + u^2)\Delta h$, обобщенное решение УЧП можно определить интегральным соотношением

$$\int_0^T \int_{R^d} u(\theta,x)[h_\theta(\theta,x) + [\mathcal{M}^u + c_u^m]h((\theta,x)]dxd\theta = 0. \tag{19}$$

для любой функции $h \in C_0^\infty((0,T) \times R^d)$. При этом, если u удовлетворяет (19), то можно проверить, что u удовлетворяет (18).

Как следует из приведенного выше интегрального тождества с системой, двойственной к (16), (17) можно связать стохастические процессы, удовлетворяющие СДУ

$$d\xi(\theta) = M_u(\xi(\theta))dw(\theta), \quad \xi(0) = y, 0 \le \theta \le t, \tag{20}$$

$$d\eta^m(\theta) = c_u^m(\xi(\theta))\eta^m(\theta)d\theta, \quad \eta^m(0) = 1, \tag{21}$$

где

$$M_u(x) = \sqrt{2[u^1(t,x) + u^2(t,x)]},$$

Для того, чтобы построить вероятностное представление обобщенного решения (16), (17), рассмотрим наряду с (20), СДУ для обращенного по времени процесса $\hat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta)$

$$d\hat{\xi}(\theta) = \frac{1}{2}[M_u \nabla M_u](\hat{\xi}(\theta))d\theta - M_u(\hat{\xi}(\theta))d\tilde{w}(\theta), \; \hat{\xi}(0) = x, \qquad (22)$$

где $\tilde{w}(\theta) = w(t-\theta) - w(t)$, СДУ для процесса $\mathbf{J}(t) = \nabla \xi_{0,y}(t)$

$$d\mathbf{J}(\theta) = \nabla M_u(\xi(\theta))\mathbf{J}(\theta)dw(\theta), \quad \mathbf{J}(0) = I, \quad (23)$$

а также СДУ для процесса $J_{0,t}(x) = \det \mathbf{J}_{0,t}(x)$,

$$dJ(\theta) = J(\theta)\nabla M_u(\xi(\theta)) \cdot dw(\theta), \quad J(0) = 1. \quad (24)$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_u^m h = \frac{1}{2}[M_u]^2 \Delta h + c_u^m h \qquad (25)$$

и $\mathcal{L}_u^m u^m = \Delta[u^m[u^1 + u^2]] + c_u^m u^m$

Рассмотрим вспомогательный процесс - стохастическую тестовую функцию

$\gamma^m(\theta) = \eta^m(\theta) h(\xi(\theta)) J(\theta)$ где $\xi(\theta)$ и $J(\theta)$ удовлетворяют (20) и (23), а процесс $\eta^m(\theta)$ удовлетворяет $\eta^m(0) = 1$ и СДУ

$$d\eta^m(\theta) = \tilde{c}_u^m(\xi(\theta))\eta^m(\theta)d\theta + C_u^m(\xi(\theta)\eta^m(\theta)dw(\theta), \qquad (26)$$

с коэффициентами $\tilde{c}_u^m$, C_u^m , которые будут определены ниже.

Lemma 4

Пусть $\tilde{c}_u^m$ *и* $\tilde{C}_u^m$ *имеют вид*

$$\tilde{c}_u^m(\xi(\theta)) = c_u^m(\xi(\theta)) - \|\nabla M_u(\xi(\theta))\|^2,$$

$$C_u^m(\xi(\theta)) = -\nabla M_u(\xi(\theta)).$$

Тогда процессы
$\gamma^m(\theta) = \eta^m(\theta) h(\xi_{0,y}(\theta)) J(\theta), m = 1, 2,$ *имеют стохастические дифференциалы вида*

$$d\gamma_y^m(\theta) = \left[\frac{1}{2} M_u^2 \Delta h + c_u^m h\right] (\xi_{0,y}(\theta)) \eta^m(\theta) J(\theta) d\theta \tag{27}$$

$$+ M_u \nabla h(\xi_{0,y}(\theta)) \eta^m(\theta) J(\theta) \cdot dw(\theta).$$

Theorem 5

Пусть $\exists!$ *решение* $u^1(t), u^2(t) \in H^1 \cap C^2$ *задачи (16), (17). Тогда* $\exists$ *такие процессы* $\tilde{\eta}^m(t)$ *и* $\hat{\xi}(t)$*, что вероятностное представление функций* $u^m(t)$ $m = 1, 2$*, имеет вид*

$$\langle\langle u^m(t), h\rangle\rangle = \langle\langle E[\hat{\eta}^m(t)u_0^m(\hat{\xi}(t))], h\rangle\rangle.$$

