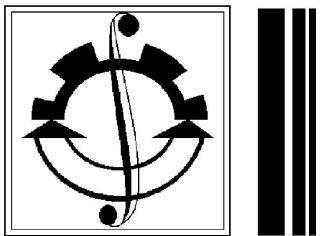


12+

ISSN 1992-2752



*Серия 1:*  
Математика  
Механика  
Информатика

Вестник  
Сыктывкарского  
университета

2(23) выпуск 17

ВЕСТНИК СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Основан в 1995 году Выходит 4 раза в год	СЕРИЯ 1: <i>Математика</i> <i>Механика</i> <i>Информатика</i>	12+ ISSN 1992-2752 ВЫПУСК 2 (23) 2017
--	--	--

**Учредитель и издатель: ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина» (167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55)**

**Зарегистрирован Федеральной службой РФ по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство ПИ № ФС77-37565 от 17 сентября 2009 года**

Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика : сборник. Сыктывкар: Изд-во Сыктывкарского ун-та, 2017. — Выпуск 1 (22). 2017. — 112 с.

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР:**

д.п.н., и.о. ректора ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина» Сотникова О.А.

**ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР:**

Ермоленко А.В., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина)

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:**

Асланов Р.М., к.ф.-м.н., д.п.н., профессор (ИММ НАН Азербайджана, Респ. Азербайджан),

Беляева Н.А., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Вечтомов Е.М., д.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Головач П.А., к.ф.-м.н., доцент (Университет Бергена, Норвегия),

Калинин С.И., д.п.н., к.ф.-м.н., профессор (ВятГУ),

Колпак Е.П., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Котов Л.Н., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Малоземов В.Н., д.ф.-м.н., профессор (СПбГУ),

Одинец В.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Певный А.Б., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Петров Н.Н., д.ф.-м.н., профессор (УдмГУ),

Петраков А.П., д.ф.-м.н., профессор (СГУ им. Питирима Сорокина),

Рудикова Л.В., к.ф.-м.н., доцент (ГрГУ им. Янки Купалы, Респ. Беларусь),

Тихомиров А.Н., д.ф.-м.н., профессор (Коми НЦ УрО РАН),

Чермных В.В., д.ф.-м.н., доцент (ВятГУ)

**ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕДАКЦИЯ:**

Гудырева Л.В., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Котелина Н.О., к.ф.-м.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Хозяинов С.А., к.филол.н., доцент (СГУ им. Питирима Сорокина),

Юркина М.Н. (СГУ им. Питирима Сорокина)

**АДРЕС РЕДАКЦИИ**

ВЕСТНИКА СЫКТЫВКАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

167001, Республика Коми, г. Сыктывкар, Октябрьский просп., д. 55

Тел. (8212)390-308.

Электронный адрес: [https://syktsu.ru/\\_fac/math/vestnik/site/index.htm](https://syktsu.ru/_fac/math/vestnik/site/index.htm)

Свободная цена

© ФГБОУ ВО «СГУ им. Питирима Сорокина», 2017.

# Содержание

<b>Прикладная математика и механика</b>	
Беляева Н. А., Яковлева А. Ф. <i>Фронтальная волна напорного течения</i> . . . . .	3
Макаров П. А. <i>О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем</i> . . . . .	12
Михайлов А. В. <i>О колебаниях кольца, подкрепленного нитями</i>	26
<b>Математика</b>	
Пименов Р. Р. <i>Трактовки теорем Паппа: перпендикулярность и инволютивность</i> . . . . .	42
<b>Методические материалы</b>	
Одинец В. П. <i>Зенон Иванович Боревич (1922–1995)</i> <i>(К 95-й годовщине со дня рождения)</i> . . . . .	59
Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В. <i>Опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка</i> . . . . .	69
<b>Наставник-ученик</b>	
Ермоленко А. В., Осипов К. С. <i>Параллельное программирование в контактных задачах со свободной границей</i> . .	84
Чупраков Д. В., Ведерникова А. В. <i>О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением</i> . . . . .	91
<b>Персоналии</b>	109

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 519.62, 519.63, 532.5**

## ФРОНТАЛЬНАЯ ВОЛНА НАПОРНОГО ТЕЧЕНИЯ

*H. A. Беляева, A. Ф. Яковлева*

Строится неоднородное решение диффузионно-кинетического уравнения модели напорного течения структурированной жидкости в области немонотонности расходно-напорной характеристики. Решение соответствует гетероклинической траектории, соединяющей два устойчивых однородных состояния.

*Ключевые слова:* напорное течение, однородные равновесные состояния, гетероклиническая траектория, бегущая волна.

### 1. Введение

В работе КПП, посвященной распространению доминантного гена [2], впервые представлено решение типа "бегущей волны". В дальнейшем подобные подходы были реализованы в задачах теории горения [4] и других областях математической физики, связанных с решением динамических задач, описываемых параболическими уравнениями [3].

В работах [4], [1] исследовано однородное напорное течение двухкомпонентной структурированной жидкости с переменной вязкостью, определена область значений параметров задачи, соответствующих немонотонному характеру расходно-напорной характеристики и, соответственно, возникновению трех равновесных состояний. При этом два крайних состояния устойчивы, а среднее - неустойчиво.

Целью настоящей работы является исследование неоднородного решения диффузионно-кинетического уравнения модели напорного течения в области немонотонности расходно-напорной характеристики. Решение соответствует гомоклинической траектории, то есть траектории фазового пространства рассматриваемого движения, выходящей из одного состояния равновесия и входящей в другое состояние равновесия.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим безразмерную усредненную по радиусу модель напорного течения двухкомпонентной структурированной жидкости по трубе кругового сечения:

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} + \omega v \frac{\partial a}{\partial x} = \delta \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 1 - a - a\chi \exp\left(\frac{v}{1 + \lambda a}\right), \quad (1)$$

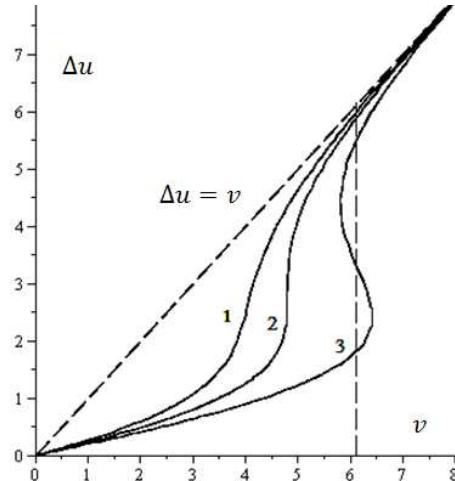
$$\epsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{v}{1 + \lambda a} - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\tau = 0 : v = 0, a = a_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial a}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (4)$$

Здесь (1) – диффузионно-кинетическое уравнение, (2) – уравнение движения,  $a$  – степень структурных превращений,  $v$  – безразмерная скорость течения,  $u$  – давление,  $\tau$  – время,  $x$  – осевая координата  $0 \leq x \leq 1$ ,  $\omega, \delta, \chi, \lambda > 0$  – параметры жидкости.



**Рис. 1.** Расходно-напорная характеристика, 3:  $\lambda = 3, \chi = 0.18$

В работе [1] методом фазового портрета проанализированы соответствующие системе (1)-(4) однородные решения  $a_1 < a_2 < a_3$  в области немонотонности расходно-напорной характеристики рис.1, определяемой уравнением:

$$v = \Delta u \left( 1 + \frac{\lambda}{1 + \chi \exp \Delta u} \right),$$

где  $\Delta u = u(0) - u(1)$  — перепад давления. Показана устойчивость однородных равновесных состояний  $a_1, a_3$ , отвечающих возрастающим участкам расходно-напорной характеристики, неустойчивость состояния  $a_2$ , соответствующего убывающему участку.

Выберем значения параметров жидкости  $\chi, \lambda$ , скорость течения  $v$ , отвечающие немонотонному характеру расходно-напорной характеристики рис.1, кривая 3. При указанном выборе параметров исследуем диффузионно-кинетическое уравнение (1) на формирование неоднородных решений в трубе бесконечной длины, параметр  $\delta = 1$ . Для поиска таких решений применим к уравнению (1) метод «бегущей волны».

Введем переменную

$$\xi = x + \eta\tau,$$

$$-\infty \leq \xi \leq +\infty, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad \tau \geq 0,$$

$\eta$  — скорость волны. Тогда степень структурных превращений  $a$  будем искать в виде:

$$a = a(\xi) = a(x + \eta\tau).$$

В этом случае производные искомой функции  $a$  запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \tau} &= \frac{da}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \eta \frac{da}{d\xi}, \quad \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{da}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{da}{d\xi}, \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial x} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{da}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2 a}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, исследуемая задача, то есть уравнение (1) и граничные условия (4) с учетом (5), преобразуются к виду:

$$\frac{d^2 a}{d\xi^2} - (\eta + \omega v) \frac{da}{d\xi} + 1 - a - a\chi \exp \left( \frac{v}{1 + \lambda a} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{da}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} = \frac{da}{d\xi} \Big|_{\xi \rightarrow +\infty} = 0. \quad (7)$$

В общем случае функция  $a = a(\xi)$  описывает неоднородный переходный процесс между устойчивыми однородными состояниями  $a_1$  и  $a_3$ , т.е. решения, удовлетворяющие условиям:

$$a(-\infty) = a_1, \quad a(+\infty) = a_3, \quad (8)$$

или

$$a(-\infty) = a_3, \quad a(+\infty) = a_1. \quad (9)$$

Введем новые переменные:

$$x_1 = a, x_2 = \frac{da}{d\xi} \quad (10)$$

и обозначим

$$1 - a - a\chi \exp\left(\frac{v}{1 + \lambda a}\right) \equiv F(x_1, v),$$

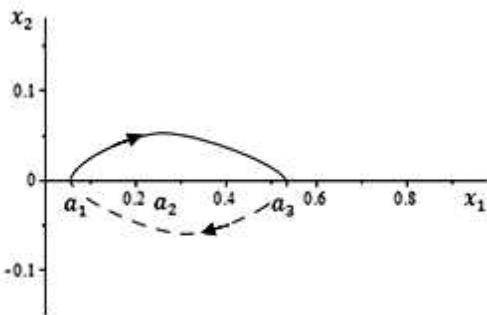
тогда уравнение (6) примет вид нормальной системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\xi} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= (\eta + \omega v) x_2 - F(x_1, v). \end{aligned} \quad (11)$$

Точки равновесия системы (11) определяются условиями:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ (\eta + \omega v) x_2 - F(x_1, v) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Сопоставление системы (12) и условий для определения точек равновесия однородного напорного течения [4], [1] показывает их совпадение при рассматриваемом фиксированном значении скорости течения и параметров жидкости, соответствующих области немонотонности расходно-напорной характеристики. Фазовым пространством системы



**Рис. 2.** Гетероклиническая траектория

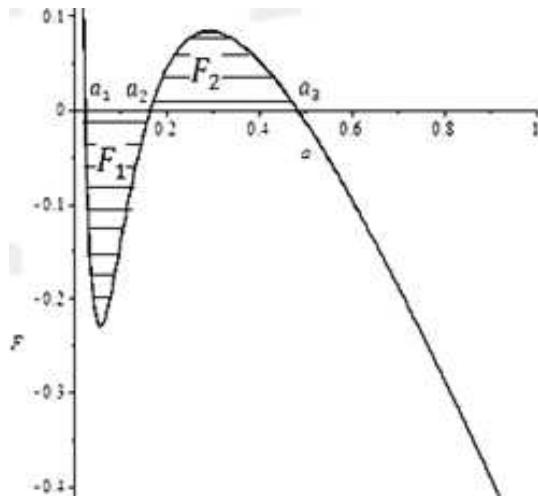
(11) является плоскость  $(x_1, x_2)$ . Нахождение неоднородного решения уравнения (6) между двумя устойчивыми однородными состояниями соответствует построению гетероклинической траектории рис.2, выходящей из одного устойчивого однородного состояния и входящей в другое устойчивое равновесное состояние, т.е. направление движения системы вдоль траекторий: из  $a_1$  в  $a_3$  или, наоборот, из  $a_3$  в  $a_1$ .

### 3. Стоячая волна

Рассмотрим случай, когда  $\eta = -\omega v$ , тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2a}{d\xi^2} + F(a, v) = 0, \quad (13)$$

Покажем, что в этом случае равны площади криволинейных трапеций  $F_1$  и  $F_2$ , отсекаемые графиком функции  $y = F(a, v)$  (скорость  $v$  фиксирована), между равновесными однородными состояниями, то есть на отрезках  $a_1 \leq a \leq a_2$  и  $a_2 \leq a \leq a_3$ , рис. 3.



**Рис. 3.** График функции  $y = F(a, v)$ ,  $v = 6.08927$ ,  $\lambda = 5$ ,  $\chi = 0.18$

Перейдем к переменным  $x_1, x_2$  в соответствии с формулами (10), тогда (13) примет вид нормальной системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\xi} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= -F(x_1, v). \end{aligned}$$

Разделим второе уравнение полученной системы на первое, получим:

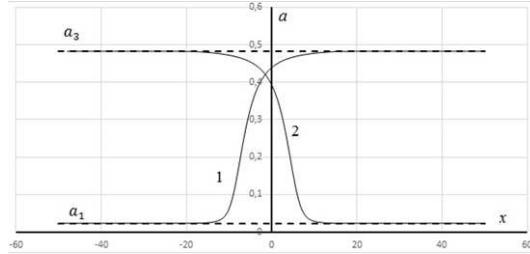
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{F(x_1, v)}{x_2}$$

или

$$x_2 dx_2 = -F(x_1, v) dx_1.$$

Проинтегрируем последнее выражение по отрезку от  $a_1$  до  $a_3$ :

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_3} x_2 dx_2 &= - \int_{a_1}^{a_3} F(x_1, v) dx_1. \\ \frac{x_2^2}{2} \Big|_{a_1}^{a_3} &= - \left( \int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1 + \int_{a_2}^{a_3} F(x_1, v) dx_1, \right) \\ 0 &= \int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1 + \int_{a_2}^{a_3} F(x_1, v) dx_1. \end{aligned} \quad (14)$$



**Рис. 4.** Стоящие волны,  $v = 6.0893, \lambda = 5, \chi = 0.18$

Вследствие того, что площадь трапеции

$$F_1 = - \int_{a_1}^{a_2} F(x_1, v) dx_1,$$

из (14) следует, что площади трапеций равны  $F_1 = F_2$ , то есть условие

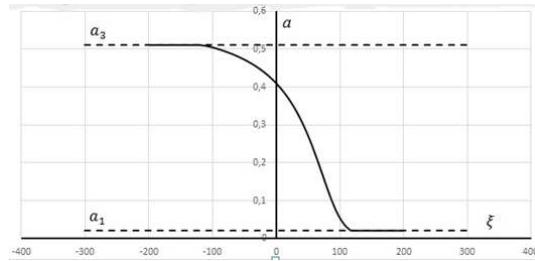
$$\eta = -\omega v \quad (15)$$

является условием равенства площадей. Уравнение (13), ввиду последней формулы соотношений (5), равносильно уравнению

$$\frac{d^2 a}{dx^2} + F(a, v) = 0, \quad (16)$$

которое описывает стационарное течение – стоячую волну. На рис. 4 изображены стоячие волны, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} 1. a(-\infty) &= a_1, & a(+\infty) &= a_3, \\ 2. a(-\infty) &= a_3, & a(+\infty) &= a_1. \end{aligned}$$

Рис. 5.  $\lambda = 8, \chi = 0.3, \omega = 0.001, \eta = 50$ 

#### 4. Бегущая волна

При нарушении условия равенства площадей (15) стоячая волна превращается в бегущую в форме волнового фронта. Этот случай соответствует модели (6)-(7). Данная модель решается численно с использованием метода прогонки.

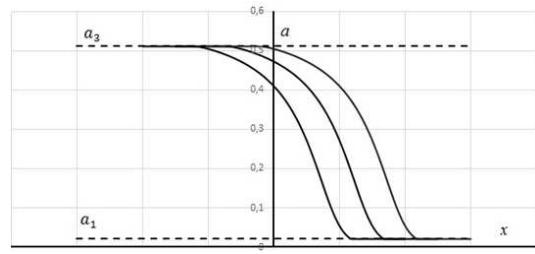
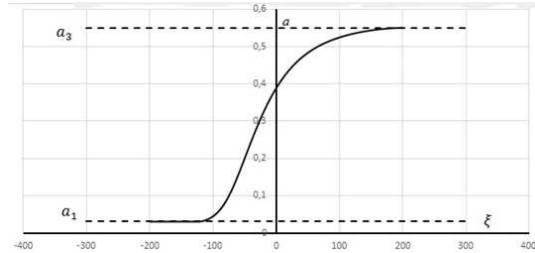


Рис. 6. Условия на рис. 5

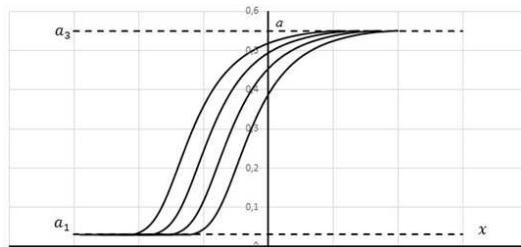
Результаты численного анализа представлены на рис. 5–8. В случае  $\eta > 0$  волновой фронт движется слева направо – реализуется случай, соответствующий рис. 5, 6:  $a(-\infty) = a_3, a(+\infty) = a_1$ .

Заметим при этом, что на рис. 6 осуществлен возврат к исходной переменной  $x$  и показано положение фронта в разные моменты времени.

Рис. 7.  $\lambda = 5, \chi = 0.16, \omega = 0.001, \eta = -30$ 

В случае  $\eta < 0$  волновой фронт движется справа налево – реали-

зуется случай, изображенный на рис. 7, 8 и соответствующий условиям:  
 $a(-\infty) = a_1, \quad a(+\infty) = a_3$ .



**Рис. 8.** Условия на рис. 7

Таким образом, модель (6), (7) определяет семейство ограниченных монотонно возрастающих или монотонно убывающих решений двигающихся в направлении оси  $x$  вправо или влево с постоянной скоростью  $\eta$ . При этом область распространения фронтальной волны достаточно узка.

## Список литературы

1. **Беляева Н. А., Сажина А. Н.** Анализ усредненного напорного течения / Беляева Н. А., Сажина А. Н.// Двадцать третья годичная сессия Ученого совета Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина (Февральские чтения): сборник материалов / отв.ред. Н. С. Сергиева. Сыктывкар: Изд–во СГУ им. Питирима Сорокина, 2016. С. 60–69.
2. **Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблемме / Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.// М.: Бюл. МГУ. Секция А. 1937.
3. **Холодниок М., Кулич А., Кубичек М., Марек М.** Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991. 368 с.
4. **Худяев С. И.** Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

### Summary

**Belyaeva N. A., Yakovleva A. F.** Frontal wave of pressure flow

The model of a pressure flow of a structured liquid is analyzed. An inhomogeneous solution of the diffusion-kinetic equation is constructed in the region of nonmonotonicity of the discharge-pressure characteristic. This solution corresponds to a heteroclinic trajectory connecting two stable homogeneous states.

*Keywords:* pressure flow, homogeneous equilibrium states, heteroclinic trajectory, traveling wave.

### References

1. **Belyaeva N. A., Sazhina A. N.** *Analysis of the averaged pressure flow* / Belyaeva N. A., Sazhina A. N. / Twenty-third annual session of the Academic Council of Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin (February readings): a collection of materials / Otv.red. N. S. Sergiev. Syktyvkar: Publishing House of SSU. Pitirima Sorokina, 2016, pp. 60–69.
2. **Kolmogorov A. N, Petrovsky I. G, Piskunov N. S.** An investigation of the diffusion equation, coupled with the increase in the amount of matter, and its application to a single biological problem, *Bul. Moscow State University. Section A*, 1937, 633 p.
3. **Kholodnik M., Klich A., Kubichek M., Marek M.** *Methods of analysis of nonlinear dynamic models* / Kholodnik M., Klich A., Kubichek M., Marek M. Moscow: Peace, 1991, 368 p.
4. **Khudyaev, S. I.** *Threshold phenomena in nonlinear equations* / S. I. Khudyaev, M.: Fizmatlit, 2003, 272 p.

**Для цитирования:** Беляева Н. А., Яковлева А. Ф. Фронтальная волна напорного течения // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 3–11.

**For citation:** Belyaeva N. A., Yakovleva A. F. Frontal wave of pressure flow, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 3–11.

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

УДК 531.011, 51–72

## О ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ МЕХАНИКИ КОНСЕРВАТИВНЫХ И НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

*П. А. Макаров*

На основе принципа Гамильтона—Остроградского, применённого к движению консервативных и неконсервативных систем, составлены однородные и неоднородные уравнения Эйлера—Лагранжа. Рассмотрен пример плоского движения материальной точки. Определено влияние диссипативных сил на характеристики движения.

*Ключевые слова:* механическое действие по Гамильтону, вариационные принципы движения, уравнение Эйлера—Лагранжа, прямой и окольный путь, диссипация энергии.

### 1. Введение

Вариационные принципы играют огромную роль как непосредственно в аналитической механике, так и во многих разделах теоретической физики, строящихся на её основе [1–5]. Вместе с тем, опыт преподавания теоретической механики в университете показывает, что аудиторное время на практическое освоение этих принципов крайне ограничено. Таким образом, имеется существенная необходимость демонстрации применения вариационных принципов на конкретных примерах.

Очевидно, что для развития навыков студентов следует подбирать такие задачи, которые являются достаточно наглядными, относительно простыми в решении, и, вместе с тем, могут быть несколько усложнены с целью демонстрации трудностей, возникающих при решении задач, приближенных к реальным научным расчётам.

В качестве демонстрационной задачи, иллюстрирующей основные приёмы аналитической механики Гамильтона—Остроградского возьмём за основу один из классических примеров движения материальной точки, предложенный Ф. А. Слудским [6].

## 2. Основные принципы

Как известно [1–5], положение механической системы можно задать вектором в конфигурационном пространстве обобщённых координат  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_s) \in R^s$ , где  $s$  — число степеней свободы системы.

С течением времени  $t$  состояние системы изменяется, а значит вектор  $\mathbf{q}(t)$  описывает в конфигурационном пространстве некоторую кривую — траекторию движения. Вектор  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) \in R^s$  называют обобщённой скоростью системы.

Механическим действием  $S$  по Гамильтону называют функционал на конфигурационном пространстве состояний:

$$S[\mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt, \quad (1)$$

где лагранжиан  $L$  — функция, равная разности кинетической энергии системы  $T$  и обобщённой потенциальной функции  $\Pi$ :

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \Pi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (2)$$

Основу вариационной формулировки механики составляет принцип Гамильтона—Остроградского, утверждающий, что действительное движение системы при её переходе из положения  $\mathbf{q}(t_1)$  в положение  $\mathbf{q}(t_2)$  происходит таким образом, что механическое действие (1), вычисленное по прямому пути, имеет стационарное значение по сравнению со значениями, которые действие принимает при движении системы по окольным путям, близким к прямому и проходящим через те же точки  $\mathbf{q}(t_1)$  и  $\mathbf{q}(t_2)$ . Известно, что при достаточной близости начального и конечного положений на действительной траектории достигается минимум действия [1–5].

Таким образом, вариационная производная (а значит и вариация) действия на истинной траектории движения в конфигурационном пространстве равна нулю:

$$\frac{\delta S}{\delta \mathbf{q}(t)} = 0 \iff \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (3)$$

Хорошо известно [1–5], что принцип стационарного действия (3) эквивалентен уравнениям движения системы в форме дифференциальных уравнений Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (4)$$

Все сказанное выше относилось непосредственно к движению механической системы. Задача о движении тела в среде выходит за рамки «чистой» механики [4, 5]. Это связано с тем, что среда оказывает сопротивление движению тела, в результате чего энергия движущегося тела постепенно переходит в немеханические виды энергии. Для оценки этого влияния необходимо рассматривать движение среды, внутреннее тепловое состояние как среды, так и тела. Вместе с тем, известно [1–4], что вариационный принцип Гамильтона—Остроградского справедлив и в случае неконсервативной системы. В этом случае он формулируется следующим образом:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0, \quad (5)$$

где  $\delta W$  — виртуальная работа неконсервативных сил, приводящая к изменению полной энергии механической системы:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i, \quad (6)$$

здесь и далее  $N$  — число материальных точек системы.

В случае склерономной системы ( $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ) имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j, \quad (7)$$

где обобщенная неконсервативная сила  $Q_j$ , соответствующая обобщенной координате  $q_j$  может быть представлена с помощью функции  $\mathcal{R}$ , удвоенное значение которой имеет физический смысл скорости изменения энергии системы:

$$Q_j = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (8)$$

Принцип (5) позволяет получить уравнения движения в форме неоднородных уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j, \quad i = 1, \dots, s. \quad (9)$$

Существует достаточно большое количество задач, в которых сопротивление оказываемое средой пропорционально скорости движущегося тела. В этих случаях силы трения могут быть выражены через диссипативную функцию Рэлея:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2). \quad (10)$$

При этом очевидно

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{v}_i} \mathcal{R}. \quad (11)$$

### 3. Демонстрационная модель

**3.1. Консервативная система  $\mathcal{R} = 0$ .** Рассмотрим тело массы  $m$  и настолько малых размеров, что в условиях нашей задачи его можно считать материальной точкой. Пусть тело брошено под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$  и движется в однородном поле силы тяжести с ускорением свободного падения  $\mathbf{g}$ . Введем систему координат  $Oxz$  в плоскости траектории, так что ось  $Ox$  горизонтальна, а  $Ozg$ .

Очевидно, что в данном случае число степеней свободы системы  $s = 2$ . В качестве обобщённых координат удобно выбрать декартовы координаты центра тяжести тела  $\mathbf{q} = (x, z)$ , при этом обобщенные скорости  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}, \dot{z})$ . Функция Лагранжа (2) при наших соглашениях имеет вид:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (12)$$

Начальные условия при  $t_0 = 0$ :

$$x(0) = z(0) = 0, \quad v_x(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_z(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (13)$$

Решение этой части задачи хорошо освещено в учебной литературе [1–5], поэтому ограничимся здесь лишь кратким перечислением тех основных результатов, которые потребуются нам в дальнейшем.