Здесь $\langle\langle u^m, h\rangle\rangle = \int_{R^d} u^m(x)h(x)dx$*, а процессы* $\eta^m(t), \tilde{\eta}^m(t)$ *и* $\xi(t), \hat{\xi}(t)$ *будут описаны ниже.*

Рассмотрим систему

$$d\hat{\xi}_{0,x}(\theta) = [M_u \nabla M_u](\hat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta + M_u(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))d\tilde{w}(\theta), \tag{28}$$

$$d\tilde{\eta}^m(\theta) = \tilde{c}_u^m(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))\tilde{\eta}^m(\theta)d\theta + C_u^m(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))\tilde{\eta}^m(\theta)dw(\theta), \tag{29}$$

$$\tilde{\eta}^m(0) = 1, \quad \hat{\xi}_{0,x}(0) = x, \quad m = 1, 2,$$

$$u^m(t,x) = E[\hat{\eta}^m(t)u_0^m(\hat{\xi}_{0,x}(t))]. \tag{30}$$

Система не замкнута, поскольку коэффициенты $\tilde{c}, C$ зависят от u и ∇u.

Второй этап этого подхода состоит в построении замкнутой системы соотношений, определяющих процессы $\hat{\xi}(\theta), \hat{\eta}(\theta)$ и функции $u(t,x), \nabla u(t,x)$.

Продифференцировав рассматриваемую систему

$$\partial_t u^m = \Delta[u^m(u^1+u^2)]+c_u^m u^m, \quad u^m(0,x) = u_0^m(x), \tag{31}$$

по x получим УЧП для $v_i^m = \nabla_i u^m$, $m = 1, 2$,

$$\partial_t v_i^m = \Delta\{v_i^m(u^1 + u^2) + u^m(v^1 + v^2)\} \tag{32}$$

$$+u^m \nabla_i c^m(u) + c^m(u) v_i^m, \quad v_{0i}^m(x) = \nabla_i u_0^m(x).$$

Аналогично из

$$\partial_\theta h + (u^1 + u^2)\Delta h + c^m(u)h = 0, \quad h(t,y) = h(y), \tag{33}$$

получим УЧП для $g_i = \nabla_i h$

$$\partial_\theta g_i + (u^1 + u^2)\Delta g_i + (v_i^1 + v_i^2) div\, g \tag{34}$$

$$+\nabla_i c^m(u)h + c^m(u)g_i = 0, \quad g_i(0,y) = \nabla_i h(y).$$

Theorem 6

Пусть $u^1(t), u^2(t) \in H^1 \cap C^2$ *удовлетворяют (41). Тогда пара* $(u^m(t,x), \nabla_j u^m)$ *допускает вероятностное представление*

$$\begin{pmatrix} u^m(t,x) \\ \nabla_i u^m(t,x) \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} \tilde{\zeta}_{11}^m(t) & 0 \\ \tilde{\zeta}_{21}^m(t) & \tilde{\zeta}_{22}^m(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^m(\hat{\xi}_{0,x}(t)) \\ v_i^m(\hat{\xi}_{0,x}(t)) \end{pmatrix}\right]. \tag{35}$$

При построении вероятностного представления функций $V^m = (u^m, \nabla u^m)$, введем в рассмотрение стохастическую тестовую функцию

$$\kappa(\theta) = \begin{pmatrix} \kappa_1(\theta) \\ \kappa_2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{11}(\theta) & 0 \\ \zeta_{12}(\theta) & \zeta_{22}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(\xi(\theta)) \\ g(\xi(\theta)) \end{pmatrix} J(\theta), \tag{36}$$

Пусть $C_{11}^m = -\nabla M_u, \quad \tilde{c}_{11}^m = c_u^m + \|\nabla M_u\|^2,$

$$C_{21}^m = -\nabla M_u, C_{22}^m = \frac{g^1 + g^2}{\sqrt{2[u^1 + u^2]}} - \nabla M_u,$$

$$[\tilde{c}_{21}^m]_i = \nabla_i c_u^m + \|\nabla M_u\|^2, \quad \tilde{c}_{22}^m = c_u^m + \|\nabla M_u\|^2$$