Составив и решив систему дифференциальных уравнений Лагранжа (4) с лагранжианом (12), получим известный закон движения тела по параболической траектории, который с учётом начальных условий (13) имеет вид:

$$\begin{cases} \mathcal{X}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \mathcal{Z}(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \quad (14)$$

Из уравнений движения (14) очевидно, что в момент времени

$$\mathcal{T}_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \quad (15)$$

материальная точка оказывается на максимальной высоте:

$$\mathcal{H} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (16)$$

Также несложно определить, что в момент времени

$$\mathcal{T}_2 = 2\mathcal{T}_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad (17)$$

тело пересекает ось  $Ox$  в некоторой точке  $\mathcal{A}$ , так что горизонтальная дальность полёта вычисляется так:

$$\mathcal{D} = |O\mathcal{A}| = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (18)$$

Дифференцируя уравнения движения (14) определяем скорость движения тела

$$\begin{cases} \mathcal{V}_x(t) = v_0 \cos \alpha, \\ \mathcal{V}_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \end{cases} \quad (19)$$

**3.2. Система с однородной и изотропной диссипацией.** Рассмотрим случай, когда сопротивление среды обладает свойствами изотропии и однородности по отношению к направлению перемещения тела, т. е. коэффициенты функции Рэлея (10) совпадают  $k_x = k_z = k$  и не являются функциями координат и скоростей тела. Тогда

$$\mathcal{R} = \frac{k}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad Q_1 = -k\dot{x}, \quad Q_2 = -k\dot{z}. \quad (20)$$

Составим уравнения Лагранжа в форме (9) для нашего случая и запишем их в канонической форме:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\tau} = -g, \end{cases} \quad (21)$$

где введён параметр  $\tau = m/k$  — характерное время диссипации энергии для тела массы  $m$  движущегося в среде с коэффициентом сопротивления  $k$ .

Общие решения уравнений (21) имеют вид:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t/\tau} + C_2, \\ z(t) = C_3 e^{-t/\tau} + C_4 - g\tau t, \end{cases} \quad (22)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные константы. Для их определения используем начальные условия (13), что даёт:

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_3 = -C_4, \\ C_1 = -v_0 \tau \cos \alpha, \\ C_3 = -\tau(v_0 \sin \alpha + g\tau). \end{cases} \quad (23)$$

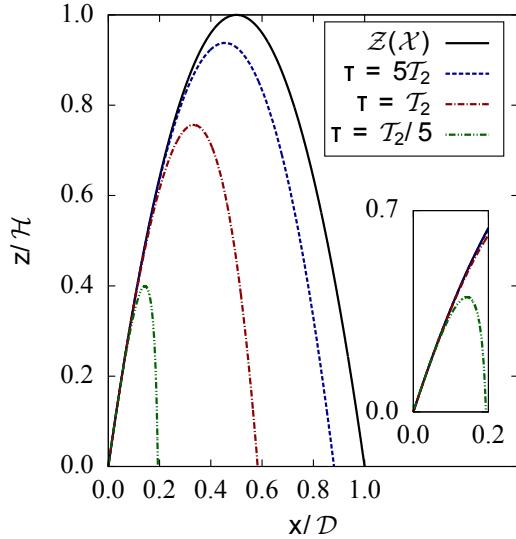
Окончательно, получаем уравнение траектории в следующем виде:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}), \\ z(t) = (v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t. \end{cases} \quad (24)$$

О степени влияния сопротивления на движении тела качественно можно судить по соотношению величин  $\tau$  и  $\mathcal{T}_2$ . Будем считать трение достаточно слабым, если  $\tau \gg \mathcal{T}_2$ , и весьма существенным в обратном случае:  $\tau \ll \mathcal{T}_2$ .

Рис. 1 демонстрирует траектории движения тела в бездиссипативной среде, даваемые уравнениями (14), а также траектории (24) тела, движущегося под действием сильного, слабого и промежуточного трения.

Как и предполагалось выше, из рис. 1 видно, что сопротивление среды существенно искажает траекторию движения тела при  $\tau \lesssim \mathcal{T}_2$ . Вместе с тем, временные параметры движения этот рисунок не иллюстрирует, поэтому более подробную информацию о влиянии трения на



**Рис. 1.** Траектории тела в средах без трения и с трением

характер движения тела с течением времени можно получить из рис. 2.

Время подъёма  $t_1$  тела до максимальной высоты  $h = z_{\max}$  получаем из известных условий:

$$\frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_1} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} \Big|_{t=t_1} < 0, \quad (25)$$

$$t_1 = \tau \ln \left( 1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau} \right) = \tau \ln \left( 1 + \frac{\mathcal{T}_1}{\tau} \right). \quad (26)$$

Из соотношения (26) очевидно, что

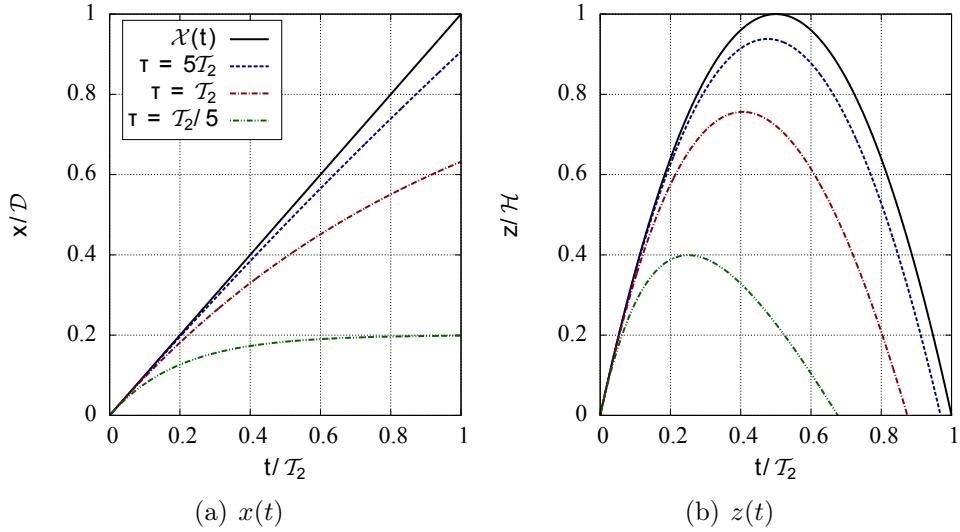
$$t_1 \leq \mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{T}_2}{2}, \quad (27)$$

причём равенство имеет место в только отсутствии диссипации, т. е. при  $\tau \rightarrow \infty$ . Зависимость  $t_1(\tau)$  в нормированном виде, определяемая уравнением (26), представлена кривой (а) на рис. 3(а).

Максимальное значение высоты при этом равно:

$$h = z(t_1) = v_0 \tau \sin \alpha - g\tau^2 \ln \left( 1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{g\tau} \right) = g\tau (\mathcal{T}_1 - t_1). \quad (28)$$

Анализ (28) показывает, что  $h \leq \mathcal{H}$  при любых значениях времени диссипации  $\tau \in [0, +\infty)$ . График зависимости  $h(\tau)$  в нормированном виде представлен кривой (а) на рис. 3(б).



**Рис. 2.** Временные зависимости координат тела в средах без трения и с трением

Время падения груза  $t_2$  можно определить из условия  $z(t_2) = 0$ , которое в нашей задаче может быть приведено к виду:

$$\frac{t_2}{1 - e^{-t_2/\tau}} = \tau + \mathcal{T}_1. \quad (29)$$

Решение трансцендентного уравнения (29) удобно представить с помощью следующей специальной функции:

$$\mathcal{F}(\xi; \xi_0) = \frac{\xi}{1 - e^{-\xi/\xi_0}} - \xi_0. \quad (30)$$

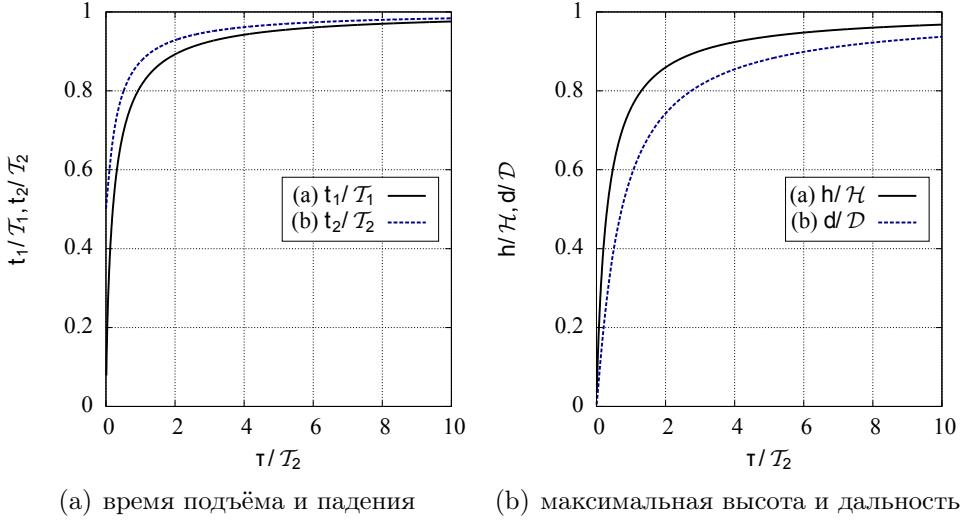
Семейство кривых  $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$  при различных значениях параметра  $\xi_0$  и переменной  $\xi$  приведено на рис. 4. Анализ функции (30) и рис. 4 показывают, что  $\mathcal{F}(\xi; 0) = \xi$ ,  $\mathcal{F}(\xi; \infty) = \xi/2$  и  $\xi/2 < \mathcal{F}(\xi; \xi_0) < \xi$  для всех промежуточных значений  $\xi_0$ .

С помощью функции (30) уравнение (29) можно представить в виде:

$$\mathcal{F}(t_2; \tau) = \mathcal{T}_1, \quad (31)$$

откуда время падения тела выражается следующим образом:

$$t_2 = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{T}_1; \tau). \quad (32)$$



**Рис. 3.** Влияние диссипации на основные характеристики движения

В решение (32) введена обратная к  $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$  функция, такая, что  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\xi; \xi_0); \xi_0) = \xi$ . Зависимость  $t_2(\tau)$  в нормированном виде, определяемая уравнением (32), представлена кривой (b) на рис. 3(а). Для времени падения  $t_2$  характерно то, что в случае «критической» диссипации энергии  $\lim_{\tau \rightarrow 0} t_2(\tau) = \mathcal{T}_1$ , в то время как время подъёма  $\lim_{\tau \rightarrow 0} t_1(\tau) = 0$ .

Горизонтальная дальность полёта, определяемая из условия  $d = x(t_2)$ , равна:

$$d = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t_2/\tau}) = \mathcal{D} \cdot \frac{t_2}{\mathcal{T}_2} \cdot \frac{\tau}{\tau + \mathcal{T}_1}. \quad (33)$$

График зависимости  $d(\tau)$  в нормированном виде, определяемой соотношением (33), представлен кривой (b) на рис. 3(b). Из рисунка очевидно, что на дальность полёта  $d$  сопротивление среды оказывает более существенное влияние, чем на высоту подъёма  $h$ , однако при «критической» диссипации энергии  $\lim_{\tau \rightarrow 0} h(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} d(\tau) = 0$ .

Скорость движения тела в среде с диссипацией определим дифференцируя уравнения движения (24):

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau}, \\ v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau. \end{cases} \quad (34)$$

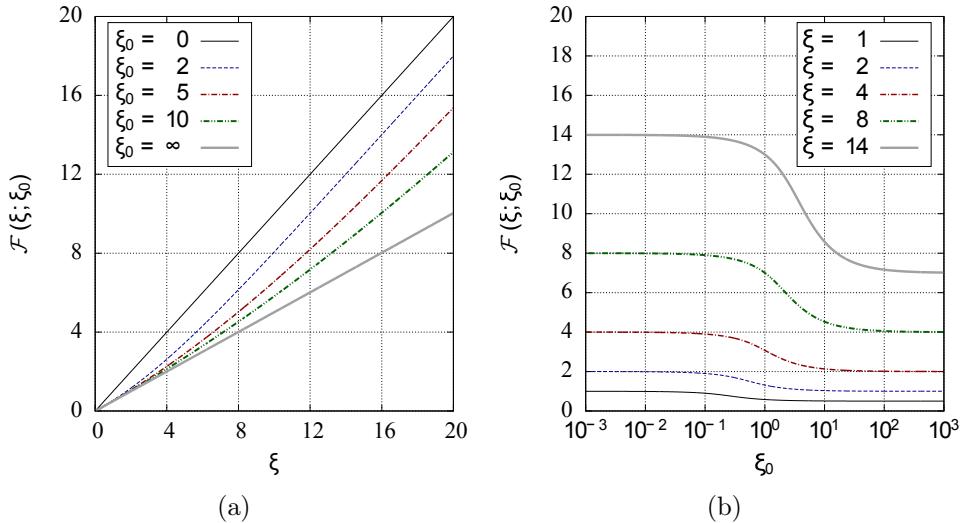


Рис. 4. Семейство кривых  $\mathcal{F}(\xi; \xi_0)$ , определяемых соотношением (30)

#### 4. Об экстремальности действия

В данном разделе рассмотрим консервативную систему  $\mathcal{R} = 0$ . Вычислим действие (1) на истинном движении, происходящем по закону (14):

$$\mathcal{S} = m \int_0^{\mathcal{T}_2} \left[ \frac{\mathcal{V}_x^2(t) + \mathcal{V}_z^2(t)}{2} - g \mathcal{Z}(t) \right] dt = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \right). \quad (35)$$

Вместе с тем материальная точка может попасть из начального положения в конечное и по другим траекториям. Исследуем подробнее несколько типов таких траекторий.

1. В своей оригинальной работе Ф. А. Слудский [6] предложил равномерное прямолинейное движение:

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{X}}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \bar{\mathcal{Z}}(t) = \text{const} = 0. \end{cases} \quad (36)$$

2. Кроме того, исследуем движение происходящее по гармоническому закону:

$$\begin{cases} \check{\mathcal{X}}(t) = v_0 t \cos \alpha, \\ \check{\mathcal{Z}}(t) = \mathcal{H} \sin \left( \frac{\pi}{\mathcal{T}_2} t \right). \end{cases} \quad (37)$$

3. Следуя работе [2] также рассмотрим движение, заданное степенным законом:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{X}}(t) = at, \\ \tilde{\mathcal{Z}}(t) = bt - ct^\gamma, \end{cases} \quad (38)$$

где  $a, b, c, \gamma = \text{const}$ ,  $\gamma > 0$ .

Начальные положения материальной точки для движений (38) и (14) совпадают. Запишем условия, обеспечивающие совпадение её положений в момент окончания движения:

$$a = v_0 \cos \alpha, \quad c = b \tilde{\mathcal{T}}_2^{1-\gamma}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_2 = \mathcal{T}_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (39)$$

Параметр  $b$  при этом может быть произвольным, но если выбрать значение  $b = v_0 \sin \alpha$ , что обеспечит совпадение начальных скоростей на истинной и рассматриваемой траекториях, то семейство траекторий (38), (39) будет зависеть только от параметра  $\gamma$ . В этом семействе при  $\gamma = 2$  содержится истинное движение (14), а при  $\gamma = 1$  — траектория сравнения (36), предложенная Слудским.

На прямолинейном движении (36) действие имеет значение

$$\bar{\mathcal{S}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} (1 - \sin^2 \alpha). \quad (40)$$

На движении, происходящем по гармоническому закону (38) действие равно

$$\check{\mathcal{S}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \left( 1 - \frac{32\pi + 64 - \pi^3}{32\pi} \sin^2 \alpha \right). \quad (41)$$

Анализ выражений (35), (40) и (41) показывает, что  $\mathcal{S} \leq \check{\mathcal{S}} \leq \bar{\mathcal{S}}$ , причём равенство имеет место только в случае прямолинейного горизонтального движения, т. е. когда  $\alpha = 0$ .

Таким образом, на первый взгляд, примеры 1 и 2 подтверждают принцип стационарного действия Гамильтона—Остроградского (3).

Теперь рассмотрим подробнее пример 3. Для этого вычислим скорости точек, движущихся по траекториям сравнения:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{V}}_x(t) = a, \\ \tilde{\mathcal{V}}_z(t) = b - c\gamma t^{\gamma-1}, \end{cases} \quad (42)$$

составим функцию Лагранжа и найдём значение действия на траектории (38) при условиях (39):

$$\tilde{\mathcal{S}} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \left( 1 - \frac{\gamma(\gamma^2 - 7\gamma + 4)}{(\gamma + 1)(2\gamma - 1)} \sin^2 \alpha \right). \quad (43)$$

Составим разность действия на траекториях сравнения (43) и на истинном движении (35):

$$\tilde{\mathcal{S}} - \mathcal{S} = \frac{mv_0^2 \mathcal{T}_2}{2} \cdot \frac{(3\gamma - 1)(\gamma - 2)^2}{3(\gamma + 1)(2\gamma - 1)} \sin^2 \alpha. \quad (44)$$

В диапазоне значений параметра  $1/3 < \gamma < 1/2$  разность (44) принимает отрицательные значения. Следовательно, действие на соответствующих кривых сравнения меньше, чем на траектории истинного движения.

Несмотря на кажущийся парадокс, данный пример не противоречит принципу стационарного действия. Дело в том, что траектории (38), (39), предложенные в работе [2], не являются окольными путями, т. к. не находятся в слабой окрестности траектории истинного движения (14).

При построении семейства сравнения в слабой окрестности истинного движения при линейной зависимости от параметра  $\beta$  должно выполняться:

$$q_i(t, \beta) = q_i(t) + \beta \xi_i(t), \quad \dot{q}_i(t, \beta) = \dot{q}_i(t) + \beta \eta_i(t), \quad (45)$$

то есть

$$\delta q_i(t) = \beta \xi_i(t), \quad \delta \dot{q}_i(t) = \beta \eta_i(t).$$

Время  $t$  не варьируется. В общем случае возможно  $\eta_i \neq \dot{\xi}_i$ .

Несмотря на то, что кривые (38), (39) не являются окольными путями, из (44) видно, что движение по квадратичной параболе обеспечивает локальный минимум действия по параметру  $\gamma$ .

Траектории (36) и (37), рассмотренные в примерах 1 и 2, являются окольными путями, т. к. для любого параметра  $\beta$  всегда можно определить функции  $\xi_1, \xi_2, \eta_1$  и  $\eta_2$  обеспечивающие условия изохронной близости траекторий (45). Поэтому, в полном соответствии с принципом Гамильтона—Остроградского, действие (35), вычисленное на прямом пути, принимает минимальное значение по сравнению со значениями (40) и (41), вычисленными на окольных путях.

## 5. Выводы

Таким образом, в данной работе продемонстрировано применение основополагающих принципов аналитической механики к движению консервативных и неконсервативных систем. На примере нескольких траекторий сравнения обсуждены условия, при которых их можно считать окольными путями. Для окольных путей установлено, что механическое действие по Гамильтону имеет минимум в случае достаточно близкого положения начальной и конечной точек траектории. Кроме того, рассмотрено влияние диссипативных сил на важнейшие характеристики движения: горизонтальную дальность и высоту полёта, а также времена подъёма и падения.

## Список литературы

1. **Веретенников В. Г., Синицин В. А.** Метод переменного действия. 2-е изд., исправ. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 272 с.
2. **Веретенников В. Г., Синицин В. А.** Теоретическая механика (дополнения к общим разделам). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 416 с.
3. **Гантмахер Ф. Р.** Лекции по аналитической механике. 2-е. изд., исправ. М.: Наука, 1966. 300 с.
4. **Голдстейн Г.** Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.
5. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика: учеб. пос. в 10 т. Т. I. Механика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 224 с.
6. **Слудский Ф. А.** Заметка о начале наименьшего действия // *Вариационные принципы механики / Под ред. Полака Л. С.* М.: Физматгиз, 1959. С. 388–391.

### Summary

**Makarov P. A.** On the variational principles of the mechanics of conservative and non-conservative systems

On the basis of the Hamilton—Ostrogradsky principle, applied to the motion of conservative and non-conservative systems, homogeneous and inhomogeneous Euler—Lagrange equations was compiled. An example of a plane motion of a material point is considered. The influence of dissipative forces on the characteristics of motion is determined.

*Keywords: Hamilton's mechanical action, variational principles of motion, the Euler—Lagrange equation, straight and circuitous paths, energy dissipation.*

### References

1. Veretennikov V. G., Sinitzin V. A. *Method of variable action*, 2 ed, M.: FIZMATLIT, 2005, 272 p.
2. Veretennikov V. G., Sinitzin V. A. *Theoretical mechanics (additions to the general sections)*, M.: FIZMATLIT, 2006, 416 p.
3. Gantmacher F. R. *Lectures in analytical mechanics*, 2 ed, M.: Science, 1966, 300 p.
4. Goldstein G. *Classical mechanics*, M.: Science, 1975, 416 p.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Theoretical physics: V. I, Mechanics*, 5 ed, M.: FIZMATLIT, 2007, 224 p.
6. Sludsky F. A. A note on the principle of least action, *Variational principles of mechanics*, M.: FIZMATGIZ, 1959, pp. 388–391.

**Для цитирования:** Макаров П. А. О вариационных принципах механики консервативных и неконсервативных систем // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 12–25.

**For citation:** Makarov P. A. On the variational principles of the mechanics of conservative and non-conservative systems, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 12–25.

# ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 539.3**

## О КОЛЕБАНИЯХ КОЛЬЦА, ПОДКРЕПЛЕННОГО НИТЯМИ

*A. B. Михайлов*

Рассматриваются задачи о колебаниях упругих колец подкрепленных упругими нитями; задачи об устойчивости упругих колец, находящихся под действием пульсирующей нагрузки.

*Ключевые слова:* кольцо, колебание, устойчивость, собственная частота, уравнение Эйлера–Остроградского, матрица монодромии, уравнение Матье.

**1. Свободные колебания кольца в упругой среде.** Дано кольцо радиуса  $R$ . Пусть  $s$  – длина дуги кольца,  $\vartheta$  – центральный угол, отсчитываемый от оси  $x$ ,  $\varphi(s)$  – угол между касательной к деформированной оси кольца и осью абсцисс,  $w$  – перемещения точек кольца по нормали к недеформированной оси кольца,  $v$  – перемещения точек кольца по касательной (рис. 1).

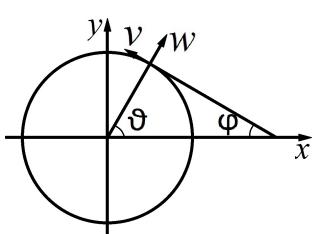


Рис. 1. Кольцо

Для данного случая имеют место уравнения

$$\begin{cases} x'_s(s) = \cos \varphi(s), \\ y'_s(s) = \sin \varphi(s). \end{cases}$$

Предполагаем, что ось кольца является нерастяжимой, т.е.  $ds = R d\vartheta$ . Таким образом, координаты и перемещения точек кольца можно рассматривать как функции от центрального угла  $\vartheta$ , которые будем обозначать  $x(\vartheta)$ ,  $y(\vartheta)$ ,  $w(\vartheta)$ ,  $v(\vartheta)$  и т.д. Далее штрихом будем обозначать производную по центральному углу  $\vartheta$ , а точкой – производную по времени  $t$ .

Координаты точек деформированного кольца по известным перемещениям вычисляются по формулам

$$\begin{cases} x(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \cos \vartheta - v(\vartheta) \sin \vartheta, \\ y(\vartheta) = (R + w(\vartheta)) \sin \vartheta + v(\vartheta) \cos \vartheta. \end{cases} \quad (1)$$

Дифференцируя равенства (1), получаем

$$\begin{cases} x' = (w' - v) \cos \vartheta - (R + w + v') \sin \vartheta, \\ y' = (w' - v) \sin \vartheta + (R + w + v') \cos \vartheta. \end{cases} \quad (2)$$

Упругая энергия деформированного кольца в квадратичном приближении [3] равна

$$U = \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta, \quad (3)$$

где  $D$  — цилиндрическая жесткость кольца при изгибе.

В случае прямоугольного сечения кольца она вычисляется по формуле  $D = Eab^3/12$ , где  $E$  — модуль Юнга,  $a$  и  $b$  — длины сторон прямоугольника, причем  $a > b$ .

Кинетическая энергия кольца определяется формулой:

$$T = \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta,$$

где  $\rho$  — линейная (погонная) плотность материала кольца.

Условие несжимаемости оси кольца  $x'^2 + y'^2 = R^2$  с учетом выражений (2) принимает вид

$$(w' - v)^2 + (R + w + v')^2 = R^2. \quad (4)$$

Проинтегрировав выражение (4), учитывая периодичность  $v(\vartheta)$

$$\int_0^{2\pi} v' d\vartheta = v(2\pi) - v(0) = 0,$$

и отбросив нелинейные слагаемые, получаем условие несжимаемости в виде

$$v' = -w. \quad (5)$$

Так же предполагаем, что кольцо подкреплено нитями, обладающими жесткостью  $c$ . Упругая энергия нитей вычисляется по формуле

$$U_1 = \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta. \quad (6)$$

Учитывая (6), упругая энергия кольца (3) принимает вид

$$U = \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta + \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta.$$

Для получения уравнений колебания кольца применим принцип наименьшего действия [3]: если  $T$  — кинетическая энергия системы,  $U$  — потенциальная энергия, то «истинное движение» в фазовом пространстве дает минимум функционалу:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt.$$

В нашем случае функционал действия  $J$  имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta \right] dt. \quad (7)$$

С учетом (5), (7) функционал  $J$  запишем в виде:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{v}^2 + \dot{v}'^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (v''' + v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta \right] dt. \quad (8)$$

Выпишем для функционала (8), уравнение Эйлера–Остроградского:

$$R\rho(\ddot{v} - \ddot{v}'') = \frac{D}{R^3}(v^{VI} + 2v^{IV} + v'') + cv''. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) ищем в виде:

$$v(\vartheta, t) = \xi(t)\eta(\vartheta). \quad (10)$$

С учетом (10) получаем

$$R\rho(\ddot{\xi}\eta - \ddot{\xi}\eta'') = \frac{D}{R^3}(\xi\eta^{VI} + 2\xi\eta^{IV} + \tilde{c}\xi\eta''), \text{ где } \tilde{c} = 1 + \frac{cR^3}{D}. \quad (11)$$

Разделяем переменные:

$$\frac{R^4\rho}{D}\frac{\ddot{\xi}}{\xi} = \frac{\eta^{VI} + 2\eta^{IV} + \tilde{c}\eta''}{\eta - \eta''} = -p^2. \quad (12)$$

Уравнение (12) разбивается на два уравнения:

$$\ddot{\xi} + \frac{D}{R^4\rho}p^2\xi = 0, \quad (13)$$

$$\eta^{VI} + 2\eta^{IV} + \tilde{c}\eta'' + p^2(\eta - \eta'') = 0. \quad (14)$$

Уравнение (13) означает, что движение носит колебательный характер, а уравнение (14) описывает форму колебаний [6].

Решение (13) имеет вид

$$\xi = C_1 \sin \omega_k t + C_2 \cos \omega_k t,$$

где  $\omega_k = \sqrt{\frac{Dp_k^2}{R^4\rho}}$  - частота собственных колебаний.