Рассмотрим систему

$$d\hat{\xi}_{0,x}(\theta) = [M_u \nabla M_u](\hat{\xi}_{0,x}(\theta))d\theta + M_u(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))d\tilde{w}(\theta), \tag{37}$$

$$d\tilde{\zeta}^m(\theta) = \tilde{q}_u^m(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))\hat{\zeta}^m(\theta)d\theta + Q_u^m(\hat{\xi}_{0,x}(\theta))\tilde{\zeta}^m(\theta)dW(\theta), \tag{38}$$

$$\hat{\zeta}^m(0) = (I, 0)^*, \quad \hat{\xi}_{0,x}(0) = x, \quad m = 1, 2,$$

где

$$q^m = \begin{pmatrix} c_{11}^m & 0 \\ c_{21}^m & c_{22}^m \end{pmatrix}, Q^m = \begin{pmatrix} C_{11}^m & 0 \\ C_{21}^m & C_{22}^m \end{pmatrix}, W(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ w(t) \end{pmatrix},$$

$$V^m(t,x) = E[\hat{\zeta}^m(t)V_0^m(\hat{\xi}_{0,x}(t))]. \tag{39}$$

Theorem 7

Пусть существует единственное решение $u^1(t), u^2(t) \in H^1 \cap C^2$ *задачи (41). Тогда пара* $u^m(t,x)$ *и* $v_j^m = \nabla_j u^m$ *допускает вероятностное представление*

$$\begin{pmatrix} u^m(t,x) \\ \nabla_i u^m(t,x) \end{pmatrix} = E\left[\begin{pmatrix} \hat{\zeta}_{11}^m(t) & 0 \\ \hat{\zeta}_{21}^m(t) & \hat{\zeta}_{22}^m(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^m(\hat{\xi}_{0,x}(t)) \\ v_{0i}^m(\hat{\xi}_{0,x}(t)) \end{pmatrix}\right]. \tag{40}$$

Theorem 8

Система (37), (38), (40) представляет собой замкнутую систему. Если эта система имеет решение и функции $u^m(t)$ принадлежат классу H^1, то они являются обобщенными решениями исходной задачи Коши

$$\partial_t u^m = \Delta(u^m(u^1+u^2))+c_u^m u^m, \qquad u^m(0,x) = u_0^m(x).$$

$$du(\theta,\xi(\theta)) = [u_\theta + a^u(\xi(\theta))\cdot\nabla u + \frac{1}{2}TrF^u(\xi(\theta))\nabla^2 u]d\theta$$
$$+\nabla u\cdot A^u(\xi(\theta))dw(\theta), \quad F^u = A^u[A^u]^*,$$

$$Eu(T,\xi_{s,y}(T)) - u(s,y) + E\int_s^T f(u(\theta,\xi_{s,y}(\theta))d\theta$$
$$= E\int_s^T [u_\theta + a^u\cdot\nabla u + \frac{1}{2}TrF^u\nabla^2 u - f^u](\xi(\theta)d\theta,$$

$$du(\theta,\xi(\theta)) = f(u(\theta,\xi_{s,y}(\theta))d\theta + \nabla u\cdot A^u(\xi(\theta))dw(\theta)$$
$$+[u_\theta + a^u(\xi(\theta))\cdot\nabla u + \frac{1}{2}TrF^u(\xi(\theta))\nabla^2 u]d\theta$$
$$-f(u(\theta,\xi_{s,y}(\theta))d\theta.$$

$$y(\theta) = u(\theta, \xi(\theta)), \quad z(\theta) = [A^u]^*(\xi(\theta)\nabla u(\theta, \xi(\theta)),$$

$$dy(\theta) = f(u(\theta, \xi(\theta)))d\theta + z(\theta)dw(\theta), \quad y(T) = u_0(\xi(T))$$

МГД-Бюргерс

$, x \in R$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad u_1(0,x) = u_{10}(x) \quad (41)$$

$B = u_1, v = u_2$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(u_1^2 + u_2^2)}{\partial x} = \frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \qquad u_2(0,x) = u_{20}(x). \quad (42)$$

Литература

1. Фрейдлин М.И.Квазилинейные параболические уравнения и меры в функциональном пространстве Функц. анализ и его прил., 1:3 (1967), 74–82

2. McKean H. *A class of Markov processes associated with nolinear parabolic equations*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59** 6 (1966) 1907-1911.

3. Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л., Исследование задачи Коши для квазилинейных параболических систем с конечным и бесконечным числом аргументов при помощи марковских процессов. Изв. вузов. Математика. - 1978. - 12. - С.5-17.

4. Белопольская Я.И., Вероятностный подход к решению систем нелинейных параболических уравнений Теория вероятностей и ее применения, том 49, вып. 4, 2004, стр. 625–652
5. S. Albeverio, Ya. Belopolskaya, Probabilistic approach to systems of nonlinear PDEs and vanishing viscosity method Markov processes and related topics V. 12, N1, 2006, 59-94

5. Ya.Belopolskaya, W.Woyczynski, Generalized solutions of nonlinear parabolic equations and diffusion processes. *Acta Applicandae Mathematicae* **96** 1-3 (2007) 55-69.
6. Ya.Belopolskaya, W.Woyczynski, *Generalized solution of the Cauchy problem for systems of nonlinear parabolic equations and diffusion processes,* Stochastics and dynamics, v 11 N 1 (2012) 1-31.