Решение уравнения (14) должно быть  $2\pi$ -периодическим. Этому условию удовлетворяет функция вида:

$$\eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(t) \sin(k\vartheta) + b_k(t) \cos(k\vartheta)). \quad (15)$$

Подставляем ряд (15) в (14) и с учетом ортогональности системы  $\{\sin(k\vartheta); \cos(k\vartheta)\}$  получаем

$$\eta = [-k^6 + 2k^4 - (\tilde{c} - p^2)k^2 + p^2] (\sin(k\vartheta) + \cos(k\vartheta)).$$

Нетривиальное решение существует, если

$$k^6 - 2k^4 + (\tilde{c} - p^2)k^2 - p^2 = 0.$$

Откуда находим зависимость частоты собственных колебаний от номера гармоники [6]

$$p_k^2 = \frac{k^6 - 2k^4 + \tilde{c}k^2}{k^2 + 1}.$$

Общее решение (9) определяется формулой:

$$\begin{aligned} v(\vartheta, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_{1k} \sin(\omega_k t) + C_{2k} \cos(\omega_k t) \right) \sin(k\vartheta) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \widetilde{C}_{1k} \sin(\omega_k t) + \widetilde{C}_{2k} \cos(\omega_k t) \right) \cos(k\vartheta). \end{aligned} \quad (16)$$

Для определения движения необходимы начальные условия:

$$v(\vartheta, 0) = v_0(\vartheta), \quad \dot{v}(\vartheta, 0) = \dot{v}_0(\vartheta),$$

где  $v_0$  и  $\dot{v}_0$  известные значения.

Раскладывая их в ряд Фурье, используя (16), можно определить коэффициенты  $C_{1k}$ ,  $C_{2k}$ ,  $\widetilde{C}_{1k}$ ,  $\widetilde{C}_{2k}$ .

Например, пусть заданы следующие начальные условия

$$\begin{aligned} v(\vartheta, 0) = & \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \sin(\vartheta) + \beta_k \cos(\vartheta)), \\ \dot{v}(\vartheta, 0) = & \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_k \sin(\vartheta) + \delta_k \cos(\vartheta)), \end{aligned}$$

где  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\delta_k$  — известные коэффициенты.

С другой стороны, подставляя в (16)  $t = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} v(\vartheta, 0) = & \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \sin(k\vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_{2k} \cos(k\vartheta), \\ \dot{v}(\vartheta, 0) = & \sum_{k=1}^{\infty} C_{1k} \omega_k \sin(k\vartheta) + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{C}_{1k} \omega_k \cos(k\vartheta). \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициенты

$$C_{1k} = \frac{\gamma_k}{\omega_k}, \quad C_{2k} = \alpha_k, \quad \widetilde{C}_{1k} = \frac{\delta_k}{\omega_k}, \quad \widetilde{C}_{2k} = \beta_k.$$

**2. Колебания кольца, подкрепленного нитями одностороннего действия.** Предположим, что кольцо подкреплено нитями, которые не воспринимают сжимающих усилий, т.е. упругая энергия нитей определяется формулой

$$U_2 = \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w_+^2 d\vartheta,$$

где  $w_+$  — положительная срезка функции:

$$w_+ = \max\{0, w\} = \frac{w + |w|}{2}.$$

Один конец нити прикреплен к точке кольца, а другой — к неподвижному центру.

В данном случае функционал  $J$  принимает вид

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + v')^2 d\vartheta - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w_+^2 d\vartheta \right] dt. \quad (17)$$

Перемещения точек кольца ищем в виде

$$v = \sum_{k=1}^N (A_k(t) \sin(k\vartheta) + B_k(t) \cos(k\vartheta)),$$

$$w = \sum_{k=1}^N (k A_k(t) \cos(k\vartheta) - k B_k(t) \sin(k\vartheta)).$$

Согласно принципу наименьшего действия, функционал (17) принимает стационарное значение.

Выпишем для него уравнения Эйлера относительно  $A_k$  и  $B_k$

$$\begin{aligned} R\rho\pi(1+k^2)\ddot{A}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 A_k + c \int_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta &= 0, \\ R\rho\pi(1+k^2)\ddot{B}_k + \frac{D}{R^3}\pi(k^3-k)^2 B_k - c \int_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta &= 0, \end{aligned}$$

где  $S_+ = \left[ \sum_{j=1}^N (j A_j \cos(j\vartheta) - j B_j \sin(j\vartheta)) \right]_+$ .

Выражаем  $\ddot{A}_k$  и  $\ddot{B}_k$ :

$$\ddot{A}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} A_k - \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \cos(k\vartheta) d\vartheta, \quad (18)$$

$$\ddot{B}_k = -\frac{D(k^3-k)^2}{R^4\rho(1+k^2)} B_k + \frac{c}{R\rho\pi(1+k^2)} \int_0^{2\pi} S_+ k \sin(k\vartheta) d\vartheta. \quad (19)$$

Введем вектор  $V = (A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N)^T$ .

Систему дифференциальных уравнений (18)–(19) запишем в виде

$$\ddot{V} = f(V), \quad (20)$$

где

$$f_j = -\frac{D(j^3 - j)^2}{R^4 \rho (1 + j^2)} A_j - \frac{c}{R \rho \pi (1 + j^2)} \int_0^{2\pi} S_+ j \cos(j\vartheta) d\vartheta, \quad j = 1 : N,$$

$$f_j = -\frac{D(j^3 - j)^2}{R^4 \rho (1 + j^2)} B_j + \frac{c}{R \rho \pi (1 + j^2)} \int_0^{2\pi} S_+ j \sin(j\vartheta) d\vartheta, \quad j = N + 1 : 2N.$$

Система (20) эквивалентна системе, состоящей из дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{V} = Z, \\ \dot{Z} = f(V). \end{cases} \quad (21)$$

Для решения системы (21) использовался численный метод Рунге–Кутта 4-го порядка [1].

На рис. 2–15 представлены примеры графиков формы колебаний кольца при разных начальных условиях ( $w_0 = 1.5 \sin(2\vartheta)$  для графиков слева,  $w_0 = 2 \cos(3\vartheta)$  – справа). Радиус кольца  $R = 10$  м, жесткость нитей  $c = 35$  Н/мм, цилиндрическая жесткость кольца  $D = 66.7$  Н·м, шаг интегрирования  $h = 2\pi/199$ , число шагов по времени  $n_1 = 8500$  (слева),  $n_2 = 18000$  (справа).

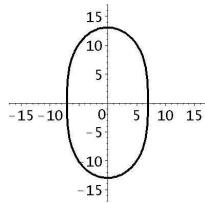


Рис. 2.  $t=0$

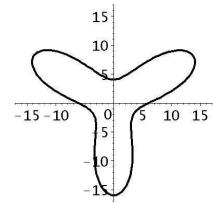


Рис. 3.  $t=0$

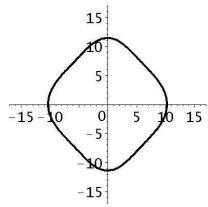


Рис. 4.  $t=1.2$

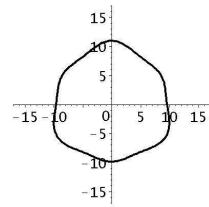


Рис. 5.  $t=1.2$

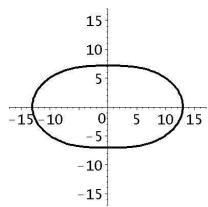


Рис. 6.  $t=2.8$

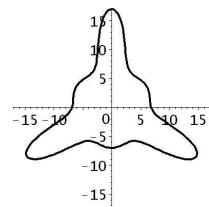


Рис. 7.  $t=6.9$

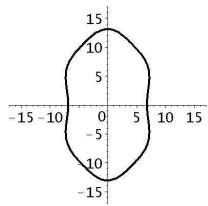


Рис. 8.  $t=5.2$

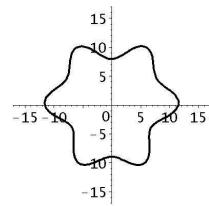


Рис. 9.  $t=8.1$

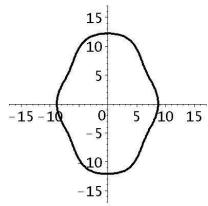


Рис. 10.  $t=6$

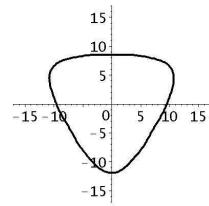


Рис. 11.  $t=14.7$

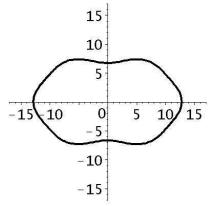


Рис. 12.  $t=8$

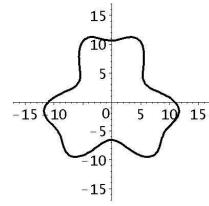
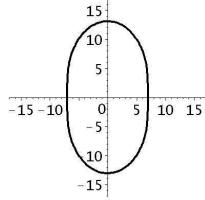
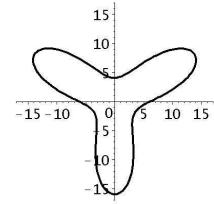


Рис. 13.  $t=26.1$

Рис. 14.  $t=16$ Рис. 15.  $t=32.1$ 

Как видно из графиков наблюдается эффект возврата в начальное состояние (эффект Ферми–Паста–Улама) [8]. Энергия остается локализованной в начальной и нескольких соседних гармониках ( $N \leq 20$ ). А при больших временах интегрирования наблюдается почти полный возврат энергии в начальную гармонику.

Для рисунков слева разница между начальным (рис.2) и конечным состоянием (рис.14) равна

$$\max\{v - v_0\} \leq 0.039,$$

$$\max\{w - w_0\} \leq 0.074.$$

Для рисунков справа (рис.3, рис.15)

$$\max\{v - v_0\} \leq 0.040,$$

$$\max\{w - w_0\} \leq 0.036.$$

**3. Устойчивость кольца под действием периодической нагрузки.** Предположим, что кольцо подвергается действию периодической нормальной нагрузки, равной  $P$  в одни промежутки времени и падающей до нуля в другие промежутки времени [2]. Работа пульсирующей нагрузки вычисляется по формуле

$$U_3 = \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - k_0 w^2) d\vartheta.$$

Здесь параметр  $k_0$  отвечает за направление действующей нагрузки: при  $k_0 = 1$  – нагрузка всегда направлена по нормали к деформированной оси кольца; при  $k_0 = 2$  – всегда направлена к неподвижному центру.

Некоторые задачи устойчивости подкрепленных колец нитями, которые не выдерживают этих усилий рассмотрены в работе [7].

Аналогично предыдущему случаю рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} J = \int_{t_0}^{t_1} & \left[ \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (w'' + w)^2 d\vartheta - \right. \\ & \left. - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} w^2 d\vartheta + \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int_0^{2\pi} (w'^2 - k_0 w^2) d\vartheta \right] dt. \end{aligned}$$

Используя условие несжимаемости (5) получаем

$$\begin{aligned} J = \int_{t_0}^{t_1} & \left[ \frac{R\rho}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{v}'^2 + \dot{v}^2) d\vartheta - \frac{D}{2R^3} \int_0^{2\pi} (v''' + v')^2 d\vartheta - \right. \\ & \left. - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} v'^2 d\vartheta + \frac{P(1 - \cos(\omega t))}{2} \int_0^{2\pi} (v''^2 - k_0 v'^2) d\vartheta \right] dt. \quad (22) \end{aligned}$$

Перемещение  $v$  будем искать в виде ряда Фурье:

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(t) \sin(k\vartheta) + B_k(t) \cos(k\vartheta)).$$

Согласно принципу наименьшего действия, функционал (22) принимает стационарное значение.

Выпишем для него уравнения Эйлера–Остроградского:

$$\begin{aligned} \ddot{A}_k = & -\frac{D}{R^4 \rho (1+k^2)} (k^6 - 2k^4 + k^2 + \frac{cR^3}{D} k^2) A_k + \\ & + \frac{P(1 - \cos(\omega t))(k^4 - k_0 k^2)}{R\rho(1+k^2)} A_k. \quad (23) \end{aligned}$$

Так как для  $B_k$  уравнения принимают аналогичную форму, в дальнейшем для краткости будем приводить только уравнения относительно  $A_k$ .

Сделаем замену переменных

$$\omega t = 2\tau. \quad (24)$$

Из уравнения (23), с учетом замены (24), получаем

$$\ddot{A}_k + (\alpha + \beta \cos(2\tau)) A_k = 0, \quad (25)$$

где

$$\alpha = \frac{4(D(k^6 - 2k^4 + k^2 + \frac{cR^3}{D}k^2) - PR^3(k^4 - k_0k^2))}{\omega^2 R^4 \rho(1 + k^2)},$$

$$\beta = \frac{4P(k^4 - k_0k^2)}{\omega^2 R \rho(1 + k^2)}.$$

Уравнение (25) называется уравнением Матье.

Аналогично предыдущему случаю, с помощью замены, перейдем от уравнения второго порядка (25) к системе, состоящей из уравнений первого порядка.

Введем вектор  $y = (A_1, \dots, A_N)^T$ , тогда  $f(y_k) = -(\alpha + \beta \cos(2\tau))A_k$ .

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = f(y). \end{cases} \quad (26)$$

Для определения области устойчивых колебаний кольца, найдем фундаментальную матрицу  $\Phi(t)$  для системы уравнений (26):

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix},$$

где  $g_1, g_2$  — решения (26), которые называются функциями Матье [5], а  $h_1, h_2$  — соответственно их производными.

Пусть  $\Phi(t)$  фундаментальная матрица системы (26), удовлетворяющая начальному условию

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а все остальные фундаментальные матрицы принимают вид  $\Phi(t)C$ , где  $C$  — постоянная невырожденная матрица.

Представив систему (26) в виде  $\ddot{y} = M(t)z$ , где  $M(t+T) \equiv M(t)$  — непрерывная периодическая матрица, заметим что

$$\Phi'(t+T) = M(t+T)\Phi(t+T) = M(t)\Phi(t+T),$$

т.е.  $\Phi(t+T)$  — фундаментальная матрица решений.

В силу этого существует единственная невырожденная матрица  $C$ , такая что

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C,$$

где  $T$  – период. Если положить  $t = 0$ , то

$$\Phi(T) = \Phi(0)C.$$

Согласно теории Флоке [4] матрица  $\Phi(T)$  называется матрицей монодромии, а ее собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – мультипликаторами системы, т.е  $g(t+T) \equiv \lambda_i g(t)$ , где  $g(t)$  – решение системы (26).

Характеристическое уравнение для матрицы монодромии имеет вид:

$$\begin{vmatrix} g_1 - \lambda & g_2 \\ h_1 & h_2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (g_1 + h_2)\lambda + g_1h_2 - g_2h_1 = 0.$$

Согласно теореме Лиувилля [9] фазовый объем системы остается постоянным:

$$\frac{dV}{dt} = 0,$$

т.е.

$$\det \Phi(T) = g_1h_2 - g_2h_1 = 1.$$

С учетом вышесказанного, характеристическое уравнение окончательно принимает вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + 1 = 0, \quad (27)$$

где  $\sigma = \text{tr}(\Phi(T))$  – след матрицы монодромии.

Корни характеристического уравнения вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4}}{2}.$$

При  $\sigma \leq 4$ , т.е.  $|\sigma| \leq 2$  корни уравнения (27) будут комплексные, а при  $|\sigma| > 2$  – действительные, причем  $|\lambda_1| > 0$ ,  $|\lambda_2| = |\lambda_1^{-1}| > 1$ .

Рассмотрим выражение

$$\Phi(T)\Phi(t_0) = C_1\Phi(T)u_1 + C_2\Phi(T)u_2 = C_1\lambda_1 u_1 + C_2\lambda_2 u_2,$$

где  $u_1$ ,  $u_2$  – собственные векторы матрицы.

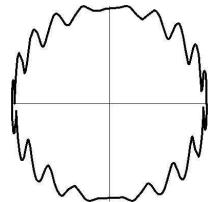
Т.к. фазовый объем системы сохраняется, т.е.  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ , и собственные числа являются комплексно-сопряженными, причем  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , получаем

$$|\Phi(T)\Phi(t_0)| \leq |C_1||\lambda_1||u_1| + |C_2||\lambda_2||u_2| \leq C$$

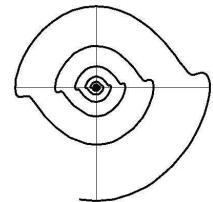
Последнее выражение показывает, что движение носит ограниченный характер.

Следовательно, условие устойчивости колебаний можем задать неравенством:  $|\sigma| \leq 2$ .

На рис. 16–17 представлены фазовые траектории для гармоник  $A_2$  и  $A_4$  соответственно. Рис. 16 соответствует параметрам  $k = 2$ ,  $c = 0$  Н/мм,  $p = 0.24$  Н,  $\omega = 2$ ,  $k_0 = 2$ . Рис. 17  $k = 4$ ,  $c = 25$  Н/мм,  $p = 1.4857$  Н,  $\omega = 2$ ,  $k_0 = 2$ .



**Рис. 16.** Устойчивая фазовая траектория



**Рис. 17.** Неустойчивая фазовая траектория

Главным признаком устойчивости колебаний является замкнутость фазовой траектории.

Так же стоит отметить, что в ходе численного эксперимента было установлено:

- 1) Если жесткость нитей  $c = 0$ , то критическая нагрузка совпадает со стационарной нагрузкой

$$P = \frac{D(k^2 - 1)^2}{R^3(k^2 - k_0)}.$$

В таблице 1 представлены стационарные нагрузки для различных гармоник. Здесь  $P_{\text{ст}_1}$  — нормальная критическая нагрузка,  $P_{\text{ст}_2}$  — центральная критическая нагрузка.

Таблица 1

#### Стационарная нагрузка

$k$	2	3	4	5
$P_{\text{ст}_1}$	0.200	0.533	1.000	1.600
$P_{\text{ст}_2}$	0.300	0.609	1.071	1.669

- 2) Если  $c \neq 0$ , то критическая нагрузка зависит от периодического возмущения.

В данном случае критическая сила вычисляется по формуле:

$$P = \frac{D(k^6 - 2k^4 + k^2) + cR^3k^2}{R^3(k^4 - k_0k^2)}.$$

В таблице 2 приведены минимальные критические силы нормальная  $P_1$  и центральная  $P_2$ , а также номер гармоники  $k$  соответствующий этой силе.

Таблица 2

### Зависимость критической силы $P$ от жесткости нитей $c$

$c$	1	5	10	15	20	25	30	35	40
$k$	2	3	4	4	4	5	5	5	5
$P_1$	0.544	1.320	0.653	0.900	1.143	1.638	1.824	2.018	2.188
$P_2$	0.816	1.509	0.715	0.964	1.225	1.709	1.903	2.106	2.283

Автор выражает благодарность своему научному руководителю к.ф.-м.н. Тарасову В.Н. за оказанную помощь в подготовке данной статьи.

## Список литературы

1. Абромовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. Пер. с англ. под ред. Диткиной В.А. и Кармазиной Л.Н. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Гос.изд-во физ.-матем. литературы, 1961. 228 с.
4. Лерман Л.М. Линейные дифференциальные уравнения и системы. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. 89 с.
5. Мэтьюз Дж., Уокер Р. Математические методы в физике. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972. 392 с.
6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967. 318 с.
7. Тарасов В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: КНЦ УрО РАН, 2013. 238 с.

8. Улам С. Нерешенные математические задачи. Пер. с англ. Шапиро З.Я. М.: Изд-во Наука, 1964. 168 с.
9. Фадеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Учеб. пособие Л.: Изд-во Ленингр. унта, 1980. 200 с.

### Summary

**Mikhailov A. V.** The fluctuations of the ring supported with threads

Problems of fluctuations of the elastic rings supported with elastic threads are considered; problems on the stability of elastic rings under the action of a pulsating load.

*Keywords:* *ring, fluctuation, stability, natural frequency, Euler-Ostrogradsky equation, monodromy matrix, Mathieu equation.*

### References

1. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, National bureau of standards applied mathematics series, 1964, p. 1046.
2. Vol'mir A. S. *Ustoichivost deformiruemых sistem*. (Stability of deformable systems), Moscow: Nauka, 1967, p. 984.
3. Gelfand I. M., Fomin S. V. *Variacionnoe ischislenie* (Calculus of Variations). Moscow: Gos. izd-vo fiz.-matem. literature, 1961, p. 228.
4. Lerman L. M. *Lineynye differencialnye uravneniya i sistemy* (The simple differential equations and systems), Nizhny Novgorod: Nizhegorodsliy universitet, 2012, p. 89.
5. Mathews J., Walker R. L. Mathematical methods of physics, New York - Amsterdam: W. A. Benjamin INC., 1964, p. 475.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii uprugikh kolebaniy* (Basics of applied theory of elastic vibrations), Moscow: Mashinostroenie, 1967, p. 318.
7. Tarasov V. N. *Metody optimizacii v issledovanii konstruktivnonelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem* (Optimization methods in a research of constructively nonlinear problems of mechanics of elastic systems), Syktyvkar: KNC UrO RAN, 2013.

8. Ulam S. M. *A Collection of mathematical problems*, New York: 1960, p. 150.
9. Faddeev L. D., Yakubovskii O. A. *Lekcii po kvantovoy mekhanike dlya studentov-matematikov* (Lectures on Quantum Mechanics for Mathematics Students), Leningrad: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1980, p. 200.

**Для цитирования:** Михайлов А. В. О колебаниях кольца, подкрепленного нитями // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 26–41.*

**For citation:** Mikhailov A. V. The fluctuations of the ring supported with threads, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 26–41.

*Коми НЦ УрО РАН*

*Поступила 20.06.2017*

## МАТЕМАТИКА

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

УДК 511.0

## ТРАКТОВКИ ТЕОРЕМ ПАППА: ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ И ИНВОЛЮТИВНОСТЬ

*P. P. Пименов*

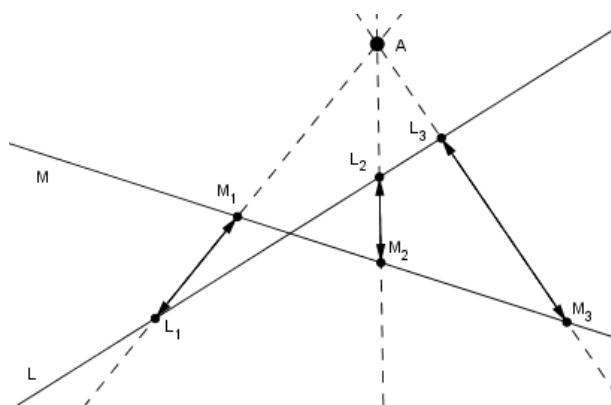
Дорисовав к чертежу проекции стрелки, мы увидим инволютивное преобразование. Геометрические чертежи превращаются в диаграммы инволюций и их композиций. Это упрощает понимание и работу с известными теоремами, а при обобщении на многомерные пространства легко связывает геометрию сфер с проективным пространством и неевклидовыми геометриями.

Если к теореме Паппа применить *геометрию перпендикулярного* и вместо слова *инцидентность* использовать слово *перпендикулярность* мы получим истинные и содержательные геометрические утверждения.

*Ключевые слова:* теорема Паппа–Паскаля, инволютивность, перпендикулярность, проективная геометрия, инверсия.

### 1. Появление инволютивных стрелок

#### 1.1. Инволютивность и теорема Паппа



**Рис. 1.** Проекция как инволюция. Определение  $A$ –отображения

На рис. 1 общезвестному чертежу проекции прямой  $L$  на прямую  $M$  из точки  $A$  пририсованы стрелки. Это дает новое понимание: теперь мы имеем дело не с проекцией, а с преобразованием, при котором точки прямых  $L$  и  $M$  меняются местами, как показано на чертеже. Напомним: преобразование  $f$ , обратное к которому совпадает с ним самим называется инволютивным преобразованием или инволюцией:  $f(f(x)) = x$  для всех  $x$ . Произвольная точка  $A$  на плоскости (не лежащая на данных прямых  $L$  и  $M$ ) задает инволютивное преобразование, меняющее местами точки прямых, как показано на чертеже.

Связав с точками плоскости отображение точек на двух прямых мы можем ставить алгебраические вопросы про эти отображения. Назовем изучаемые отображения « $A$ -отображениями». Мы будем пользоваться этим названием, даже если речь идет о точке  $B$  или  $C$ . Действия точки  $A$  на произвольную точку  $X$  мы будем обозначать  $A(X)$ . В каком случае  $A$ -отображения, заданные точками  $A$  и  $B$  коммутируют:  $A \circ B = B \circ A$ ? Какие условия это равенство накладывает на расположение точек  $A$  и  $B$ ?

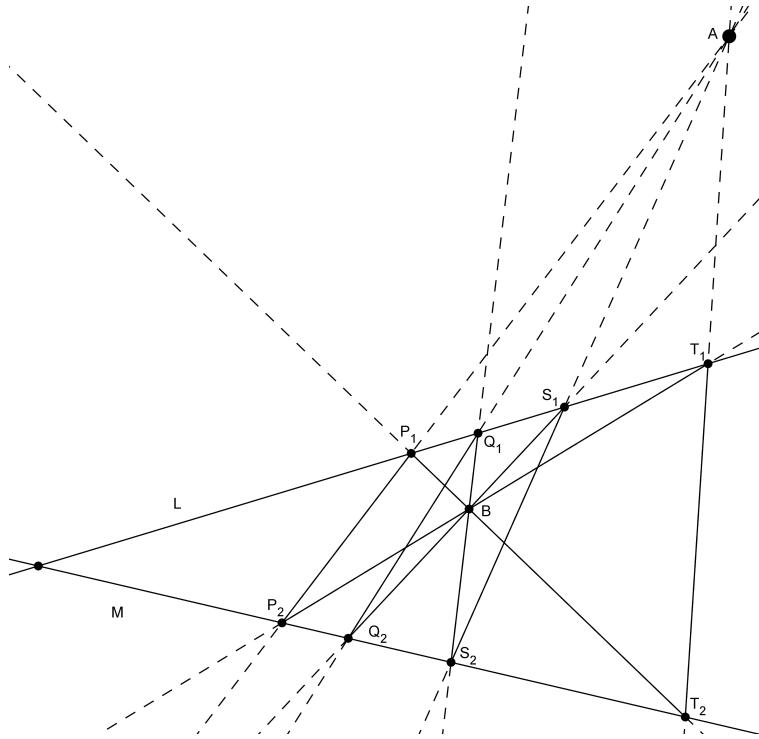


Рис. 2. Коммутативность и проекция

Рассмотрим на рис. 2 четырехугольник  $Q_1Q_2S_2S_1$ , в котором  $A(S_1) = S_2$  и  $A(Q_1) = Q_2$ . Если точка  $B$ , как изображено на чертеже — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника, то требование коммутативности отображений, определенных точками  $A$  и  $B$  выполняется для точки  $Q_1$ :  $B(A(Q_1)) = B(Q_2) = S_1 = A(B(Q_1)) = A(S_2) = S_1$ .

Это условие оказывается и достаточным: если точка  $B$  лежит в пересечении диагоналей какого-то четырехугольника, вершины которого меняются местами при  $A$ -отображении, то  $A$ -отображения, определенные точками  $A$  и  $B$  — коммутируют. Это изображено на чертеже четырехугольником  $P_1P_2T_2T_1$ . Мы можем сформулировать следующее геометрическое утверждение: *если  $B$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника, и мы возьмем произвольную точку  $P_1$ , то  $B(P_1)$  и  $B(A(P_1))$  лежат на одной прямой с  $A$ .* Это утверждение алгебраически означает коммутирование двух рассматриваемых  $A$ -отображений. Отметим, что коммутируемость двух  $A$ -отображений гарантируется их коммутированием всего в одной точке.

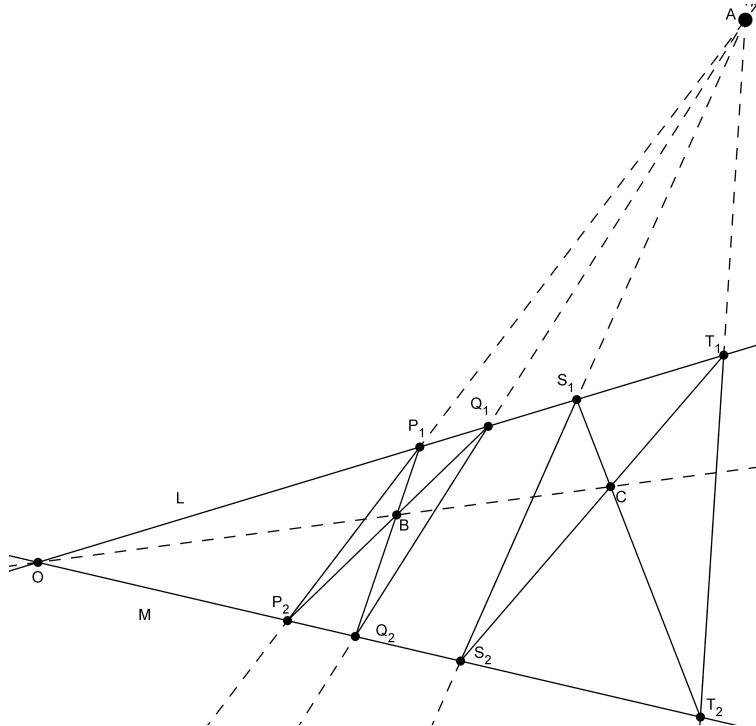


Рис. 3. Прямая  $OB$ , определяющая коммутирующие отображения

С другой стороны (см. рис. 3), все точки пересечения диагоналей рассматриваемых четырехугольников лежат на одной прямой, проходя-

щей через точку пересечения прямых  $L$  и  $M$ . Известно, что эта прямая вместе с прямыми  $L$ ,  $M$  и прямой, проходящей через пересечение  $L$  и  $M$  образует гармоническую четверку прямых.

Итак, мы нашли геометрическое значение алгебраического равенства:  $A \circ B = B \circ A$ . Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $B$  лежало на прямой, создающей дополняющей три перечисленные выше прямые до гармонической четверки прямых. Можно сформулировать иначе:  $B$  должно лежать на пересечении диагоналей какого-нибудь четырехугольника, вершины которого есть образы и прообразы точек при  $A$ -отображении с центром в точке  $A$ .

Рассмотрим теперь алгебраическое равенство  $(C \circ B \circ A)^2 = e$ , означающее, что  $C \circ B \circ A$  — инволютивно. Равенства такого вида очень существенны при изучении симметрий, например, если оно верно для симметрий относительно трех прямых  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , то три эти прямые лежат в одном пучке (пересекаются в одной точке или параллельны). См, например [1] или [2]. Что оно означает геометрически в нашем случае?

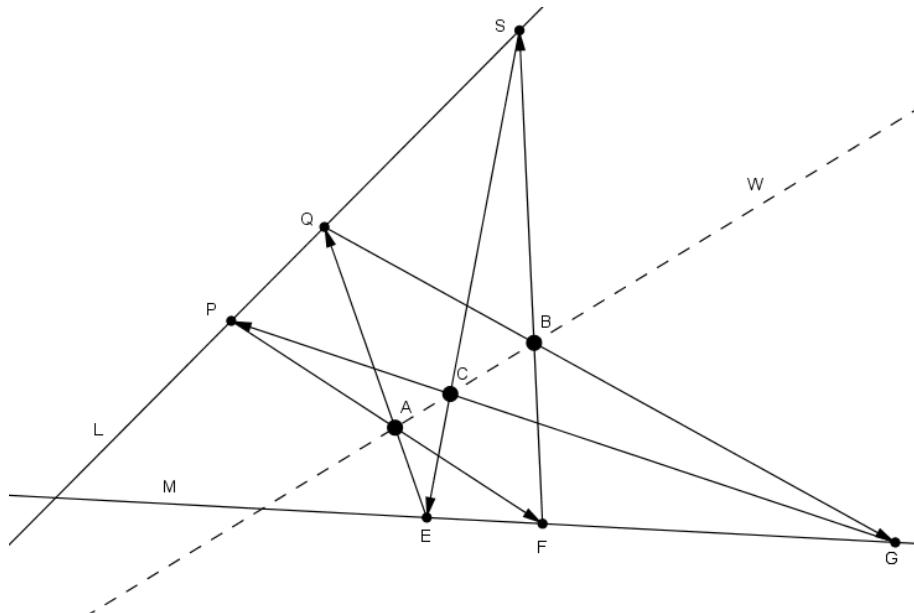
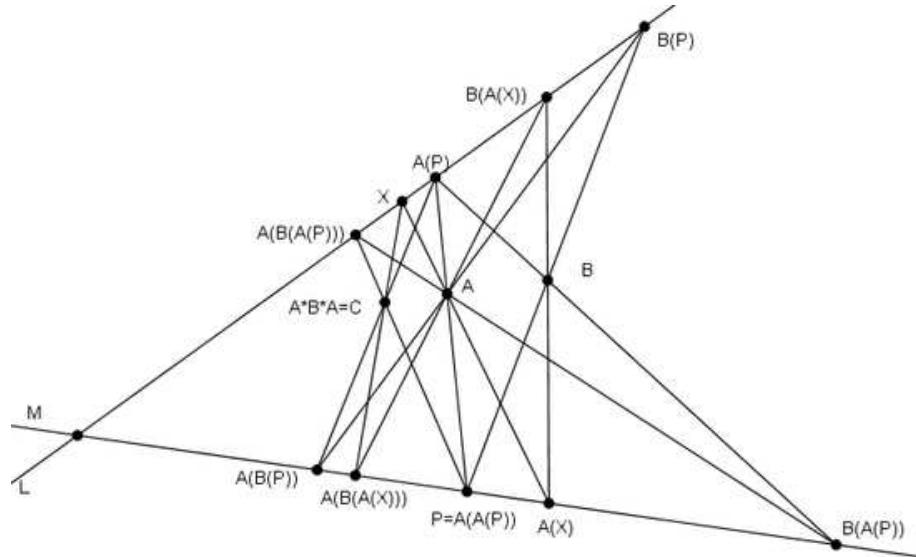


Рис. 4. Действие композиции  $C \circ B \circ A$

Проследим на рис. 4 за перемещением точки  $P$  под действием рассматриваемых  $A$ -отображений.  $A(P) = F$ ,  $B(F) = S$ ,  $C(S) = E$  и  $C(B(A(P))) = S$ .  $A(E) = Q$ ,  $B(Q) = G$ . Для того, чтобы  $C(B(A(C(B(A(P)))))) = P$  необходимо, чтобы  $C(G) = P$ . Это означает, что чертеж на шестом шаге замыкается, что мы возвращаемся в точку  $P$ . Это и изображено. Полученная конфигурация точек в точно-

сти совпадает с конфигурацией теоремы Паппа: точки  $P, Q, S$  лежат на одной прямой,  $E, F, G$  – на другой, а точки  $A, B, C$  – лежат, как им предписано теоремой Паппа. Из теоремы Паппа следует, что  $A, B, C$  необходимо лежат на одной прямой. Также верно, что если  $A, B, C$  лежат на одной прямой, то чертеж замыкается, как это необходимо для тождества  $C(B(A(C(B(A(P)))))) = P$ . Обратим внимание: мы выбрали точку  $P$  произвольно и получили отсюда геометрическое требование для  $A, B, C$  – они лежат на одной прямой. Легко показать, что в этом случае, как и в предыдущем – если тождество выполняется для какой-то одной точки, оно выполняется для всех точек (исключая вырожденные случаи, например, мы не рассматриваем точку пересечения прямых  $L$  и  $M$ ).

Итак, мы получили геометрический ответ: *равенство  $(C \circ B \circ A)^2 = e$  верно тогда и только тогда, когда  $A, B, C$  – лежат на одной прямой*. Сделаем следующий шаг. Пусть нам даны две точки  $A$  и  $B$ . Мы можем определить отображение  $A \circ B \circ A$ . Это отображение (сопряженное с  $B$  при помощи  $A$ ) также будет инволютивно. Отвечает ли этому отображению какая-нибудь точка  $C$ , такая, что  $A$ -отображение с центром в  $C$  совпадает с  $A \circ B \circ A$ ? Это позволило бы нам по двум точкам с помощью  $A$ -отображений строить третью. Из сказанного выше следует, что если такая точка  $C$  существует, то она необходимо лежит на той же прямой, что  $A$  и  $B$ .



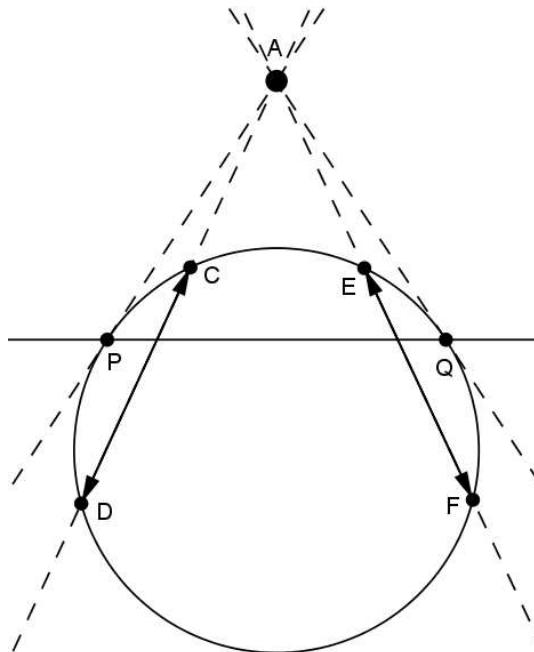
**Рис. 5.** Построение сопряженной инволюции  $A \circ B \circ A$

Рис. 5 показывает, что такая точка  $C$  существует. Мы начинаем движение с произвольной точки  $P$  и получаем точку  $A(B(A(P)))$ . Точка  $C$  должна лежать на прямой проходящей через  $P$  и  $A(B(A(P)))$ . Мы можем начать движение с точки  $A(P)$  и приедем в точку  $A(B(P))$ . Значит наша точка  $C$  лежит и на прямой, проходящей через эти две точки. Мы нашли две прямые, на которых обязана лежать  $C$ . Если она существует – лежит на пересечении этих двух прямых. Это требует, чтобы для произвольной точки  $X$ , точки  $A(B(A(X)))$ ,  $X$  и точка пересечения двух указанных выше прямых – лежат на одной прямой. Это в самом деле имеет место.

Итак мы доказали, что существует точка, представляющая преобразование:  $A \circ B \circ A$ .

## 1.2. Инволютивности в теореме Паппа-Паскаля

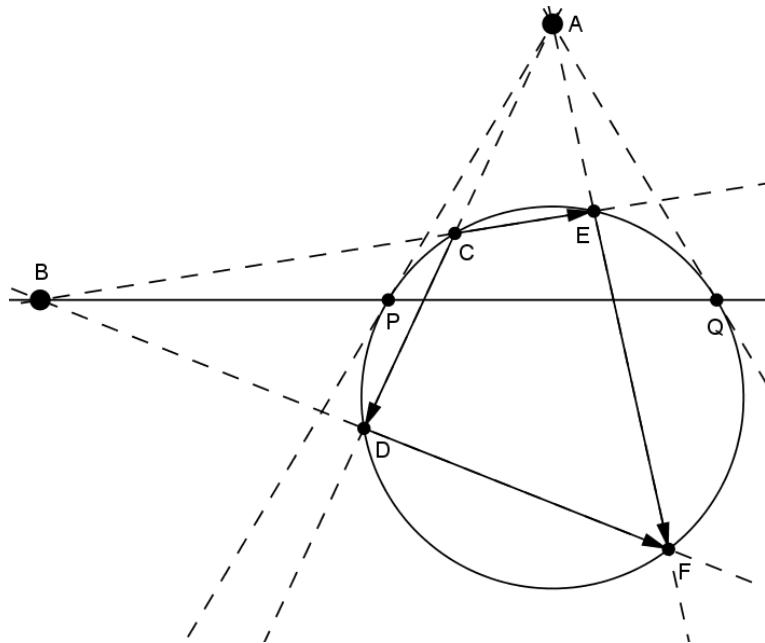
Проектирование окружности на себя также можно трактовать как инволютивное преобразование:



**Рис. 6.**  $A$ -отображение окружности

Эти инволютивные преобразования на рис. 6 существенно различаются, в зависимости от того, где лежит точка  $A$ : вне или внутри окружности. В первом случае у  $A$ -отображения есть две неподвижные точки (в которых касательные из точки  $A$  касаются окружности), во втором

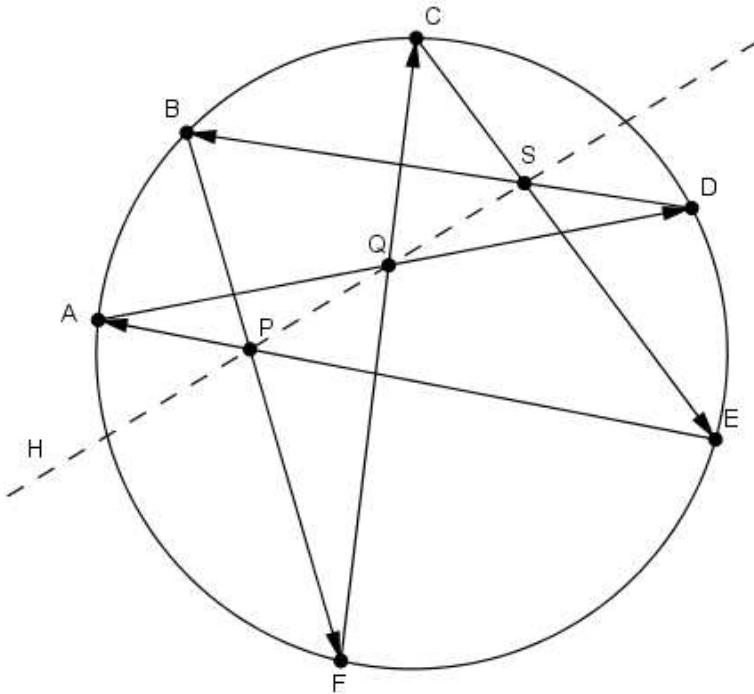
- неподвижных точек нет. Мы зададим те же алгебраические вопросы про  $A$ -отображения окружности в себя, что и в предыдущем разделе. Когда два  $A$ -преобразования коммутируют?



**Рис. 7.** Полярное соответствие и коммутативность

Рис. 7 подсказывает ответ.  $B$  лежит на поляре  $A$ , на прямой, проходящей через точки касания касательных к окружности, проходящих через  $A$ . Рассмотрим произвольную точку  $C$  на окружности. Пусть  $A(C) = D$ . Если  $A(B(C)) = B(A(C))$ , то  $B(C)$  и  $B(A(C))$  должны лежать на одной прямой с  $A$ . Это и изображено на чертеже. Если  $B$  есть пересечение сторон четырехугольника  $CDEF$ , пары вершин которого проективны относительно  $A$ , то  $A(B(C)) = (C(B(A)))$ . Это условие и достаточно, как и в прошлый раз, при рассмотрении проекций двух прямых: если два  $A$ -отображения коммутируют в какой-то одной точке, то они коммутируют во всех точках. Это следует из хорошо известной теоремы о полярах: точки пересечения двух пар противоположных сторон четырехугольника, вписанного в окружность, пересекаются на взаимополярных точках (лежащих на полярах друг друга).

Когда композиция трех инволютивных  $A$ -преобразований снова инволютивна? И снова чертеж дает ответ, приводя на этот раз к теореме Паппа–Паскаля, часто называемой «теоремой о мистическом шестиугольнике».



**Рис. 8.** Инволютивность композиции  $P \circ S \circ Q$

Рассмотрим на рис. 8 действие  $A$ -преобразований с центрами в  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  на точку  $A$ .  $Q(A) = D$ ,  $S(Q(A)) = B$ ,  $P(S(Q(A))) = F$ . Чтобы это отображение  $P \circ S \circ Q$  было инволютивно на точке  $A$  необходимо, чтобы оно перевело точку  $F$  снова в точку  $A$ :  $Q(P(S(Q(A)))) = C$ ,  $S(Q(P(S(Q(A))))) = E$ , чтобы  $P(E)$  равнялось  $A$  необходимо (и достаточно), чтобы  $P$ ,  $E$ ,  $A$  лежали на одной прямой. В случае если  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  лежат на одной прямой это выполняется. Очевидно, что рассматриваемые точки образуют конфигурацию теоремы Паппа–Паскаля. Также теорема Паппа–Паскаля гарантирует, что если три точки  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  лежат на одной прямой, то построение замыкается: точки  $A$ ,  $P$ ,  $E$  также всегда будут лежать на одной прямой. Отметим, что как и ранее: достаточно инволютивности преобразования  $P \circ S \circ Q$  на произвольной точке, чтобы оно было инволютивно для всех точек. Разумеется, задать вопрос о построении точек, на основе  $A$ -отображений, как это было сделано ранее при рассмотрении рис. 5.

$A$ -отображения окружности оказываются даже более полезным, чем рассмотренные ранее  $A$ -отображения пар прямых. Мы можем взять обнаруженные свойства  $A$ -отображений за определение прямых на плоскости. Видно, что это можно сделать двумя способами: три точки  $W$ ,  $V$ ,  $Z$  можно назвать лежащими на одной прямой если существует точка  $U$ , такая, что все три  $A$ -отображения с центрами в  $W$ ,  $V$ ,  $Z$  коммутируют

с  $A$ -отображением с центром в  $U$ , а можно назвать их лежащими на одной прямой если композиция  $A$ -отображений с центрами в указанных точках сама инволютивна. В многомерном пространстве ситуация меняется, мы вернемся к этому в последнем разделе статьи.

## 2. Планиметрическая реализация обобщенной теоремы Паппа

Мы обобщим теорему Паппа, пользуясь методом *геометрии перпендикулярного* [2]. Этот метод расширяет общеизвестное свойство двойственности точек и прямых в проективной геометрии. Пользуясь им, мы можем говорить не о точках или прямых, а о произвольных *элементах* теоремы (каждый из которых может быть точкой или прямой). Вводится понятие *соединителя*: точка и точка соединяются проходящей через них прямой, прямая и прямая соединяются точкой их пересечения (за исключением параллельных прямых), а *точка и прямая соединяются перпендикуляром из точки на прямую*. В [2] даны все необходимые определения и вводится обозначение  $S(A, B)$  – соединитель  $A$  и  $B$ . Обобщением понятия коллинеарных точек будет понятие: «*элементы имеющие общий соединитель*».  $A, B, C$  – имеют общий соединитель, если  $S(A, B) = S(B, C) = S(A, C)$ . Обратим внимание:  $A, B, C$  в геометрии перпендикулярности это – элементы, каждый из которых может быть точкой или прямой, и что рассматриваемая ранее композиция симметрий  $C \circ B \circ A$  в этом случае снова симметрия (заранее неизвестно, относительно точки или прямой).

Сформулируем обобщенную теорему Паппа:

**Теорема 2.1. Обобщенная теорема Паппа.** *Пусть  $A_1, A_2, A_3$  три элемента имеющий общий соединитель,  $B_1, B_2, B_3$  – три других элемента также имеющие общий соединитель. Тогда три соединителя  $S(S(A_1, B_2), S(A_2, B_1)), S(S(A_1, B_3), S(A_3, B_1)), S(S(A_2, B_3), S(A_3, B_2))$  сами имеют общий соединитель.*

Пример прочтения теоремы Паппа с помощью *геометрии перпендикулярного* приведен на рис. 9. Вместо трех точек, лежащих на прямой  $L$ , мы рассматриваем три прямые  $A_1, A_2, A_3$ , перпендикулярные  $L$ . Точно также отношение инцидентности заменено на отношение перпендикулярности и на прямой  $M$  – мы рассматриваем три прямые  $B_1, B_2, B_3$  перпендикулярные  $M$ , а не три точки. В теореме Паппа далее мы проводим прямые  $A_1B_2, A_2B_1$  и т.д. сейчас мы находим точки пересечения:  $A_1 \cap B_2, A_2 \cap B_1$ . В теореме Паппа далее мы нашли точки пересечения проведенных прямых, сейчас мы проводим прямые через пары построенных точек. Теорема Паппа утверждала, что три итоговые точки

лежат на одной прямой, наше прочтение утверждает, что три итоговые прямые пересекаются в одной точке.

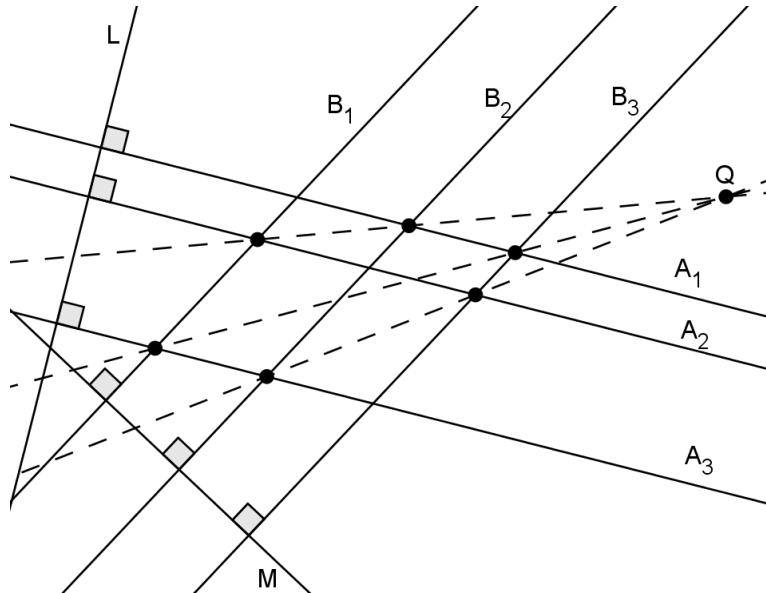
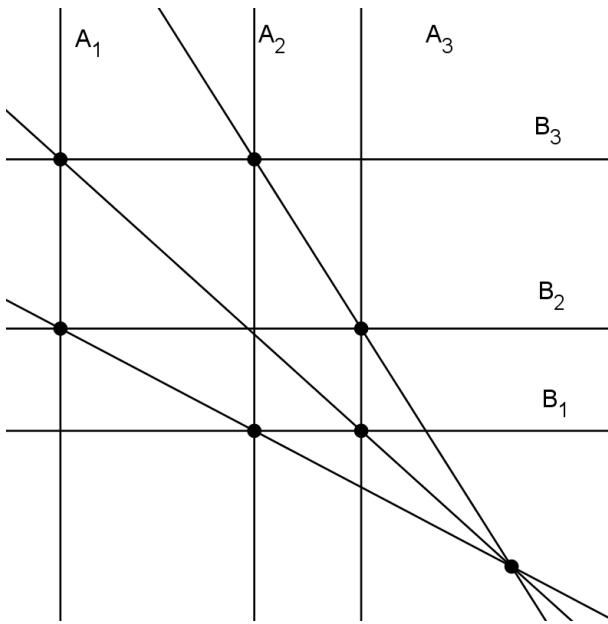


Рис. 9. Обобщенная теорема Паппа в параллелограмме

И это так, что видно на рис. 9, перед нами известная теорема о параллелограмме, разбитом на четыре части двумя прямыми, параллельными его сторонам. Диагонали трех возникающих параллелограммов, как показано на чертеже – пересекаются в одной точке. Обратим внимание: хотя мы заменили исходные точки прямыми, перпендикулярные данным, в параллелограмме теоремы нет перпендикулярностей. Условие перпендикулярности стало означать параллельность друг другу прямых  $A_1, A_2, A_3$  и прямых  $B_1, B_2, B_3$ . Этого и следовало ожидать, поскольку две прямые, перпендикулярные третьей, – параллельны между собой.

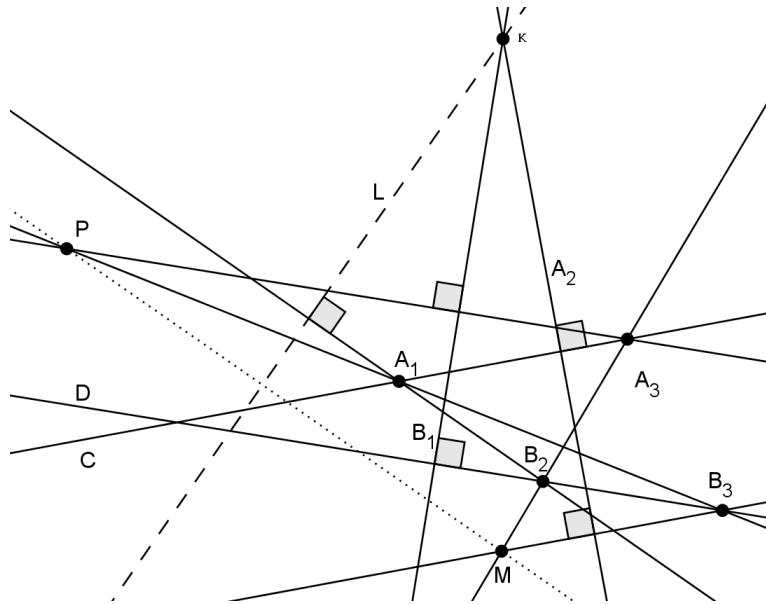
Внесем в наш чертеж изменение. В [2] показано, что в обобщенной с помощью перпендикулярности теореме Дезарга, можно сокращать число элементов теоремы, приравнивая некоторые из них друг другу. Так была обнаружена связь конфигурации элементов теоремы Дезарга и теоремы о пересечении высот треугольника. Также можно поступать и с теоремой Паппа, получая интересные частные случаи. Прямые  $L$  и  $M$  произвольны, следовательно они могут быть и перпендикулярны. Но в этом случае мы можем считать, что  $L = B_1$  и  $M = A_1$ . Это изображено на рис. 10.



**Рис. 10.** Обобщенная теорема Паппа в прямоугольнике

Параллелограмм превратился в прямоугольник и получаемая теорема упростилась: если прямоугольник разбить на четыре части двумя параллельными его сторонам прямыми, то диагонали трех полученных прямоугольников пересекаются в одной точке.

Мы можем также получить афинную (см. например, [6]) теорему Паппа как частный случай обобщенной теоремы Паппа. Для афинного варианта теоремы Паппа нужно вторую прямую, считать бесконечно-удаленной, в этом случае прямые, пересекающиеся на ней - параллельны. Рассмотрим три прямые, проходящие через одну точку и три точки, лежащие на одной прямой. Перпендикуляры, проведенные из трех точек на эти прямые и создают конструкцию афинной теоремы Паппа, т.к. две прямые, перпендикулярные третьей — параллельны между собой. Мы не приводим чертеж, так как выше уже достаточно разобраны случаи где главную роль играют параллельные прямые. В [2] приведена таблица, описывающая все возможные случаи, возникающие при подобном обобщении теоремы Дезарга. Всего обнаружено 13 случаев. Столько же случаев возможно и в обобщенной теореме Паппа. Подстановку вместо обобщенных «элементов» точек или прямых мы называем здесь и в [2] – *планиметрической реализацией* обобщенной теоремы. Не все из них геометрически содержательны, рис. 11 дает пример, где мы старались уменьшить число возникающих параллельных прямых.



**Рис. 11.** Вариант планиметрической реализации обобщенной теоремы Паппа

Опишем подробно все элементы чертежа. Три первых элемента теоремы это *точка*  $A_1$ , *прямая*  $A_2$  и *точка*  $A_3$ . Точки лежат на прямой  $C$ , а прямая ей перпендикулярна. Следующие три элемента: *прямая*  $B_1$  и *точки*  $B_2, B_3$ . Прямая перпендикулярна прямой  $D$ , точки лежат на ней. Точка  $K$  – соединитель элементов  $A_1$  и  $B_2$ , прямая  $A_2B_1$  – соединитель указанных в ней элементов, соединитель этой прямой и точки  $K$  – прямая  $L$ . Соединитель прямой  $A_2$  и точки  $B_3$  – перпендикуляр из точки на прямую, соединитель точек  $B_2$  и  $A_3$  – прямая, пересекающаяся с ранее построенным перпендикуляром в точке  $M$ . Соединитель точек  $A_1$  и  $B_3$  – прямая, она пересекается с соединителем  $A_3$  и  $B_1$ , который есть перпендикуляр из точки на прямую, точка пересечения обозначена  $P$ . Итак, три результирующих элемента: точки  $P, M$  и прямая  $L$ .

Что утверждает обобщенная теорема Паппа об этих трех элементах? Она утверждает, что прямая, проходящая через  $P$  и  $M$  перпендикулярна  $L$ . Это в самом деле имеет место.

## 2.1. Попытка планиметрической реализации теоремы Паппа-Паскаля

После рассмотренных обобщений теоремы Паппа, естественно ожидать, что теорему Паппа-Паскаля также удастся обобщить в духе геометрии перпендикулярного. Ведь сама идея заменять точки прямыми, а прямые точками восходит именно к рассмотрению вписанных и описанных треугольников, замены касательных точками касания. Но теорема не обобщается.

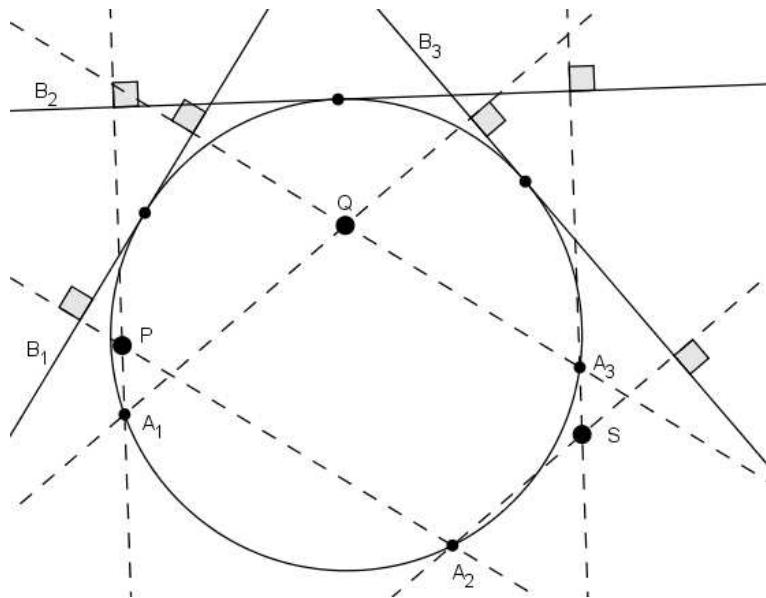


Рис. 12. Попытка обобщения теоремы Паппа-Паскаля

На рис. 12 мы заменили точки  $B_1, B_2, B_3$  на прямые  $B_1, B_2, B_3$  и провели соединители, аналогично тому, как делали ранее. Три полученных в итоге соединителя, точки  $P, Q, S$  не лежат на одной прямой. Отметим, что раньше мы слово «инцидентность» заменили на «перпендикулярность», точку лежащую на данной прямой заменили на прямую, перпендикулярную данной прямой. Сейчас же мы точки касания заменили на саму касательную и можем только констатировать, что отрицательный результат, устанавливающий границы метода — также имеет интерес и ценность.

### 3. Развитие темы и дискуссионные определения

Прежде всего укажем, что обобщение теоремы Паппа, приведенное во втором разделе тесно связано с исследованиями С. Табачникова в [7]. В его статье рассматривается трехмерная реализация обобщенной теоремы Паппа. Ее элементами являются прямые в трехмерном пространстве, а соединителем двух элементов (автор использует не слово «соединитель», а слово «кручение», skew) называется общий перпендикуляр двух прямых. Подробней мы пишем об этом в [3] и [2] где развиваем геометрию перпендикулярного и рассматриваем перспективы ее обобщения на многомерные пространства.

Перейдем к трактовке геометрических чертежей как диаграмм ин-

волютивных отображений и  $A$ -отображениям. Мы будем говорить про многомерные обобщения. Мы можем трактовать проецирование из точки  $A$  сферы в себя как инволютивное отображение сферы, точно также, как мы ранее делали с окружностью. Если  $A$  расположено вне сферы, то у этого изображения есть неподвижная окружность (касательная окружность конуса с вершиной  $A$ , касающегося сферы). Мы можем трактовать это отображение, как инверсию сферы относительно этой неподвижной окружности. Если  $A$  лежит внутри сферы, то касательного конуса нет, соответственно нет и неподвижных точек у  $A$ -отображения. В этом случае мы можем трактовать  $A$ -отображение как мнимую инверсию сферы, пользуясь распространенным, но немногого неудачным термином, как его можно заменить см. [5], где также рассматриваются и  $A$ -отображения. В [4] подробно показывается, как с помощью  $A$ -отображений сферы построить модели евклидовой, лобачевского и римановой планиметрии. То, что  $A$ -отображения сферы можно рассматривать как инверсии сферы очень существенно: мы можем мыслить и определить их теперь не выходя за пределы самой сферы, опираясь только на геометрию окружностей. Но  $A$ -отображения настолько наглядны, что в дальнейшем мы говорим о них, а не об инверсиях.

Для определенности будем считать, что точка  $A$  – вне сферы. В этом случае  $A$ -отображения, коммутирующие с данным, лежат в плоскости, полярной к  $A$ . Те  $A$ -отображения, коммутирующие с данным, центр которых вне сферы – определяют преобразования сферы в себя, которые можно считать осевыми симметриями геометрии Лобачевского, а те  $A$ -отображения, центр которых внутри сферы – можно считать симметриями относительно точек. Все это наглядно видно в полярной плоскости: она пересекает сферу по окружности, и получаемая модель геометрии может ассоциироваться с точками полярной плоскости, лежащей внутри этой окружности. Но сейчас мы воспользуемся  $A$ -отображениями не для построения моделей неевклидовых геометрий, а для построения модели проективного пространства, исходя из геометрии сферы. Мы коснемся также геометрии мира Минковского.

Многомерная геометрия сфер определяет проективное пространство, если каждому  $A$ -отображению многомерной сферы поставить в соответствие его центр. При этом надо считать сами точки сферы, также элементами проективного пространства (при желании можно считать, что точка сферы определяет отображение всей сферы в эту точку).

**Определение 3.1.** Точками  $n$ -мерного проективного пространства на-

зовем множество всех  $A$ -отображений сферы размерности  $n - 1$  и множество всех точек самой сферы.

**Определение 3.2.** Гиперплоскостью  $n$ -мерного проективного пространства называется множество всех  $A$ -отображений, коммутирующих с произвольным  $A$ -отображением сферы.

Отсюда уже можно определить прямую, как пересечение нужного числа определенных ранее гиперплоскостей (это будет множество  $A$ -отображений, коммутирующих с какими-то  $n - 1$   $A$ -отображениями). Но можно дать и следующее определение, основанное на теореме Паппа-Паскаля:

**Определение 3.3.** Три  $A$ -отображения сферы  $P, Q, S$  называются лежащими на одной прямой, если их композиция  $P \circ Q \circ S$  инволютивна.

Вряд ли трудно установить тождественность этого определения и предложенного ранее на основе пересечения гиперплоскостей. Отметим, что на самом деле мы получили структуру, более богатую, чем проективное пространство: между гиперплоскостями естественно вводится отношение перпендикулярности. Две гиперплоскости можно назвать перпендикулярными, если поляра одной из них лежит на другой. В терминологии коммутирующих  $A$ -отображений это звучит так: пусть одна гиперплоскость – множество  $A$ -отображений, коммутирующих с отображением в центре  $P$ , а вторая гиперплоскость – множество  $A$ -отображений коммутирующих с отображением с центром в  $Q$ ; если  $A$ -отображения с центрами в  $P$  и  $Q$  коммутируют между собой, то две названные гиперплоскости мы называем перпендикулярными.

Наличие перпендикулярности в проективном пространстве означает наличие в нем метрики, расстояния. С метрической точки зрения совокупность  $A$ -отображений, центры которых лежат вне сферы определяет геометрию Минковского.

## Список литературы

1. **Бахман Ф.** Построение геометрии на основе понятия симметрии. Пер. с нем. Р. И. Пименова; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука. 1969. 380 с.  
Немецкий оригинал: Friedrich Bachmann. Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

2. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 28–43.
3. **Пименов Р. Р.** Обобщения теоремы Дезарга: скрытые пространства // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 1 (21). С. 44–57.
4. **Пименов Р. Р.** Отображения сферы и неевклидовы геометрии // Математическое просвещение. 1999. Сер. 3. Вып. 3. С. 158–166.
5. **Пименов Р. Р.** Эстетическая геометрия или теория симметрий. СПб.: Школьная лига, 2014. 288 с.
6. **Харстсхорн Р.** Основы проективной геометрии. Пер. с английского Е. Б. Шабат под ред. И. М. Яглома. М: Мир. 1970.
7. **Tabachnikov S.** Skewers. Arnold Mathematical Journal. 2. 2016. Pp. 171–193.

### Summary

**Pimenov R. R.** The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity

If we draw the arrows on the picture of projection we can look involutive transformation. Geometric picture now is diagram of involutions and their compositions. It gives useful interpretation for theorems of projective geometry. We generalise this arrows to multidimensional spaces that connect geometry of spheres with projective space and non-euclidian geometries. We study with perpendicularity also. We change word «incidence» on word «perpendicularity» in the Pappus's theorem and get true and meaningful propositions.

*Keywords:* theory of numbers, Fermat's little theorem, Dirichlet's theorem.

### References

1. **Bachmann F.** *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
2. **Pimenov R. R.** The generalization the Desargues's theorem and geometry of perpendicularity, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, №1 (21), pp. 28–43.

3. **Pimenov R. R.** The generalization the Desargues's theorem and hidden subspace, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2016, №1 (21), pp. 44–57.
4. **Pimenov R. R.** Mapping the sphere and non-euclidian geometries, *Mathematical Education*, 1999, ser. 3, № 3, pp. 158–166.
5. **Pimenov R. R.** *Aesthetic geometry or theory of symmetries*. SPb: School league, 2014, 288 p.
6. **Hartshorne R.** *Foundations of Projective Geometry*. Lecture notes at Harvard University. W. A. Benjamin Inc, New York, 1967.
7. **Tabachnikov S.** Skewers, *Arnold Mathematical Journal*, 2, 2016, pp. 171–193.

**Для цитирования:** Пименов Р. Р. Трактовки теорем Паппа: перпендикулярность и инволютивность // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 42–58.*

**For citation:** Pimenov R. R. The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 42–58.

Санкт-Петербургский национальный  
исследовательский Академический университет

Поступила 29.05.2017

## *МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ*

*Вестник Сыктывкарского университета.  
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.  
Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 519.29**

**ЗЕНОН ИВАНОВИЧ БОРЕВИЧ (1922–1995)  
К 95-Й ГОДОВЩИНЕ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ**

*B. П. Одинец*

Статья посвящена биографии известного алгебраиста профессора Зенона Ивановича Боревича, декана математико–механического факультета Ленинградского государственного университета в 1973–83 годы, увиденной со стороны польских математиков, а также контактам З.И. Боревича с Польшей, с подробными комментариями автора.

*Ключевые слова:* З.И. Боревич, блокада Ленинграда, гомологическая алгебра, теория линейных групп, общество «Полония».

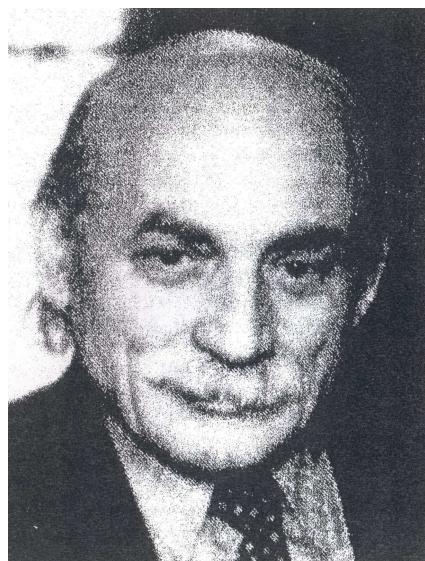


Рис. 1. Зенон Иванович Боревич (1922–1995)

7 ноября 2017 года исполняется 95 лет со дня рождения видного советского и российского математика Зенона Ивановича Боревича, среди студентов которого было немало будущих преподавателей СГУ.

О профессоре З.И. Боревиче написано немало статей. Прекрасную статью к 75-летию со дня рождения З.И. Боревича о его научном творчестве написал профессор А.В. Яковлев [4]. Менее известно отношение польских математиков к З.И. Боревичу, а ведь он по национальности был поляк. Ниже я зацитирую переводы двух страниц из статьи 2000 года профессора Владыслава Наркевича (*Władysław Narkiewicz*) и д-ра Витольда Венслава (*Witold Węsław*) [1], которые называются «Наброски биографии» и «Польские контакты», а позже — дам свой подробный комментарий, не считая пояснений в сносках.

**«Наброски биографии.** В семье Боревичей было трое детей, и Зенон был старшим среди них. У него были сестра и младший брат, который пошел добровольцем во 2-ю Армию Войска Польского и погиб в Германии в мае 1945 года. Семья Боревичей жила в селе Суслы, недалеко от Новгорода Волынского, известного в прошлом под названием Звяжель. В 1933 году З. Боревич окончил там начальную польскоязычную школу. В том же году, в связи с началом чисток вдоль предвоенной границы СССР с Польшей семья была вынуждена уехать из родных мест и переселиться в Кривой Рог. Позже, вспоминая период 1932/1933 годов, З.И.Боревич рассказывал, что видел в канавах мертвых людей, которых, по-видимому, убили из-за имевшегося у них хлеба. Через год, не дожидаясь высылки в Казахстан, семья Боревичей выехала на Кавказ и осела в Нальчике. В Кривом Роге отец работу так и не нашел.

С началом войны СССР с Германией Зенон Боревич не был сразу мобилизован в армию. Он был мобилизован в 1942 году и его передали на 102 стройку Народного Комиссариата Путей Сообщения. Работал он также в Колпино и в Ленинградской области. Многократно, проезжая поездом из Ленинграда в Москву, он говорил жене: «Здесь вложен и мой труд». В 1944 году он случайно узнал из найденного на путях обрывка газеты, что студенты могут демобилизоваться из армии, что он и сделал. Во время учебы в 1946 году он женился на Клавдии Петровне, и у них было четверо детей, правда, младший сын в детстве утонул. Зенон Боревич оставался в Петербурге до своей внезапной смерти 26 февраля 1995 года.

За несколько лет до смерти он сказал жене, что он католик и хотел бы, чтобы его похороны проходили по католическому обряду. Он похоронен на Большеохтинском кладбище недалеко от места, где жил. Крест на его могиле является одним из немногих католических крестов

на этом кладбище.»

**«Контакты с Польшей.** Контакты эти носили для З. Боревича двойственный характер: сентиментальный, ибо ощущал себя поляком, что постоянно подчеркивал, и профессиональный — контакты с польской наукой и польскими математиками.

Но, несомненно, он был российским математиком. Несмотря на то, что учился в начальной школе с основным польским языком, со временем, в силу отсутствия контактов с этим языком и репрессиями за его использование, он перестал говорить по-польски. Но когда, под конец шестидесятых годов, в СССР стало несколько больше свободы, он снова начал учить польский язык. Подписывался на *Polityke* и *Przekrój*<sup>1</sup>, хотя это было очень дорого. Начал собирать польские марки, и это увлечение сохранилось до последних минут его жизни. Первоначально, благодаря маркам, он узнавал об основных фактах нашей истории. Позже много читал на эти темы. Польшу посетил за последние 20 лет жизни как минимум семь раз (во Вроцлаве<sup>2</sup> был пять раз).

Научные контакты Зенона Боревича с польскими математиками приносили плоды в виде его отзывов на кандидатские и докторские диссертации, защищаемые в Польше. С другой стороны почти все алгебраисты из Вроцлава побывали в Ленинграде.

Каждое пребывание З. Боревича [в Польше], было связано с каким-то элементом из истории Польши. Когда он был у коллег из Силезского университета в г. Катовице, то осматривал и Вавель<sup>3</sup> в Кракове. Когда он был гостем Центра им. С. Банаха в Варшаве, то ездил на экскурсию на Грюнвальдское поле.

Во время его визитов во Вроцлав обычно было много экскурсий. Например, в июне 1977 года была экскурсия с профессором на гору Шленза (*Ślęza*). При этом Эдвард Добровольски и Витольд Венслав (В.В.) смогли убедиться в физических кондициях и способностях мастера пешей горной туристики.

Мечтой профессора было посещение колыбели Польской государственности, т. е. г. Гнезно. Были мы там вдвоём (З.Б. и В.В.) один день 15 ноября 1988 г. Чтобы как-то скрасить дорогу из Вроцлава до Гнезно, я вручил профессору только, что переизданную книгу «Перечень

---

<sup>1</sup> «Политика» и «Обзор» — популярнейшие польские журналы той поры.

<sup>2</sup> Оба и В. Наркевич и В. Венслав — жители Вроцлава.

<sup>3</sup> Вавель (Wawel) — холм и архитектурный комплекс в Кракове, важнейшие элементы которого: Королевский замок и кафедральный собор Святых Станислава и Вацлава. В кафедральном соборе хоронят польских монархов, великих поэтов и выдающихся общественных деятелей.

Польских королей [и князей польских]»<sup>4</sup> Яна Матейки. Он был этим очень доволен. Внимательно просмотрел и сразу же указал на ошибки — перепутанные даты и портреты королей. В соборе в Гнезно мы были более двух часов. С большим вниманием он обошел несколько раз внутри собора, внимательно читая надписи, стараясь запомнить всё, что видел. Так же было и в кафедральном музее. Выходя из собора, как бы объясняя, сказал: «должен всё хорошо запомнить. Я тут в первый и последний раз».

Проезжая через м. Гонсава (*Gąsawa*) рядом с памятником Лешка Бялого [князь малопольский (1202–1227)] по дороге в Бискупин, рассказывал, как умер Лешек, убитый в бане в Гонсаве. Во время других экскурсий, например, в Легницу и на Легницкое поле (место битвы с татарами в 1241 г.) можно также было убедиться в его превосходном знании истории Польши.

Последний визит Зенона Боревича во Вроцлав был кратким: он остановился на 3 дня (25–28 сентября 1994 г.) по дороге из Катовиц в Петербург, после чьей-то защиты кандидатской диссертации в Силезском университете. Поехали мы тогда (З.Б. и В.В.) в Любёнж (*Lubiąż*), чтобы осмотреть комплекс объектов ордена Братьев Цистерсов, точнее то, что от них осталось. Несмотря на то, что костёл был закрыт, нам удалось попасть внутрь. (После войны там красноармейцы держали коней). Профессор чувствовал себя неважко. Постоянно засыпал. Давал себя знать сахарный диабет, на который он не обращал внимания, хотя его жена была врачом.

Когда 28 сентября прекрасным осенним пополуднем мы прощались у поезда, ехавшего в Варшаву, откуда ночью З. Боревич пересаживался в поезд до Петербурга, я не подозревал, что видимся в последний раз.»

**Комментарий.** Эти две обширные цитаты из статьи В. Наркевича и В. Венслава [3] носят несомненно личностный характер, но тем они и ценные. Однако они не объясняют ранних фактов биографии З.И. Боревича и далеко не охватывают его связей с Польшей.

О профессоре Зеноне Ивановиче Боревиче я писал по просьбе редакции журнала «Wiadomości Matematyczne» в рамках двух статей (в 1987 году [2] и в 1998 году [3]) о математиках Ленинграда — Санкт-Петербурга.

Вторую статью, из указанных выше, я писал в Польше<sup>5</sup> по памяти

<sup>4</sup>«Poczet Królów Polskich»

<sup>5</sup>В Польше мне довелось трижды длительно жить и работать. В первый раз в Варшаве (1979–80 гг.), второй раз в г. Быдгощ (1984–87 гг.), и в третий раз в г. Зелёна Гура (1998–2003 гг.). Краткосрочных же поездок в Польшу у меня было больше 20

(без необходимых документов) и допустил несколько неточностей: сместил дату смерти на дату похорон; сестра у З.И. Боревича была младше его, а не старше; вернулся Зенон Иванович на матмех в 1944 году, а не в 1945 году. Видимо, поэтому проф. В. Наркевич и д-р В. Венслав об этих статьях деликатно не вспоминают. Впрочем, и статью профессора А.В. Яковleva [4] они также не упоминают.

Начнём с места рождения. По официальным документам З.И. Боревич родился в селе Суслы Житомирской области. Уже в 90-е годы во время неформальных бесед со мной о «Полонии»<sup>6</sup> З.И. Боревич неоднократно говорил, что родом он из окрестностей г. Гливице (Gliwice), вблизи которого с немецкой провокации и началась II-я Мировая война, а подлинного свидетельства о рождении у него не сохранилось.

Как рассказывал мне З.Б. Боревич уже в 90-е годы, его отец не нашел работы и в Нальчике, и вынужден был уехать в Орджоникидзе (теперь вновь Владикавказ). По окончании средней школы в Нальчике в 1939 году З.И. Боревич поступает на математико-механический факультет ЛГУ<sup>7</sup>. До начала Великой Отечественной войны З.И. Боревич успел закончить первые два курса.

В августе 1941 года Ленинградский университет был эвакуирован в г. Саратов (туда же выехал и мат.-мех), и именно там в 1942 году был мобилизован в армию З.И. Боревич, который к этому времени успел закончить и 3-й курс.

102 стройка, о которой вспоминают в статье В. Наркевич и В. Венслав, это был специальный военный строительный корпус, строивший дороги в прифронтовой полосе Ленинградского и Волховского фронтов, в том числе и знаменитую «Дорогу жизни».

После снятия блокады Ленинграда (27.01.1944 г.) был издан приказ Верховного Командования о демобилизации на Ленинградском и Волховском фронтах бывших студентов (но не всех!) 4-го и 5-го курсов по специальностям «важным для обороны страны». Именно, опираясь на этот приказ, З.И. Боревич и смог вернуться на мат.-мех. Такое

раз.

<sup>6</sup>Культурно-просветительское общество «Полония» было зарегистрировано в ноябре 1989 г. (за два часа до прилета, тогда еще в Ленинград, Премьера Польши Тadeуша Мазовецкого (1927–2013)). Будучи одним из организаторов этого общества, я участвовал в подготовке документов для регистрации, а позже входил в состав правления. Т. Мазовецкий встречался тогда с основателями «Полонии» и видными поляками, жившими в Ленинграде. На встрече рядом со мной сидела Эдита Пьеха.

<sup>7</sup>До 1990 года в Ленинграде был только один университет (Ленинградский государственный; сокращенно ЛГУ).

возвращение далеко не было случайностью<sup>8</sup>. В голодные 1944–46 гг. З.И. Боревич, кроме учебы на мат.-мехе., прирабатывал, руководя кружком математики при городском Дворце пионеров.

В 1963 году мне довелось учиться и сдавать экзамены<sup>9</sup> по высшей алгебре Зенону Ивановичу (тогда ещё доценту). Лекции отличались строгостью, и в тоже время были понятны большинству слушателей. Выпускникам мат.-меха конечно льстило, что его книга «Теория чисел», написанная вместе с членом-корреспондентом АН СССР Игорем Ростиславовичем Шафаревичем<sup>10</sup> и опубликованная в Москве в издательстве «Наука» в 1964 г., уже в 1966 году была переведена на английский язык и издана в Бостоне (США). Зенон Иванович отличался необыкновенным самообладанием. Как-то во время его лекции в 88 аудитории (10-я линия, д. 33) со страшным грохотом оборвалась доска, задев мел в его руке. Не обрачиваясь, он продолжил писать на опустившейся доске. Не случайно, он был и умелым горным туристом.

Деканом мат.-меха ЛГУ им. А.А. Жданова Зенон Иванович был в 1973–1983 годах. Это были для него, особенно в конце каденции, нелегкие годы. Шло постепенное «закручивание гаек» в связи с войной в Афганистане, сопровождаемое очередной волной антисемитизма. На мой несколько бестактный вопрос (уже в 90-е годы): «что привело на факультете к преследованию сына профессора В.А. Рохлина?» Зенон Иванович ответил прямо: «у профессора Рохлина было слишком много недоброжелателей, а вот профессора С.Г. Михлина мне отстоять удалось».

Теперь несколько слов о контактах З.И. Боревича с Польшей. Конечно, они не ограничивались Вроцлавом и Катовицами. Постоянные связи у Зенона Ивановича были и с Варшавой, и с Торунем, и с Зеленой Гурой. Определялось это в первую очередь интересом к его научным результатам, как в гомологической алгебре, полученным под руководством профессора Д.К. Фаддеева, так и к его работам по изучению модулей Галуа, связанных с локальными полями, а с середины 70-х годов — с работами по теории линейных групп. Немаловажную роль в популярности З.И. Боревича в Польше сыграла и его монография «Тео-

<sup>8</sup>Мой отец — медик также вернулся к учебе в это же время по этому же приказу.

<sup>9</sup>Кроме меня, З.И. Боревич учил ещё нескольких будущих преподавателей Сыктывкарского университета, в частности, будущих профессоров А.Б. Певного и В.Н. Исакова.

<sup>10</sup>На мои вопросы уже в 90-е годы, «как получилось, что И.Р. Шафаревич взял вас в соавторы книги», З.И. с улыбкой отшучивался: «Ведь мы по официальным документам земляки (из Житомирской области) и практически ровесники».

рия чисел», написанная совместно с И.Р. Шафаревичем, остающаяся до сих пор во всем мире настольной книгой по алгебраической теории чисел.

Доктор В. Венслав в приведенной выше цитате, вспоминает день 15 ноября 1988 года. А за 5 дней до этого дня, т. е. 10 ноября того же года З.И. Боревич сделал доклад в Институте математики Высшей Педагогической Школы (сокращенно, ВПШ) в г. Зелёна Гура. После доклада ему был устроен торжественный приём. При этом присутствовали и профессор В. Наркевич и тогдашний директор Института математики, будущий профессор Зеленогурского университета Александр Гритчук (A. Grytczuk).

На стажировку на кафедру алгебры ЛГУ выезжали преподаватели и из Зелёной Гуры. Приведу здесь для примера фрагмент отчета о стажировке д-ра Кристины Бялэк от 13.10.1987 года (см. рис. 2).

III. По причинам, не зависящим от автора отчета, не была осуществлена командировка в город Москву в МГУ для консультаций на кафедре теории чисел.

В заключение стажер хочет подчеркнуть, что стажировка принесла ему большую пользу. Кафедра высшей алгебры и теории чисел, особенно научный руководитель проф. З.И.Боревич создали все условия для реализации плана стажировки.

Автор отчёта хочет выразить глубокую признательность научному руководителю проф. З.И.Боревичу за проявленное внимание к работе стажера и ценные консультации.

Научный руководитель,  
профессор

Стажер



З.И.Боревич  
K.Бялек  
K.Бялек

13.10.87

Рис. 2. Фрагмент отчета д-ра Кристины Бялэк

Назову ещё нескольких польских математиков, с которыми контактировал в Польше З.И. Боревич и от которых я об этом узнал: это крупнейший специалист по теории чисел, академик Польской Академии Наук профессор А. Шинцель (A. Schincel), Президент Польского математического общества, профессор З. Семадени (Z. Semadeni), профессор К. Глазек (K. Glazek).

Хотел бы также сказать, что за 10 дней до смерти, т. е. 10 февраля 1995 года, З.И. Боревич был оппонентом при защите кандидатской диссертации на стыке анализа и алгебры в Докторской Совете при РГПУ им. А. И. Герцена, которым я тогда руководил. Во время банкета он с увлечением рассказывал, переходя и на польский язык, о своих планах очередной поездки в Польшу. Он собирался побывать в Щецине, а также, если получится, в местах работы Карла Вейерштрасса. И таким оптимистом и увлеченным человеком он и остался в моей памяти.

### INTERNATIONAL ALGEBRAIC CONFERENCE

dedicated to the memory of Z.I.Borevich

St-Petersburg, Russia  
September 17-23, 2002

## Program



Рис. 3. Обложка программы конференции, посвященной памяти З.И. Боревича

В заключение скажу еще, что 17–23 сентября 2002 года в СПбГУ прошла Международная Алгебраическая Конференция, посвященная памяти Зенона Ивановича Боревича, (обложку программы см. на рис. 3) на которой кроме пленарных докладов российских профессоров: А.В. Яковлева, С.В. Востокова, Н.А. Вавилова, А.А. Махнёва, С.И. Адяна — были представлены доклады и сообщения гостей из Италии, Голландии, Германии, Китая, Сербии, Латвии и других стран, а

также молодых математиков из России.

## Список литературы

1. Narkiewicz W., Więsław W. Zenon Borewicz (1922–1995) // *Wiadomości Matematyczne*. XXXVI. 2000. S. 65–72.
2. Odyniec W.P. O matematykach Leningradu // *Wiadomości Matematyczne*. XXVII. 1987. S. 279–292.
3. Odyniec W.P. O matematykach Leningradu (Sankt-Petersburga) i nie tylko – 10 lat później // *Wiadomości Matematyczne*. XXXIV. 1998. S. 149–158.
4. Яковлев А.В. Зенон Иванович Боревич. Вопросы теории представлений алгебр и групп. 5 // *Записки научных семинаров ПОМИ*. Т. 236. 1997. С. 9–12.

СГУ им. Питирима Сорокина

Поступила 01.06.2017

### Summary

**Odyniec W. P.** Zenon Ivanovich Borevich (1922–1995) (To the 95th anniversary)

The article is devoted to the biography of the famous algebraist professor Zenon Ivanovich Borevich, the dean of Mathematics and Mechanics faculty of the Leningrad state university in 1973–83 years, seen by Polish mathematicians, and also to Z.I. Borevich's contacts with Poland, with detailed comments of the author.

*Keywords:* Z.I. Borevich, the Siege of Leningrad, homologous algebra, linear groups theory, society of «Polonia».

### References

1. Narkiewicz W., Więsław W. Zenon Borewicz (1922–1995), *Wiadomości Matematyczne*, 36, 2000, pp. 65–72.
2. Odyniec W.P. About mathematicians of Leningrad, *Wiadomości Matematyczne*, 27, 1987, pp. 279–292.
3. Odyniec W.P. About mathematicians of Leningrad – (St.Petersburg) – and not only of them, *Wiadomości Matematyczne*, 34, 1998, pp. 149–158.

4. **Jakovlev A.V.** Zenon Ivanovich Borevich. Questions of the theory of representations of algebras and groups. 5, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI*, t. 236, 1997, pp. 9–12.

**Для цитирования:** Однинец В. П. Зенон Иванович Боревич (1922–1995) (К 95-й годовщине со дня рождения) // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 59–68.*

**For citation:** Odyniec W. P. Zenon Ivanovich Borevich (1922–1995) (To the 95th anniversary), *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 59–68.

## *МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ*

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 514**

# **ОПЫТ ОРГАНИЗАЦИИ УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

***E. H. Лубягина, Л. В. Тимшина***

В статье предлагаются материалы, которые можно использовать для организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка. Приводятся примеры использования среды GeoGebra.

*Ключевые слова:* исследовательская деятельность, кривые второго порядка, GeoGebra.

### **1. Введение**

В современных условиях в обучение все активнее внедряется проектная деятельность, поощряется участие студентов в исследовательских конкурсах. Содержание математических дисциплин отлично подходит для приобщения студентов к элементам исследовательской деятельности, а постоянно развивающиеся системы компьютерной математики позволяют оптимизировать процесс исследования.

Исследовательская деятельность предполагает работу с первоисточниками, моделирование объектов и процессов, накопление и систематизацию данных, формулирование гипотез, проведение эксперимента (например, компьютерного), интеграцию знаний из различных учебных дисциплин, приложение изученных методов к исследованию различных объектов, постановку новых задач на базе решенной. Таким образом, научное познание характеризуется многоэтапностью и актуальной представляется постановка математических задач, решение которых предполагает комплексное исследование задачной ситуации. Вопросам, касающимся организации исследовательской деятельности студентов посвящены научно-педагогические публикации [7, 8, 13].

Результат исследования зачастую зависит от удачно подобранной модели задачной ситуации, от выбранных за основу свойств и связей между объектами в задаче. Кроме того использование процедуры моделирования способствует формированию умений, связанных с применением математических методов при конструировании объектов, актуализирует теоретические знания по математике. Создание модели задачи может быть существенно упрощено средствами компьютерных систем, применение которых повышает наглядность исследования и дает возможность варьировать экспериментальные данные.

В геометрии для моделирования и визуализации задачи целесообразно использование динамических чертежей. Они позволяют осуществить анализ геометрической конфигурации, выполнить дополнительные построения, установить связи между ее элементами.

Как видно из анализа программных продуктов по геометрии, проведенного в [14], для создания живых чертежей лучше подходит система динамической геометрии GeoGebra. Это свободно распространяемая среда, которая позволяет создавать Java-апплеты динамических чертежей, дает возможность создания новых инструментов, органически сочетается с интерактивной доской и существенно расширяет диапазон ее применения. Подробнее с возможностями GeoGebra и опытом применения ее в учебном процессе можно ознакомиться в публикациях [3, 5, 12–14].

Предлагаемые в статье материалы можно использовать для организации учебно-исследовательской деятельности студентов, они подтверждают эффективность использования GeoGebra на этапе моделирования. Объединяющим тематическим элементом приведенных задач являются кривые второго порядка.

## 2. Исследование геометрического места точек

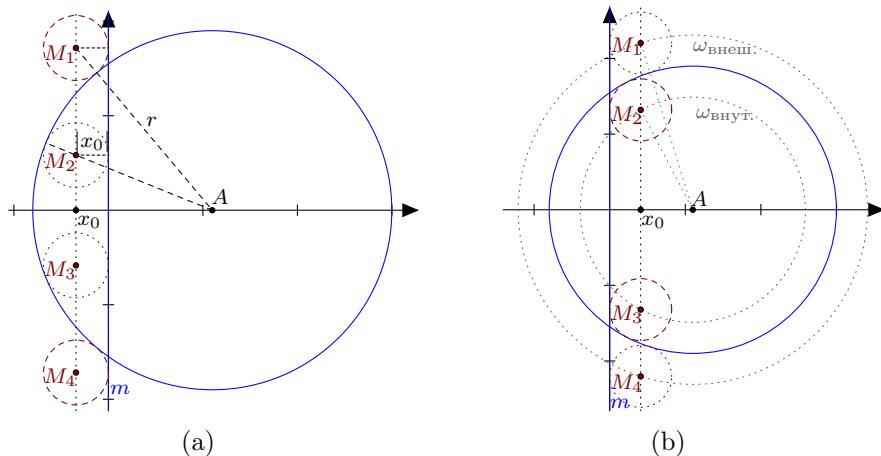
При изучении геометрии для развития исследовательских навыков как нельзя лучше подходят задачи на нахождение геометрических мест точек (ГМТ). Этапы решения таких задач (нахождение некоторых точек ГМТ, выдвижение гипотезы, доказательство) соответствуют основным этапам исследовательской деятельности. Использование метода моделирования здесь целесообразно на этапе формирования гипотезы.

Рассмотрим пример задачи на нахождение геометрического места точек (ГМТ) в рамках курса «Аналитическая геометрия», раздел «Кривые второго порядка».

**Пример 1.** Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности с радиусом  $r$  и прямой  $t$ . Рассмотреть раз-

*личные случаи расположения прямой и окружности.*

Для построения точек искомого ГМТ проведем анализ их свойств. Для этого (а также для последующего аналитического задания ГМТ) введем прямоугольную декартову систему координат (ПДСК) так, чтобы ось ординат совпала с данной прямой  $m$ , а центр данной окружности принадлежал оси абсцисс (рис. 1, (a)).



**Рис. 1.** (а) — выделение свойств ГМТ; (б) — построение точек ГМТ как пересечения прямой с соответствующей окружностью

Зафиксируем абсциссу  $x_0$  искомой точки  $M$ . Тогда точка  $M$  принадлежит прямой  $x = x_0$ . Поскольку точка  $M$  является центром окружности, касающейся данной окружности, то она удалена от центра данной либо на расстояние  $r + |x_0|$ , равное сумме радиусов окружностей, при внешнем касании, либо на расстояние  $|r - |x_0||$ , равное модулю разности радиусов окружностей, при внутреннем касании. Значит, точка  $M$  принадлежит окружности с центром в центре данной окружности и радиусом, равным одному из указанных расстояний.

Итак, точка  $M$  принадлежит ГМТ тогда и только тогда, когда она является пересечением прямой с объединением полученных окружностей (рис. 1, (б)). При различных значениях  $x_0$  таких точек пересечения будет не более четырех.

На следующем этапе решения задачи выполним компьютерное построение искомой фигуры по выявленному свойству ее точек. Для создания живого чертежа задачи (рис. 2) в GeoGebra предлагается следующая последовательность действий:

1. Строим данную окружность  $c$  по двум точкам  $A$  и  $B$ , где  $A$  — центр на оси абсцисс и  $B$  — точка окружности.

2. Задаем точку  $X_0$  на оси абсцисс. Она будет использована для придания динамики чертежу, в частности для построения прямой  $h$ :  $x = x(X_0)$  (командой  $x(X_0)$  задается абсцисса точки  $X_0$ ).

3. Фиксируем радиус  $r$  данной окружности с помощью команды Радиус[ $c$ ].

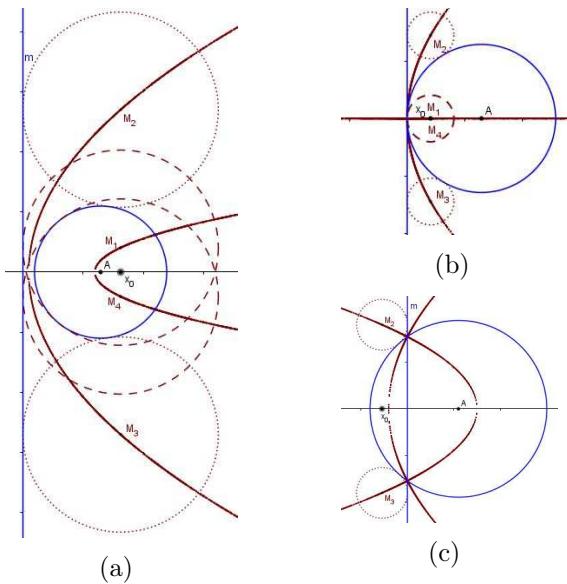
4. Строим окружности  $\omega_{\text{внутр}}$  и  $\omega_{\text{внеш}}$  по центру в точке  $A$  и радиусам  $abs(r - abs(x(X_0)))$  и  $r + abs(x(X_0))$  (функция  $abs(x)$  вычисляет абсолютную величину числа  $x$ ).

5. С помощью инструмента «Пересечение» фиксируем точки  $M_1, M_2, M_3, M_4$  пересечения прямой  $h$  с каждой из окружностей  $\omega_{\text{внутр}}$  и  $\omega_{\text{внеш}}$ . Чтобы учесть все четыре возможные точки пересечения, расположение точки  $X_0$  и окружности  $c$  можно взять как на рис. 1, (b).

6. Для точек  $M_i$  выбираем свойство «Оставлять след».

7. Для наглядности строим окружности с центрами в точках  $M_i$  с радиусами  $abs(x(X_0))$  и, меняя свойства объектов, скрываем несущественные обозначения, нужное выделяем цветом либо штриховкой.

8. Анимируем чертеж по изменению положения точки  $X_0$ .



**Рис. 2.** Результат компьютерного моделирования в примере 1

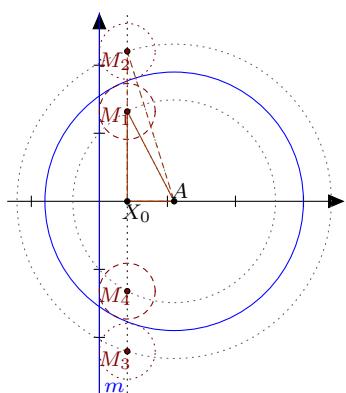
Визуализация искомого множества точек позволяет получить гипотезу или проверить первоначальные предположения.

В данной задаче тип ГМТ зависит от взаимного расположения данных прямой и окружности. Мы можем выдвинуть следующую гипотезу:

1. В случаях, когда прямая и окружность имеют две общие точки либо прямая и окружность не имеют общих точек, искомое множество точек представляет объединение двух парабол (рис. 2, (а) и (с)).

2. В случае, когда прямая касается окружности, получаем объединение параболы и прямой (рис. 2, (б)).

Варьируя исходные данные, мы можем также заметить, что в том случае, когда данная прямая проходит через центр окружности, параболы симметричны относительно прямой и имеют вершины в серединах радиусов данной окружности, перпендикулярных данной прямой. Отметим, что вывод о расположении вершин парабол можно обобщить для любого расположения прямой  $t$  и окружности  $c$ .



**Рис. 3.** Аналитическое задание множества для обоснования выдвинутой гипотезы

На следующем этапе решения задачи логически обоснуем выдвинутую гипотезу. Одним из методов здесь является аналитическое задание искомого множества с последующим анализом полученного уравнения (рис. 3). Обозначим координаты точек  $M_i(x, y)$  и  $A(a, 0)$ . Для обоснования выдвинутой ранее гипотезы заметим, что треугольник  $AM_iX_0$  прямоугольный. Тогда  $y^2 + (a - x)^2 = (r - |x|)^2$  (для внутренних точек) или  $y^2 + (a - x)^2 = (r + |x|)^2$  (для внешних точек). Получаем, что в зависимости от значения  $a$  искомые точки лежат на параболах  $y^2 - 2x(a + r) - r^2 = 0$  и  $y^2 - 2x(a - r) - r^2 = 0$  либо на прямой  $y = 0$  и одной из парабол. Другим способом обоснования гипотезы является использование характеристического свойства точек параболы как точек, равноудаленных от данной точки — фокуса и прямой — директрисы, однако последний способ требует развитой интуиции и опыта решения подобных задач.

Приведем примеры задач, результатом решения которых являются невырожденные кривые второго порядка.

- Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся окружности радиуса  $r$  и проходящих через точку, лежащую внутри данной окружности.

2. Через одну из вершин гиперболы проведены всевозможные хорды. Найти геометрическое место их середин.

Аналогичные задачи с избыtkом можно найти в вузовских сборниках задач по геометрии [2]. Отметим также книгу [1], в которой собраны

разнообразные геометрические свойства кривых второго порядка.

### 3. Исследование огибающей семейства

Весьма интересными являются исследования целых семейств кривых. Пучки коник рассматриваются в [1]. Другим вопросом теории семейств кривых является нахождение огибающей семейства, то есть линии, которая касается каждой кривой семейства и при этом вся состоит только из таких точек касания. Геометрический подход к решению этого вопроса реализован в [4].

В задачах на нахождение ГМТ в GeoGebra было использовано свойство объектов Оставлять след. Этот инструмент также эффективно работает в задачах на нахождение огибающих семейств кривых, так как для определения типа огибающей часто достаточно изобразить набор линий семейства.

**Пример 2.** Найти огибающую линию семейства парабол  $cy - (c - x)^2 = 0$ .

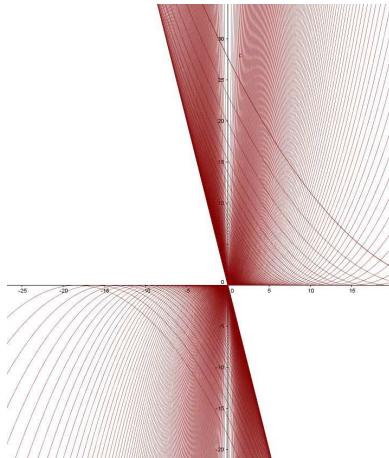


Рис. 4. Семейство парабол  $cy - (c - x)^2 = 0$

Для получения компьютерной модели в GeoGebra возьмем точку  $C$  на оси абсцисс. Ее первая координата  $x(C)$  будет использована в качестве параметра. В строке ввода зададим параболу формулой  $x(C)y - (x(C) - x)^2 = 0$ . В свойствах параболы выберем «Оставлять след» и для наглядности уменьшим толщину линии. Анимируя чертеж по объекту  $C$ , получим приведенную на рисунке совокупность парабол. На рис. 4 представлено изображение парабол данного семейства, полученное средствами GeoGebra. Данного чертежа обладает неоспоримым преимуществом перед чертежем «от руки» и дает возможность выдвигнуть гипотезу относительно вида огибающей. Очевид-

но, что в данном случае огибающими будут прямая, проходящая через начало координат и прямая  $y = 0$ .

Для доказательства выдвинутой гипотезы можно воспользоваться аппаратом математического анализа (см. [10]). Известно, что точки огибающей семейства кривых  $f(x, y, c)$  лежат на дискриминантной кривой, заданной системой уравнений  $\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ f'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$ . Однако дискриминант-

ная кривая может содержать также особые точки, в которых линии семейства не имеют определенной касательной.

В данном примере получаем систему  $\begin{cases} cy - (c - x)^2 = 0 \\ y - 2(c - x) = 0 \end{cases}$ , решением которой будет объединение двух прямых  $y = 0$  и  $y = -4x$ . Приведенная компьютерная визуализация расположения семейства парабол подтверждает, что полученная дискриминантная кривая не имеет особых точек и совпадает с объединением огибающих семейства.

Отметим, что задача о нахождении огибающей появляется при решении дифференциальных уравнений (см., например, [10]). Действительно, для дифференциального уравнения  $F(x, y, y') = 0$  общий интеграл  $\Phi(x, y, c) = 0$  определяет семейство интегральных кривых, зависящих от параметра  $c$ . Уравнение огибающей этого семейства также будет решением взятого дифференциального уравнения. В случае, когда такое решение невозможно получить из общего интеграла ни при каком значении  $c$  (не является интегралом семейства), его называют особым решением дифференциального уравнения.

#### 4. Исследование инверсных образов

Удобным инструментом в исследовательской деятельности служит компьютерная реализация геометрических преобразований. В курсе вузовской геометрии изучаются различные виды преобразований плоскости и пространства: движения, преобразования подобия, аффинные преобразования. Более сложное преобразование геометрических фигур представляет собой инверсия.

В имеющейся учебной и научно-популярной литературе, посвященной инверсии, обычно рассматриваются образы окружностей и прямых при инверсии. Однако интересный результат дает инверсия кривых второго порядка. Рассмотрение образов равносторонней гиперболы, параболы, эллипса при различном расположении центра инверсии приводит к следующему факту: образами кривых второго порядка являются различные «замечательные кривые», такие как строфоида, циссоида Диоклеса, улитка Паскаля, кардиоида, лемниската Бернулли.

Информацию о замечательных кривых можно найти в [6]. Инверсным образом равносторонней гиперболы посвящена статья [9].

Отметим, что в GeoGebra имеется стандартная процедура преобразования инверсии («Отражение относительно окружности»), что позволяет существенно оптимизировать время решения соответствующих задач.

Целью предложенного исследования является изучение инверсных

образов невырожденных кривых второго порядка при различных расположениях центра инверсии.

**Пример 3.** Исследовать инверсные образы эллипса, равнобочной гиперболы, параболы.

Для выдвижения гипотезы касательно вида образа кривой вновь воспользуемся GeoGebra. Для того, чтобы было можно быстро изменять исходные данные задачной конфигурации, зададим КВП ее общим уравнением  $(1-\varepsilon^2)x^2 - 2px + y^2 = 0$  для изменяющихся параметров  $p$  и  $\varepsilon$  (рис. 5): В GeoGebra выберем точки  $\varepsilon$  на оси абсцисс и  $p$  на оси ординат. Далее введем конику  $k$  командой  $(1-x(\varepsilon)^2)*x^2 - 2y(p)*x + y^2 = 0$ . По двум точкам  $O$  и  $R$  зададим окружность  $c$ . Зададим инверсный образ конику с помощью инструмента «Отражение относительно окружности» либо командой Отразить[ $k, c$ ]. Меняя положения точек  $\varepsilon, p$  будем изменять конику, меняя положение точек  $O, R$ , изменим окружность инверсии. Результат приведен на рисунке. Окружность также построим по двум переменным точкам. Полученная динамическая картинка позволит сделать начальные предположения, а дополнительные построения (задание средствами GeoGebra фокусов и других параметров конику) позволяют уточнить их и выдвинуть гипотезы.

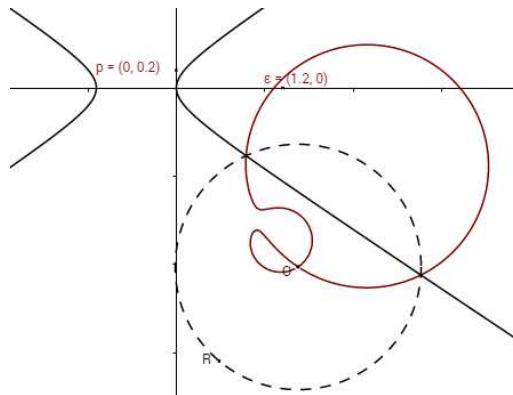


Рис. 5. Выдвижение гипотезы для примера 3

Можно выдвинуть следующие гипотезы:

1. Инверсный образ равносторонней гиперболы относительно ее центра суть лемниската Бернулли (рис. 6, (а)).
2. Образом параболы при инверсии с центром в вершине параболы является циссоида Диоклеса (рис. 6, (б)).
3. Образом эллипса при инверсии с центром в одном из его фокусов является улитка Паскаля, полюс которой совпадает с этим фокусом, а

ось — с осью эллипса, направленной от ближайшей вершины к выбранному фокусу (рис. 6, (c)).

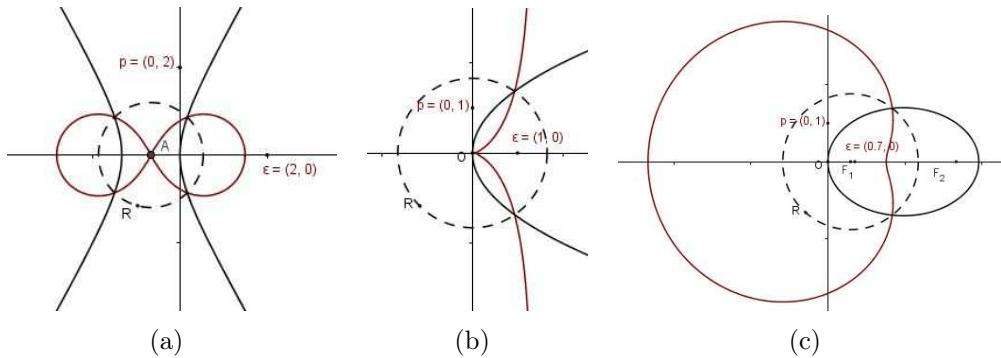


Рис. 6. Частные инверсных образов КВП

Визуализация полученного множества точек используется для выдвижения или подтверждения гипотезы относительно вида полученной линии. На следующем этапе гипотеза строго обосновывается.

Приведем доказательство гипотезы 1). Каноническое уравнение равносторонней гиперболы, центр которой совпадает с началом координат:  $x^2 - y^2 = a^2$ , а формулы преобразования координат точек при соответствующей инверсии:  $x = \frac{x'r^2}{x'^2 + y'^2}$ ,  $y = \frac{y'r^2}{x'^2 + y'^2}$ . Преобразуя каноническое уравнение гиперболы, получим:  $(\frac{x'r^2}{x'^2 + y'^2})^2 - (\frac{y'r^2}{x'^2 + y'^2})^2 = a^2$  или  $(x'^2 + y'^2)^2 - \frac{r^4}{a^2}(x'^2 - y'^2) = 0$ . Последнее уравнение доказывает, что образом равносторонней гиперболы является лемниската Бернули.

Аналогичные рассуждения можно проделать сразу для общего уравнения КВП.

## 5. Исследование с использованием аффинных преобразований

В этом пункте приведем пример исследовательской ситуации, в которой компьютерное моделирование не играет решающей роли. В ней основной акцент должен быть сделан на логические рассуждения.

В качестве средства исследования КВП выберем аффинные преобразования евклидовой плоскости, которые благодаря своим инвариантам, являются мощным средством для вывода новых геометрических теорем и решения задач (см., например, [15]).

Идейной линией предложенных далее задач является использование инвариантов аффинных преобразований и рассмотрение аффинно эквивалентных фигур. Приведенные материалы были использованы при проведении семинарского занятия «Изучение свойств эллипса как фигуры аффинно эквивалентной окружности» [11].

Чтобы спланировать самостоятельную работу студентов, приобщить их к исследовательской деятельности, при подготовке к семинару студентам нужно было решить две задачи:

1. Доказать, что эллипс аффинно эквивалентен окружности.
2. Выявить аффинные свойства окружности, позволяющие обосновать свойства эллипса:

А. Эллипс имеет центр симметрии.

Б. Геометрическим местом середин параллельных хорд эллипса является некоторый диаметр эллипса.

В. Все диаметры эллипса разбиваются на пары сопряженных, обладающих тем свойством, что середины хорд эллипса, параллельных одному из этих диаметров, лежат на другом диаметре.

Г. Касательные к эллипсу, проведенные через концы его диаметра, параллельны сопряженному диаметру.

Д. Параллелограммы, построенные на парах сопряженных полудиаметров эллипса, имеют одну и ту же площадь, равную площади прямоугольника, построенного на полуосиях эллипса.

Е. Площадь эллипса вычисляется по формуле  $S = \pi ab$ , где  $a$  и  $b$  полуоси эллипса.

Аффинную эквивалентность эллипса и окружности можно доказать по определению аффинно эквивалентных фигур. Для этого необходимо подобрать аффинное преобразование плоскости, переводящее окружность в эллипс. На момент изучения аффинных преобразований доказано, что любой эллипс, может быть получен как образ некоторой окружности при преобразовании сжатия к ее диаметру. Таким образом, для решения первой задачи достаточно показать, что сжатие плоскости к прямой аффинно.

Тот факт, что окружность переходит в эллипс при аффинном преобразовании, указывает на наличие каких-то общих свойств этих линий, и позволяет использовать новые подходы при изучении эллипса. Это иллюстрируют свойства А.–Е. второй задачи. Для их решения используются следующие инварианты: простое отношение точек прямой и коллинеарность точек (А), простое отношение точек прямой и сохранение параллельности прямых (Б, В), отношение площадей фигур (Д, Е).

После обсуждения поставленных проблем семинарского занятия студентам предлагаются контрольные задачи для решения в группах:

1. Каждый вписанный в окружность параллелограмм является прямоугольником. Какие заключения о вписанных в эллипс параллелограммах можно отсюда вывести?

2. Каждый описанный около окружности параллелограмм является ромбом. Какие заключения об описанных около эллипса параллелограммах можно отсюда вывести?

3. Найдите геометрическое место точек пересечения касательных к эллипсу в концах сопряженных диаметров.

Сформулированные задачи ориентируют студентов на поиск путей и способов их решения, что предполагает активное использование определений, теорем, основных фактов теории аффинных преобразований.

При решении первой и второй задач в случае затруднения можно задать дополнительный вопрос: как связаны стороны параллелограмма с диаметрами эллипса?

Компьютерных программ при создании чертежей к представленным задачам не требуется.

Отметим, что при подготовке и проведении семинарских занятий большое значение имеют рекомендации студентам по организации самостоятельной работы: изучение литературы, подготовка индивидуальных и групповых докладов, планирование по времени выступлений, а также моделирование вступительной и заключительной частей семинара.

### Выводы

Материал статьи может, например, быть использован при формировании исследовательской деятельности на различных курсах и уровнях образования (бакалавриат, магистратура) при изучении геометрии на педагогических специальностях. Материал статьи может быть использован при проведении лабораторных занятий по курсу «Аналитическая геометрия», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» и может послужить основой выпускной работы или индивидуального задания для магистрантов.

## Список литературы

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства криевых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007. 136 с.

2. Атанасян Л. С., Атанасян В. А. Сборник задач по геометрии. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Ч. I. М.: Просвещение, 1973.
3. Безумова О. Л., Овчинникова Р. П., Троицкая О. Н., Троицкий А. Г., Форкунова Л. В., Шабанова М. В., Широкова Т. С., Томилова О. М. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra. Архангельск: Изд-во «Кира», 2011. 140 с.
4. Болтянский В. Г. Огибающая // Квант, № 3, 1987.
5. Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Геометрические основы компьютерной графики: учебное пособие. Киров. Изд-во: ООО «Радуга-ПРЕСС», 2015. 164 с.
6. Гурова А. Э. Замечательные кривые вокруг нас. М., 1989.
7. Забелина С. Б. Формирование исследовательской компетентности магистрантов математического образования (направление педагогическое образование). Дис. ... канд. пед. наук. Москва, 2015.
8. Качалова Л. П. Исследовательская компетенция магистрантов: структурно-содержательный анализ // Политехнический журнал научных публикаций «Дискуссия». Выпуск №3(55). 2015.
9. Руинский А. Инверсные преобразования гиперболы.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2. Изд-во «Наука», 1974. 479 с.
11. Тимшина Л. В. Семинарские занятия по геометрии в вузе // Преподавание математики, физики, информатики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: Материалы V Всероссийской науч.-практ. конф. Глазов: ООО «Глазовская типография», 2015. С. 131–133.
12. Чеботарева Э. В. Компьютерный эксперимент с GeoGebra. Казань: Казанский ун-т, 2015. 61 с.
13. Шабанова М. В., Овчинникова Р. П., Ястребов А. В., Павлова М. А., Томилова А. Е., Форкунова Л. В., Удовенко Л.Н., Новоселова Н. Н., Фомина Н. И., Артемьевая М. В., Широкова Т. С., Безумова О. Л., Котова С. Н.,

- Паршева В. В., Патронова Н. Н., Белорукова М. В., Тепляков В. В., Рогушина Т. П., Тархов Е. А., Троицкая О. Н., Чиркова Л. Н. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение. Монография по исследовательской деятельности. М.: Издательский дом Академия Естествознания, 2016. 300 с.
14. Ширикова Т. С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra. Дисс. ... канд. пед. наук. Архангельск, 2014.
  15. Яглом И. М., Ашкинузе В. Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии: Ч. I. М.: 1962.

### Summary

Lubyagina E. N., Timshina L. V. Experience in the organization of students' educational and research activities in the study of second-order curves

In the article, we offer materials that can be used to organize students' educational and research activities in studying second-order curves. We give examples of the use of the GeoGebra environment.

*Keywords:* research activity, second-order curves, GeoGebra.

### References

1. Akopyan A. V., Zaslavsky A. A. *Geometric properties of second-order curves*, M ., 2007, 136 p.
2. Atanasyan L. S., Atanasyan V. A. *Collection of problems on geometry*, Textbook for students of physical and mathematical sciences, I. M.: Enlightenment, 1973.
3. Bezumova O. L., Ovchinnikova R. P., Troitskaya O. N., Troitsky A. G., Vorkunova L. V., Shabanova M. V., Shirokova T. S., Tomilova O. M. *Geometry training using GeoGebra capabilities*, Arkhangelsk: Kira, 2011, 140 p.
4. Boltyanskii V. G. Envelope, *Kvant*, №. 3, 1987.
5. Vechtomov E. M. , Lubyagina E. N. *Geometric Foundations of Computer Graphics: A Training Manual*, Kirov. Publishing house: «Rainbow-Press», 2015, 164 p.

6. Gurov A. E. *Wonderful curves around us*, M., 1989.
7. Zabelina C. B. *Formation of research competence of undergraduates of mathematical education (direction pedagogical education)*. Dis. ... cand. ped. sciences, M., 2015.
8. Kachalova L. P. Research competence of undergraduates: structurally-substantial analysis, *Political journal of scientific publications «Discussion»*, №3 (55), 2015.
9. Ruinsky A. Inverted hyperbola transformations.
10. Smirnov V. I. *Course of Higher Mathematics*, t. 2, «Science», 1974, 479 p.
11. Timshina L. V. Seminars on Geometry in the University, *Teaching Mathematics, Physics, Informatics in Universities and Schools: Content Problems, Technologies and Techniques: Proceedings of the V All-Russian Scientific Conference. Conf.* Glazov: «Glazov printing house», 2015. P. 131–133.
12. Chebotareva E. V. *Computer experiment with GeoGebra*, Kazan: Kazan University, 2015, 61 p.
13. Shabanova M. V., Ovchinnikova R. P., Yastrebov A. V., Pavlova M. A., Tomilova A. E., Forkunova L. V., Udovenko L. N., Novoselova N. N., Fomina N. I., Artemieva M. V., Shirikova T. S., Bezumova O. L., Kotova S. N., Parsheva V. V., Patronova N. N., Belorukova M. V., Teplyakov V. V., Rogushina T. P., Tarkhov E. A., Troitskaya O. N., Chirkova L. N. *Experimental mathematics in the school. Research training. Monograph on research activities*, M.: Publishing house Academy of Natural History, 2016, 300 p.
14. Shirikova T. S. *Method of teaching students of the basic school the proof of theorems in the study of geometry using GeoGebra*. Diss. ... cand. ped. sciences. Arkhangelsk, 2014.
15. Jaglom I. M., Ashkinuz V. G. *Ideas and methods of affine and projective geometry, I. M.*: 1962.

**Для цитирования:** Лубягина Е. Н., Тимшина Л. В. Опыт организации учебно-исследовательской деятельности студентов при изучении кривых второго порядка // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 69–83.*

**For citation:** Lubyagina E. N., Timshina L. V. Experience in the organization of students' educational and research activities in the study of second-order curves, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 69–83.

ВятГУ

Поступила 31.05.2017

## *НАСТАВНИК-УЧЕНИК*

*Вестник Сыктывкарского университета.*

*Серия 1: Математика. Механика. Информатика.*

*Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 539.3**

# **ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

***A. B. Ермоленко, K. C. Осипов***

Метод обобщенной реакции при расчете контактных задач со свободной границей требует большого количества итераций, на каждой из которых проводится много вычислений. Для ускорения расчетов в статье рассматривается распараллеливание одной контактной задачи с помощью технологии OpenMP на языке C++.

*Ключевые слова:* пластина, метод обобщенной реакции, контактная задача, параллельные вычисления

### **1. Контактная задача со свободной границей**

Рассмотрим контактное взаимодействие круглой шарнирно закрепленной пластины радиуса  $R$  и толщиной  $h$  с абсолютно жестким идеально гладким основанием. Считаем, что первоначально пластина расположенная на расстоянии  $\Delta$  от основания, на пластину действует осесимметрическая нагрузка. Под действием нагрузки пластина прогибается, и со стороны основания на нее начинает действовать сила реакции опоры  $r(\rho)$ . Дополнительно предполагаем, что в зоне контакта пластина выстилается без зазоров. Требуется определить прогиб пластины  $w$  и возникающие контактные реакции  $r(\rho)$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнениями типа Кáрмана–Тимошенко (см. [3] при  $b = 0, m_n = 0, h_\lambda^2 = 0$ ), которые в случае осесимметричности примут следующий вид:

$$D\Delta^2 w = q_n - h_\psi^2 \Delta q_n + (I - h_\psi^2 \Delta) L(\Phi, w),$$

$$\frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d(\rho \psi_\rho)}{d\rho} = -\frac{2(1+\nu)}{Eh}(q_n + L(\Phi, w)). \quad (1)$$

Здесь  $w$  — прогиб,  $\Phi$  — функция напряжения,  $\psi_i, i = 1, 2$  — поперечные сдвиги;  $h_\psi^2 = \frac{h^2}{6(1-\nu)}$ ;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жёсткость,  $q_n^+, q_n^-$  — нагрузки, действующие на верхнюю и нижнюю лицевые поверхности,  $q_n = q_n^+ - q_n^-$  — нормальная нагрузка;  $h$  — толщина пластины,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho \frac{d}{d\rho})$  — оператор Лапласа,  $L(\Phi, w) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{d\Phi}{d\rho} \frac{dw}{d\rho} \right)$  — билинейная форма Кáрмана, оператор Лапласа и билинейная форма Кармана приведены для осесимметричного случая.

При выводе уравнений (1) не используется геометрическая гипотеза Кирхгофа в части отказа от условия перехода нормали к недеформированной срединной поверхности в нормаль к деформированной поверхности, что приводит к возникновению поперечных сдвигов  $\psi_i, i = 1, 2$  и параметра  $h_\psi^2$ . Что же касается условия об неизменяемости длины нормали, то оно принимается.

При этом изгибающий момент  $M_{\rho\rho}$ <sup>1</sup> принимаем в виде [3]

$$M_{\rho\rho}^{(1)} = -D(w'' + \frac{\nu}{\rho} w'), \quad M_{\rho\rho}^{(2)} = D(\psi_\rho' + \frac{\nu}{\rho} \psi_\rho), \quad M_{\rho\rho} = M_{\rho\rho}^{(1)} + M_{\rho\rho}^{(2)}. \quad (2)$$

Границные условия шарнирного закрепления примем в виде

$$w(R) = 0, \quad w''(R) = 0, \quad \Phi(R) = 0, \quad \Phi'(R) = 0. \quad (3)$$

Кроме этого накладываем условия конечности  $w, \Phi$  и их вторых производных в центре пластины.

Функции Грина имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} G_w(\rho, \xi) &= \frac{\xi}{4} [(\rho^2 + \xi^2) \ln \frac{\rho}{\xi} + \xi^2 - \rho^2] H(\rho - \xi) - \\ &\quad - \frac{\xi}{4} [(2R^2 + \xi^2 - \rho^2) \ln \frac{R}{\xi} - \frac{(R^2 - \xi^2)}{2} - \frac{(R^2 - \xi^2)\rho^2}{2R^2}], \\ G_\Phi(\rho, \xi) &= \frac{\xi}{4} [(\rho^2 + \xi^2) \ln \frac{\rho}{\xi} + \xi^2 - \rho^2] H(\rho - \xi) - \\ &\quad - \frac{\xi}{4} [(2R^2 + \xi^2 - \rho^2) \ln \frac{R}{\xi} - \frac{3(R^2 - \xi^2)}{2} + \frac{(R^2 - \xi^2)\rho^2}{2R^2}]. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Остальные моменты равны нулю.

Здесь  $H(\rho)$  — функция Хэвисайда.

Для решения краевой задачи воспользуемся методом обобщенной реакции [5], итерационная схема которого имеет вид

$$r_k = [r_{k-1} + \beta(w_{k-1} - \Delta)]_+, \beta > 0, \quad (6)_1$$

$$w_k = \frac{1}{D} \int_0^l (q_n^+(\xi) - r_k(\xi) - h_\psi^2(q_n^+(\xi) - r_k(\xi))^{\prime\prime}) G(x, \xi) d\xi. \quad (6)_2$$

Здесь  $\phi_+ = \frac{1}{2}(\phi + |\phi|)$  — положительная срезка функции.

В качестве начального приближения полагаем

$$r_0 = 0, w_0 = \frac{1}{D} \int_0^l q_n^+(\xi) G(x, \xi) d\xi.$$

Если при этом  $w_0 < \Delta$ , то пластина не коснулась основания, и итерационную схему не проводим.

## 2. Применение технологии OpenMP к решению контактных задач

OpenMP [1] — технология разработки параллельных программ на языке C++ для систем с общей памятью. Для написания параллельной программы необходимо использовать набор директив компилятора и библиотечные функции. Принцип работы технологии: основной поток программы порождает дочерние потоки по мере необходимости, которую определяет программист. Разработка осуществляется путем вставки директив компилятора в те участки кода, которые необходимо распараллелить. Компилятор интерпретирует эти директивы и вставляет в соответствующие места программы библиотечные вызовы для распараллеливания участка кода.

Порядок использования технологии OpenMP:

- подключаем заголовочный файл *omp.h* при помощи команды `#include<omp.h>;`
- инициализируем командой `#pragma omp parallel {блок параллельного кода};`
- в дальнейшем блок параллельного кода берется в операторные скобки.

При программировании итерационной схемы (6) использовалась технология OpenMP. Распараллеливание применялось к вычислению интегралов, производных и вычислению значений функций на сетке. На рис.

1 в качестве примера приведен код, который вычисляет  $w_k$  по формуле (6)<sub>2</sub>. По умолчанию, барьером для потоков в конструкции *for* является конец цикла. Все потоки, по мере достижения конца цикла ожидают друг друга. И после того, как последний поток завершит свою работу, основная нить программы продолжает свою работу.

```
#pragma omp parallel
{
#pragma omp for private(tmp, tmp2)
    for (int i = 0; i < n + 1; i++) {
        tmp = 0;
        tmp2 = 0;
        for (int j = 1; j < n + 1; j++) {
            tmp = tmp +
                G[i][j] * (qn[j] * pow(R, 4.0) + Lpw[j]);
        }
        w[i] = (hh/D) * tmp;
    }
}
```

Рис. 1. Пример распараллеливания цикла *for*

Отметим, что при использовании технологии OpenMP необходимо только указать блок параллельного кода без непосредственного программирования.

### 3. Результаты численного эксперимента

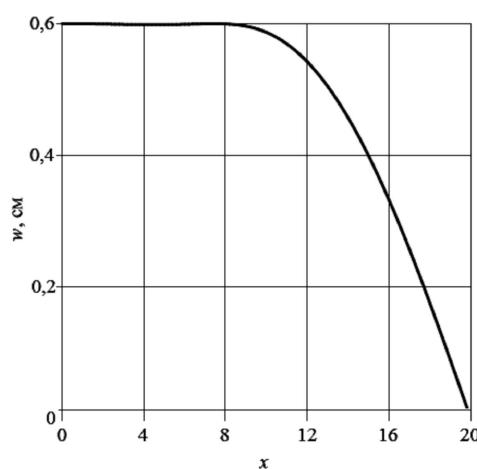
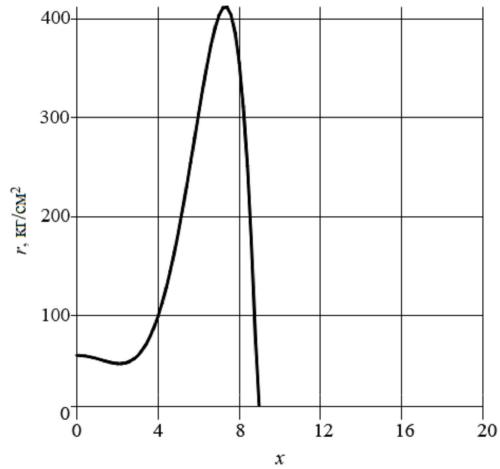
Используя итерационную схему (6), проводился численный эксперимент, который подтвердил предположение, что компоненты момента находятся в противофазе, т.е. с использованием поперечных сдвигов максимальные значения совокупного момента уменьшаются. В качестве примера на рис. 2–4 приведен результат расчета для пластины со следующими физическими и геометрическими параметрами:

$$q_n^+ = 50 \text{ кГ/см}^2, \nu = 0,3, E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2,$$

$$R = 20 \text{ см}, h = 1 \text{ см}, \Delta = 0,6 \text{ см}.$$

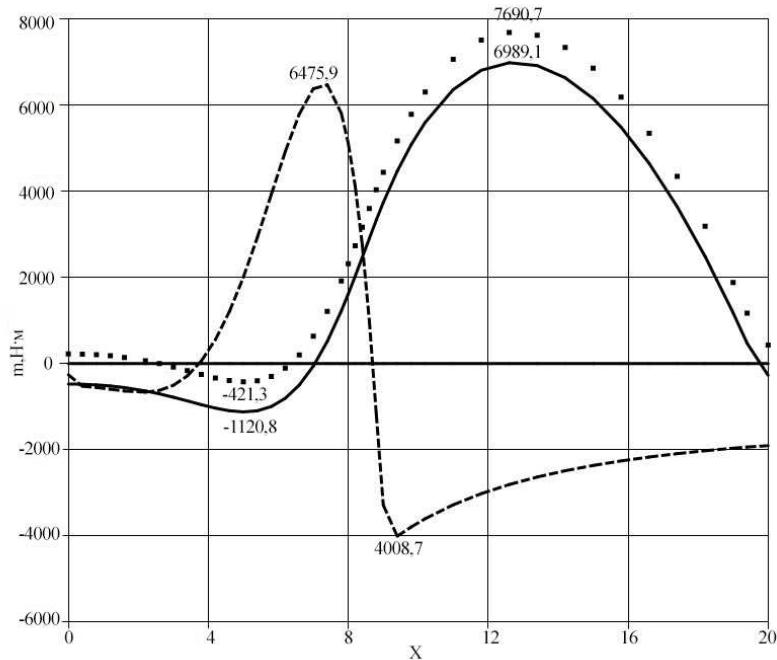
По рис. 2 видно, что прогиб соответствует условию шарнирного закрепления, на рис. 3 показано, что реакции на границе зоны контакта имеют пиковые значения, а в средней части соответствуют действующей нагрузке. На рис. 4 точками показан момент от сдвигов, пунктирной — момент, связанный с прогибом, сплошной линией — итоговый момент (см. (2)). Из последнего рисунка видно, что компоненты момента находятся в противофазе, т.е. с использованием поперечных сдвигов максимальные значения совокупного момента уменьшаются.

Также следует отметить, что в случае использования библиотеки *otpr.h* быстродействие на компьютере с многоядерным процессором увеличивается на 30 – 40 %.

Рис. 2. Прогиб ( $w$ )Рис. 3. Контактные реакции ( $r$ )

## Список литературы

1. **Антонов А. С.** Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP. М.: Изд–во МГУ, 2009. 77 с.
2. **Ермоленко А. В., Гинтнер А. Н.** Влияние поперечных сдвигов на понижение напряженного состояния пластины Теория изгиба пластин типа Кармана без гипотез Кирхгофа // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1. Мат. Мех. Инф. Вып. 1 (20). 2015. С. 91–96.
3. **Ермоленко А. В.** Теория плоских пластин типа Кармана–Тимошенко–Нагди относительно произвольной базовой плоскости // В мире научных открытий. Красноярск: НИЦ, 2011. №8.1 (20). С. 336–347.
4. **Михайловский Е. И., Ермоленко А. В., Миронов В. В., Тулубенская Е. В.** Уточненные нелинейные уравнения в неклассических задачах механики оболочек. Сыктывкар: Изд–во Сыктывкарского университета, 2009. 141 с.

Рис. 4. Прогиб ( $M_{\rho\rho}$ )

5. Михайловский Е. И., Тарасов В. Н. О сходимости метода обобщенной реакции в контактных задачах со свободной границей // РАН. ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 128–136.

### Summary

**Yermolenko A. V., Osipov K. S.** Parallel programming in contact problems with a free boundary

The method of generalized reaction requires a large number of iterations, on each of which a large number of calculations are carried out. To accelerate calculations, the article considers parallelizing a contact problem using the OpenMP technology in C++.

*Keywords:* plate, method of generalized reaction, contact problem, parallel computing.

### References

1. Antonov A. S. *Parallel'noe programmirovaniye s ispol'zovaniem tekhnologii OpenMP* (Parallel Programming Using OpenMP Technology). Moscow.: Publishing house of MSU, 2009, 77 p.

2. **Yermolenko A. V., Gintner A. N.** Vliyanie poperechny'x sdvigov na ponizhenie napryazhennogo sostoyaniya plastiny (The effect of transverse shear on the lowering of the stressed state of the plate), *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, №1 (20), pp. 91–96.
3. **Yermolenko A. V.** Teoriya ploskix plastin tipa Karmana–Timoshenko–Nagdi otnositel'no proizvol'noj bazovoj ploskosti (The Karman–Timoshenko–Naghdi theory of plane plates relative to arbitrary base surface), *In the world of scientific discoveries. Krasnoyarsk: SIS*, 2011, №8.1 (20), pp. 336–347.
4. **Mikhailovskii E. I., Yermolenko A. V., Mironov V. V., Tullubenskaya E. V.** *Utochnenny'e nelinejny'e uravneniya v neklassicheskix zadachax mehaniki obolochek* (Refined nonlinear equations in nonclassical problems of shell mechanics). Syktyvkar: Publishing house of the Syktyvkar university, 2009, 141 p.
5. **Mikhailovskii E. I., Tarasov V. N.** O sxodimosti metoda obobshchennoj reakcii v kontaktny'x zadachax so svobodnoj granicej (On the convergence of the generalized reaction method in contact problems with a free boundary, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, v. 57, №. 1, pp. 128–136).

**Для цитирования:** Ермоленко А. В., Осипов К. С. Параллельное программирование в контактных задачах со свободной границей // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 84–90.

**For citation:** Yermolenko A. V., Osipov K. S. Parallel programming in contact problems with a free boundary, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 84–90.

## *НАСТАВНИК-УЧЕНИК*

*Вестник Сыктывкарского университета.  
Серия 1: Математика. Механика. Информатика.  
Выпуск 2 (23). 2017*

**УДК 512.55**

## **О СТРУКТУРЕ КОНЕЧНЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЕЦ С ИДЕМПОТЕНТНЫМ КОММУТАТИВНЫМ СЛОЖЕНИЕМ**

*Д. В. Чупраков, А. В. Ведерникова*

Статья посвящена исследованию конечных идемпотентных циклических полуколец с коммутативным сложением. Авторами установлен критерий существования конечного идемпотентного циклического полукольца с коммутативным сложением, заданного идеалом целых неотрицательных чисел, получены оценки числа элементов КИЦП. Сформулированы алгоритмы вычисления числа элементов, по образующим ассоциированного идеала целых неотрицательных чисел.

*Ключевые слова:* полукольцо, циклическое полукольцо, идемпотент, идеал, натуральное число.

### **1. Введение**

Статья посвящена исследованию конечных идемпотентных циклических полуколец (КИЦП) с коммутативным сложением. Впервые задача изучения циклических полуколец, — полукольцо с мультиплекативным образующим элементом, — поставлена Е. М. Вечтомовым [4] в 2000 году. Дальнейшие исследования ведутся в двух направлениях (см. обзор Е. М. Вечтомова [7]).

Во-первых, Е. М. Вечтомовым и И. В. Орловой [5, 6, 8, 9] исследуются циклические полукольца с некоммутативным сложением. В статье [5], получено описание конечных идемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением через циклические полуполя и коммутативные конечные идемпотентные циклические полукольца.

Во-вторых, Е. М. Вечтомовым и А. С. Бестужевым, а в дальнейшем Д. В. Чупраковым и А. В. Ведерниковой [3] изучаются конечные циклические полукольца с коммутативным сложением. В работе [1] А. С. Бестужевым начато изучение конечных идемпотентных циклических полукольц с коммутативным сложением: установлено, что свойства операции сложения в конечном идемпотентном циклическом полукольце определяются элементами, непосредственно большими 1; в терминах полурешеток описаны идемпотентные конечные циклические полукольца, представимые полурешетками ширины  $m \leq 3$ . В работе [3] А. В. Ведерниковой и Д. В. Чупраковым предпринята попытка преодоления необходимости полного перебора предпринятого А. С. Бестужевым. Рассмотрены подходы к алгебраическому описанию КИЦП с коммутативным сложением. Задача описания конечных идемпотентных циклических полукольц сведена к исследованию порядковых свойств идеалов целых неотрицательных чисел. В результате, выявлена проблема оценки количества элементов КИЦП.

Решению этого вопроса посвящена настоящая статья. Выделим следующие результаты: критерий существования КИЦП  $S$ , заданного идеалом целых неотрицательных чисел (теорема 1); алгоритм вычисления числа элементов КИЦП  $S$  (следствие 1), опирающийся на порядковые свойства элементов КИЦП  $S$ ; алгоритм вычисления числа элементов конечного идемпотентного циклического полукольца  $S$ , заданного двухпорожденным идеалом целых неотрицательных чисел (теорема 2), опирающийся на алгебраические и теоретико-числовые свойства показателей элементов  $S$ .

## 2. Основные понятия и факты

Под *полукольцом*  $S$  мы понимаем алгебраическую структуру  $\langle S, +, \cdot \rangle$  с коммутативно-ассоциативными операциями сложения « $+$ » и умножения « $\cdot$ » связанными аксиомой дистрибутивности  $x(y + z) = xy + xz$  для всех  $x, y, z \in S$ .

Полукольцо  $S$  называется (*аддитивно*) *идемпотентным*, если для любого элемента  $s$  из полукольца  $S$  выполняется равенство  $s + s = s$ .

Полукольцо с 1 называется *циклическим*, если все его (ненулевые) элементы являются целыми неотрицательными степенями некоторого элемента  $\alpha \in S$ , называемого образующим  $S$ , при этом  $1 = \alpha^0$ .

Далее в статье рассматриваются конечные циклические полукольца с коммутативным сложением без нуля.

Пусть  $S$  — конечное циклическое коммутативное полукольцо с образующим  $\alpha$  и идемпотентным сложением без 0. Его элементы имеют вид:

$1 = \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ . Известно [2], что  $\alpha^n = \alpha^{n+1}$  для любого конечного циклического коммутативного полукольца. Значит, циклическое полукольцо  $S$  однозначно определяется своим аддитивным редуктом.

Рассмотрим полукольцо

$$\mathbb{N}_n = \langle \{0, 1, \dots, n\}, +, \cdot \rangle$$

с операциями, заданными для любых  $x, y \in \{0, 1, \dots, n\}$  правилами

$$x + y = \min_{x, y, n \in \mathbb{N}_0} \{x + y, n\}, \quad x \cdot y = \min_{x, y, n \in \mathbb{N}_0} \{xy, n\}.$$

Через  $\mathbb{N}_0$  мы будем обозначать полукольцо целых неотрицательных чисел.

На полукольце  $S$  введем порядок  $\leqslant$  следующим образом:

$$\alpha^k \leqslant \alpha^t \iff \alpha^k + \alpha^t = \alpha^t \quad (1)$$

для любых  $k, t \in \{0, 1, \dots, n\}$ . На полукольце  $\mathbb{N}_n$ , в свою очередь, зададим порядок  $\preccurlyeq$  правилом

$$k \preccurlyeq l \iff \alpha^k \leqslant \alpha^l \quad (2)$$

для всевозможных  $k, l \in \mathbb{N}_n$ .

Порядок  $\preccurlyeq$  будем называть *порядком, индуцированный КИЦП*  $S$ , а упорядоченное полукольцо  $\langle \mathbb{N}_n, \preccurlyeq \rangle$  — *полукольцом, ассоциативным с КИЦП*  $S$ . Естественный линейный порядок на множестве  $\mathbb{N}_n$  обозначим через  $\leqslant$ .

Ясно, что отображение  $\log: \alpha^i \rightarrow i$  устанавливает *порядковый изоморфизм*

$$\langle S, \leqslant \rangle \cong \langle \mathbb{N}_n, \preccurlyeq \rangle. \quad (3)$$

Вводя на верхней полурешетке  $\langle \mathbb{N}_n, \preccurlyeq \rangle$  аддитивную операцию  $\vee_n$  правилом  $b \vee_n c = \sup\{b, c\}$ ,  $b, c \in \mathbb{N}_n$ , получаем полукольцо

$$\check{\mathbb{N}}_n = \langle \mathbb{N}_n, \vee_n, +_n \rangle,$$

изоморфное полукольцу  $S$ .

Для целых неотрицательных чисел  $b$  и  $c$  обозначим  $\delta(b, c) = |b - c|$ . Бинарная операция  $\delta$  замкнута на множестве  $\{0, 1, \dots, n\}$  и, следовательно, может быть рассмотрена как операция на  $\mathbb{N}_n$ .

На полукольце  $\mathbb{N}_n$ , имеет место аналог сократимости:

**Лемма 1.** [3, лемма 1] Пусть  $k, t \in \mathbb{N}_n$ .

- 1) Если  $k + \delta = k + \delta < n$ , для некоторого  $\delta \in \mathbb{N}_n$ , то  $k = t$ .
- 2) Если  $\delta(k, n) = \delta(t, n)$ , то  $k = t$ .

Отсюда, в силу дистрибутивности умножения, в КИЦП  $S$  операция сложения однозначно задается суммами единицы со всеми его элементами  $\alpha^{p_k} = 1 + \alpha^k, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Значит, каждое КИЦП  $S$  однозначно задается  $(n + 1)$ -элементным кортежем:

$$(p_0, p_1, \dots, p_n) \in \{0, 1, \dots, n\}^{n+1}, \text{ где } 1 + \alpha^i = \alpha^{p_i}. \quad (4)$$

Операции  $\vee_n$  и  $+$  на полукольце  $\check{\mathbb{N}}_n$  связаны следующим соотношением:

$$b \vee_n c = \min\{b, c\} + p_{\delta(b, c)}.$$

**Лемма 2.** [3, предложение 2] Пусть КИЦП  $S$  представлено кортежем (4). Тогда для любого  $i \in \mathbb{N}_n$ , справедливо неравенство  $p_i \geq i$ .

**Лемма 3.** Для произвольных элементов  $k$  и  $l$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  с порядком  $\preccurlyeq$ , индуцированным  $(n + 1)$ -элементным КИЦП  $S$ , справедливы следующие импликации:

- 1) если  $k \preccurlyeq l$ , то  $k \leq l$ ;
- 2) если  $k \leq l$ , то либо  $k \preccurlyeq l$ , либо  $k$  и  $l$  несравнимы.

*Доказательство.* Пусть на полукольце  $\mathbb{N}_n$  с образующим элементом  $\alpha$  задан порядок  $\preccurlyeq$ , индуцированный  $(n + 1)$ -элементным КИЦП  $S$ .

Справедливость импликации 1) следует из леммы 2.

Установим истинность импликации 2). Рассмотрим произвольные элементы  $k, l \in \mathbb{N}_n$  с условием  $k \leq l$ . Если  $k = l$ , то утверждение леммы очевидно.

Пусть  $k < l \leq n$ , тогда существует  $\delta \in \mathbb{N}_n$ ,  $0 < \delta < n$ , что  $k + \delta = l$ . Предположим, что  $l \preccurlyeq k$ , тогда  $\alpha^l + \alpha^k = \alpha^k$ . Имеем  $\alpha^{k+\delta} + \alpha^k = \alpha^k$  или, по лемме 1,  $\alpha^\delta + 1 = 1$ , следовательно,  $\alpha^\delta = 1$ . Значит,  $\delta = 0$ , что противоречит выбору  $\delta$ . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

### 3. Свойства верхнего конуса единицы КИЦП с коммутативным сложением

Рассмотрим произвольное КИЦП  $S$  с коммутативным сложением. Обозначим через  $I$  множество всех компонент кортежа (4) КИЦП  $S$ :

$$I = \{p_i : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}, \quad (5)$$

Множество  $I \subseteq \mathbb{N}_n$  является множеством показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^0\}^\Delta$  единицы  $\alpha^0$  КИЦП  $S$ .

**Лемма 4.** *Множество  $I$ , заданное правилом (5) для некоторого КИЦП  $S$  является множеством показателей элементов  $S$ , выдерживающих прибавление единицы.*

$$I = \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : k = p_k\}.$$

Действительно,  $\alpha^{p_i} = 1 + \alpha^i = 1 + (1 + \alpha^i) = 1 + \alpha^{p_i}$  для любого  $i \in \mathbb{N}_n$ . Обратная импликация следует из определения (4) элемента  $p_k$ .

**Лемма 5.** *Для любых элементов  $a$  и  $b$ , и идеала  $I$  полукольца  $\mathbb{N}_n$ , ассоциированного с КИЦП  $S$ , справедливо свойство:*

$$a \preccurlyeq b \iff b = a + j, \text{ для некоторого } j \in I. \quad (6)$$

*Доказательство.* Для любых двух элементов  $a$  и  $b$  полукольца  $\mathbb{N}_n$ , ассоциированного с КИЦП  $S$ , отношение  $a \preccurlyeq b$  по определению (1) равносильно отношению  $\alpha^a \leq \alpha^b$ , что, в свою очередь, по (2) и лемме 3 равносильно  $\alpha^b = \alpha^a + \alpha^b = \alpha^a(1 + \alpha^c) = \alpha^{a+p_c}$ , где  $b = a + c$ . При этом  $j = p_c \in I$ . Иными словами  $b = a + j$ .

Обратно, пусть  $b = a + j$  и  $j \in I$ , тогда  $j = p_j$  по лемме 4 и  $\alpha^b = \alpha^a(1 + \alpha^j) = \alpha^a + \alpha^{(a+j)} = \alpha^a + \alpha^b$ , что равносильно  $a \preccurlyeq b$ .

Через  $I_k$  обозначим множество показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^k\}^\Delta$  МИКП  $S$ . Ясно, что

$$I_k = I + k.$$

**Предложение 1.** *Для любого КИЦП  $S$ , множество показателей  $I$  элементов кортежса (4), является идеалом полукольца  $\mathbb{N}_n$ .*

*Доказательство.* Пусть конечное идемпотентное циклическом полукольцо  $S$ , представлено кортежем (4). Покажем, что множество  $I$ , заданное правилом (5) выдерживает умножение на произвольный элемент из  $\mathbb{N}_n$ . Иными словами, установим свойство  $p_{tp_i} = tp_i$  для любых  $p_i \in I$ ,  $t \in \mathbb{N}_n$ .

При  $tp_i \geq n$ , имеем  $1 + \alpha^n = \alpha^n$  и  $p_{tp_i} = p_n = n = tp_i$ .

Проверим случай  $tp_i < n$ . В силу идемпотентности полукольца  $S$  для  $t = 0$  имеем  $p_0 = 0$ . Предположим, что  $\alpha^{(t-1)p_i} = 1 + \alpha^{(t-1)p_i}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \alpha^{tp_i} &= \alpha^{p_i} \alpha^{(t-1)p_i} = (1 + \alpha^{p_i})(1 + \alpha^{(t-1)p_i}) = \\ &= 1 + \alpha^{p_i} + \alpha^{(t-1)p_i}(1 + \alpha^{p_i}) = 1 + \alpha^{p_i} + \alpha^{tp_i} = \\ &= 1 + \alpha^{p_i}(1 + \alpha^{(t-1)p_i}) = 1 + \alpha^{tp_i}. \end{aligned}$$

Итак, утверждение верно для всевозможных  $p_i \in I$  и для каждого целого неотрицательного числа  $t$ , что  $tp_i < n$ .

Покажем теперь замкнутость множества  $I$  относительно сложения. Возьмем  $p_i, p_j \in \mathbb{N}_n$ . При  $p_i + p_j \geq n$  свойство  $p_{p_i+p_j} = p_i + p_j$  выполняется. Пусть  $p_i + p_j < n$ . По свойству (4) имеют место равенства  $1 + \alpha^{p_i} = \alpha^{p_i}$  и  $1 + \alpha^{p_j} = \alpha^{p_j}$ . Перемножив их, получим

$$\begin{aligned}\alpha^{p_i+p_j} &= (1 + \alpha^{p_i})(1 + \alpha^{p_j}) = 1 + \alpha^{p_j} + \alpha^{p_i}(1 + \alpha^{p_j}) = \\ &= 1 + \alpha^{p_j} + \alpha^{p_i+p_j} = 1 + \alpha^{p_j}(1 + \alpha^{p_i}) = 1 + \alpha^{p_i+p_j}.\end{aligned}$$

Иными словами,  $p_{p_i+p_j} = p_i + p_j$ .

Таким образом, множество  $I = \{p_i : i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$  является идеалом полукольца  $\mathbb{N}_n = \langle \{0, 1, \dots, n\}, +_n, \cdot_n \rangle$

Идеал  $I$  — конечен и, значит, порожден конечным числом элементов.

*Базисом* идеала  $I$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  будем называть множество  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$ , такое, что каждый элемент  $b \in I$  линейно выражается через элементы  $g_1, \dots, g_l$ :

$$a = \sum_{i=1}^n (k_i \cdot g_i), \quad k_1, \dots, k_l \in \mathbb{N}_n,$$

и никакой элемент множества  $G$  нельзя представить в виде комбинации остальных элементов  $G$  с коэффициентами из  $\mathbb{N}_n$ .

Построение базиса идеала  $I$  сводится к последовательному выбору наименьшего элемента  $i_j \in I$ , не представимого в виде комбинации  $i_1, \dots, i_{j-1}$ . Ясно, что базис идеала  $I$  определен однозначно.

Заметим, что имеет место следующее предложение:

**Предложение 2.** [3, теорема 3] *Кортеж (4) ( $n+1$ )-элементного КИЦП  $S$  однозначно восстанавливается по множеству  $G$  базисных элементов идеала его компонентов.*

Будем говорить, что  $(n+1)$ -элементное КИЦП  $S$  задано базисом  $G$ , если  $G$  — базис множества элементов кортежа (4) полукольца  $S$ .

Аналогично идеалам полукольца натуральных чисел, каждый идеал  $J$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  являются конечно порожденным [11] и имеет однозначно определенный базис, количество элементов которого не превосходит наименьшего элемента  $J$ .

#### 4. Число элементов КИЦП с коммутативным сложением

Этот параграф посвящен специфическим свойствам идеалов полукольца  $\mathbb{N}_n$ , порожденных базисом  $G$ , позволяющих выяснить существование и оценить число элементов конечного идемпотентного циклического полукольца, заданного базисом  $G$ .

**Лемма 6.** Если элемент  $p_j \neq n$  идеала  $I \subseteq \mathbb{N}_n$  элементов кортежа (4) КИЦП  $S$  с базисом  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$  представлен в виде

$$p_j = \sum_{i=1}^l c_i g_i = k + \sum_{i=1}^l d_i g_j, \quad c_i, d_i \in \mathbb{N}_n,$$

то  $\min\{c_i, d_i\} = 0$  для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный элемент  $p_j \in I$ , такой, что  $p_j \neq n$ . Так как  $\alpha^{p_j} = 1 + \alpha^j$  в полукольце  $S$ , то  $p_j = \sup\{0, j\}$  в верхней полурешетке  $\langle \mathbb{N}_n, \preccurlyeq \rangle$ . Следовательно  $p_j$  — наименьший элемент множества  $I \cap I_j$ .

Пусть

$$p_j = \sum_{i=1}^l c_i g_i = j + \sum_{i=1}^l d_i g_j.$$

Предположим, что  $\mu = \min\{c_{i_0}, d_{i_0}\} \neq 0$  для некоторого индекса  $i_0$ . Тогда

$$\delta(p_j, \mu) = \sum_{i \neq i_0} c_i g_i + \delta(c_{i_0}, \mu) g_{i_0} = j + \sum_{i \neq i_0} d_i g_i + \delta(c_{i_0}, \mu) g_{i_0}.$$

Иными словами,  $\delta(p_j, \mu) \in I \cap I_j$ .

Так как  $\mu \neq 0$ , то  $\delta(p_j, \mu) < p_j$ . Значит, по лемме 3,  $\delta(p_j, \mu) \preccurlyeq p_j$  или  $\delta(p_j, \mu)$  и  $p_j$  несравнимы, что невозможно, так как  $p_j$  — наименьший в  $I \cap I_j$ .

Таким образом, для каждого  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$  выполняется свойство  $\min\{c_i, d_i\} = 0$ .

**Предложение 3.** Каждое упорядоченное множество  $\langle I_k, \preccurlyeq \rangle$  относительно порядка  $\preccurlyeq$ , индуцированного КИЦП  $S$  по правилу (2), является решеткой с наименьшим элементом  $k$  и наибольшим —  $n$ . Атомами решетки  $\langle I_k, \preccurlyeq \rangle$  являются в точности элементы вида  $k + g_i$ , для всевозможных базисных элементов  $g_i$  идеала  $I$ .

*Доказательство.* Так как КИЦП  $S$  является верхней полурешеткой относительно порядка  $\leqslant$ , заданного правилом (1), то верхний конус  $\{\alpha^k\}^\Delta$  любого её элемента  $\alpha^k$  является решеткой с наименьшим элементом  $\alpha^k$  и наибольшим  $\alpha^n$ .

В силу изоморфизма (3) достаточно показать, что атомами верхнего конуса  $\{\alpha^k\}^\Delta$  КИЦП  $S$  являются элементы  $\alpha^{g_k}$  для всех базисных элементов  $g_k \in I$ .

Пусть  $g$  — образующий идеала  $I$ , тогда  $1 + \alpha^g = \alpha^g$ . Предположим, что нашелся элемент  $g'$  такой, что  $\alpha^g > \alpha^{g'} > 1$ , тогда  $\alpha^{g'} + \alpha^g = \alpha^g$ . Следовательно,  $1 + \alpha^{g-g'} = \alpha^{g-g'}$  и  $g - g' \in I$ . Так как  $\alpha^{g'} > 1$ , то  $1 + \alpha^{g'} = \alpha^{g'}$

и  $g' \in I$ . Значит, элемент  $g = g' + (g - g')$  представим в виде комбинации элементов из  $I$  и, следовательно, не является образующим. Полученное противоречие доказывает, что  $\alpha^g$  непосредственно больше  $1 = \alpha^0$ , т. е. является атомом решетки  $\{\alpha^0\}^\Delta$ .

Ясно, что решетка  $I_k$  изоморфна  $I$  посредством отображения  $f: I \rightarrow I_k$ ,  $f(x) = x + k$ . Следовательно ее наименьшим элементом является  $k$ , а атомами — всевозможные элементы  $g + k$ ,  $g \in G$ .

Следствием предложения 3 является следующее предложение, характеризующее вид базисных элементов идеала показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^0\}^\Delta$  КИЦП  $S$ .

**Предложение 4.** Пусть  $I$  — множество показателей элементов кортежса (4) КИЦП  $S$  и  $G = \{g_1, \dots, g_k\}$  — базис  $I$ . Тогда все попарные разности элементов множества  $G$  различны.

*Доказательство.* Пусть нашлись базисные элементы  $g_{i_1}, g_{i_2}, g_{i_3}, g_{i_4} \in G$  и целое неотрицательное число  $\Delta$  такие, что  $g_{i_1} + \Delta = g_{i_2}, g_{i_3} + \Delta = g_{i_4}$ .

1) Рассмотрим случай, когда  $g_{i_2} \leq g_{i_3}$ . Тогда существует неотрицательное целое число  $l$ , что  $g_{i_3} = g_{i_2} + l$ .

В КИЦП  $S$   $\alpha^{g_{i_1}} = \alpha^{g_{i_1}} + \alpha^0$ , следовательно  $\alpha^{g_{i_3}} = \alpha^{g_{i_1}+l+\Delta} = \alpha^{g_{i_1}+l+\Delta} + \alpha^{l+\Delta}$ . Иными словами  $\alpha^{g_{i_3}} > \alpha^{l+\Delta}$ . В то же время  $\alpha^{g_{i_3}} > \alpha^0$ . Значит  $\alpha^{g_{i_3}} \geq \alpha^{p(l+\Delta)}$ . Аналогично  $\alpha^{g_{i_4}} \geq \alpha^{p(l+\Delta)}$ . Так как  $\alpha^{g_{i_3}}$  и  $\alpha^{g_{i_4}}$  несравнимы, то  $\alpha^{g_{i_3}} > \alpha^{p(l+\Delta)}$  и  $\alpha^{g_{i_4}} > \alpha^{p(l+\Delta)}$ , что противоречит атомарности элементов  $\alpha^{g_{i_3}}$  и  $\alpha^{g_{i_4}}$ .

2) Если  $g_{i_2} \geq g_{i_3}$ , то существует неотрицательное целое число  $l$ , что  $g_{i_2} = g_{i_3} + l$ . При этом  $g_{i_2} = g_{i_1} + \Delta$ .

Если  $g_{i_1} < g_{i_3}$ , то  $g_{i_3} = g_{i_1} + \Delta'$  и  $g_{i_4} = g_{i_2} + \Delta'$ , где  $\Delta' + l = \Delta$ . Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю 1.

**Лемма 7.** Для любых подмножеств  $A, B$  множества целых неотрицательных чисел и произвольного целого неотрицательного числа  $k$  справедливо равенство  $(k + A) \cap (k + B) = k + (A \cap B)$ .

Действительно,  $(k + A) \cap (k + B) \supseteq k + (A \cap B)$ . С другой стороны,  $(k + A) \cap (k + B) = \{c = k + a = k + b : a \in A, b \in B\}$ . В силу аддитивной сократимости полукольца целых неотрицательных чисел  $a = b$  и, следовательно,  $(k + A) \cap (k + B) \subseteq k + (A \cap B)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $I$  — идеал полукольца  $\mathbb{N}_n$ , порожденный базисом  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$  и на множестве  $\mathbb{N}_n$  определен порядок  $\preccurlyeq$  свойством (6):

$$b \preccurlyeq c \iff c = b + j, \text{ для некоторого } j \in I.$$

Тогда следующие условия равносильны:

1) существует единственное  $(n + 1)$ -элементное КИЦП  $S$ , заданное

кортежем (4):

$$(p_0, p_1, \dots, p_n), \quad 1 + \alpha^i = \alpha^{p_i}, \quad p_i \in I;$$

- 2)  $\mathbb{N}_n$  является верхней полурешеткой относительно  $\preceq$ ;
- 3) идеал  $I$  является решеткой относительно порядка  $\preceq$ ;
- 4) для каждого элемента  $k$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  найдется элемент  $k'$  такой, что  $I \cap I_k = I_{k'}$ ;
- 5) для каждого элемента  $k < \min G$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  найдется элемент  $k'$  такой, что  $I \cap I_k = I_{k'}$ .

*Доказательство.* Равносильность 1)  $\iff$  2) следует из порядкового изоморфизма (3).

2)  $\implies$  3). Идеал  $I$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  с порядком  $\preceq$  является конечной верхней полурешеткой с наименьшим элементом 0, следовательно,  $I$  — решетка.

Для проверки импликации 3)  $\implies$  4) достаточно взять  $k' = \sup\{0, k\}$ . Импликация 4)  $\implies$  5) очевидна.

5)  $\implies$  2). Пусть  $I$  — идеал полукольца  $\mathbb{N}_n$  с порядком  $\preceq$ . Обозначим наименьший образующий элемент идеала  $I$  через  $m = \min G$ .

Заметим, что  $k' = \min I_{k'}$  и, следовательно, для всех  $k < m$   $k' = \min(I \cap I_k)$ . Ясно, что  $I \cap I_n = I_n$ .

Для произвольного элемента  $t \in \mathbb{N}$  введем следующие обозначения:  $A_t = I \cap I_t$  и  $s_t = \min A_t$  — наименьший элемент множества  $A_t$  относительно обычного порядка  $\leq$  целых неотрицательных чисел.

Покажем, что  $A_t = I_{t'}$  для некоторого  $t' \in \mathbb{N}_n$ . Если  $A_t = \{n\}$ , то утверждение очевидно. Поэтому, пусть  $A_t$  содержит элемент меньший  $n$ . Ясно, что в этом случае  $t < n$ .

Для доказательства существования  $t'$ , удовлетворяющего равенству  $A_t = I_{t'}$  обозначим  $t_0 = t$  и рассмотрим следующий итерационный алгоритм по параметру  $i$ :

Элемент  $t_i$  представим в виде  $t_i = q_i m + k_i$ , где  $k < m$ .

Тогда  $t_i \succcurlyeq k_i$  и  $I_{t_i} \subseteq I_{k_i}$  как верхние конусы элементов  $t_i$  и  $k_i$  соответственно. Имеем  $I_{t_i} \cap I_{k_i} = I_{k_i}$  и

$$I \cap I_{t_i} = I \cap I_{k_i} \cap I_{t_i} = I_{k'_i} \cap I_{t_i}$$

Если  $t_i = k'_i$ , то  $A_{t_i} = I_{k'_i}$  и алгоритм окончен, иначе рассмотрим

$$a_i = \max\{k'_i, t_i\}, b_i = \min\{k'_i, t_i\}$$

относительно обычного порядка  $\leq$  целых неотрицательных чисел и обозначим  $t_{i+1} = a_i - b_i > 0$ .

В силу леммы 7

$$A_{t_i} = I \cap I_{t_i} = I_{a_i} \cap I_{b_i} = b_i + (I \cap I_{t_{i+1}}) = b_i + A_{t_{i+1}}.$$

При этом  $s_{t_i} > s_{t_{i+1}}$ .

Если  $t_{i+1} < m$ , то  $A_{t_{i+1}} = I_{t'_{i+1}}$  и, значит,

$$A_{t_i} = b_i + I_{t_{i+1}'} = I_{b_i + t'_{i+1}}.$$

В противном случае  $t_{i+1} \geq m$  и мы можем повторить рассуждения для  $t_{i+1}$ . В результате получим:

$$A_{t_i} = b_0 + b_1 + A_{t_{i+2}}, \quad s_{t_i} > s_{t_{i+1}} > s_{t_{i+2}}.$$

Продолжая итерации описанного алгоритма мы будем получать убывающую последовательность  $S_i$  элементов конечного множества  $\mathbb{N}_n$ . Следовательно, на некотором шаге  $j$  мы получим  $t_j = k'_j$  и

$$t' = b_0 + b_1 + \dots + b_{j-1} + k'_j$$

либо  $t_j < m$ , и

$$t' = b_0 + b_1 + \dots + b_{j-1} + b_j + k'_{j+1}$$

Итак, равенство  $I \cap I_t = I_{t'}$  установлено для произвольного  $t \in \mathbb{N}_n$  и подобранных  $t'$ .

Теперь возьмем произвольные элементы  $a$  и  $b$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  и рассмотрим верхний конус  $\{a, b\}^\Delta$  относительно порядка  $\preceq$  заданного (6): Допустим  $b = a + k$ , тогда с учетом леммы 7

$$\begin{aligned} \{a, b\}^\Delta &= (a + I) \cap (b + I) = (a + I) \cap (a + k + I) = \\ &= a + (I \cap I_k) = a + I_{k'} = I_{a+k'} = \{a + k'\}^\Delta. \end{aligned}$$

Итак,  $\sup\{a, b\} = \min\{a, b\}^\Delta = a + k'$ , иными словами  $\mathbb{N}_n$  — верхняя полурешетка. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы вытекает следствие:

**Следствие 1.** Пусть  $I$  — идеал полукольца  $\mathbb{N}_n$ , порожденный базисом  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_l\}$  и на множестве  $\mathbb{N}_n$   $(n+1)$ -элементное КИЦП  $S$  существует тогда и только тогда, когда выполняется двойное неравенство

$$M < n \leq N, \quad \text{где } N = \min \bigcup_{j=1}^{m-1} ((J \cap J_j) \setminus J_{p_j}).$$

Доказанная теорема позволяет сформулировать алгоритм построения КИЦП по множеству базисных элементов  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ :

Таблица 1

**Число коммутативных идемпотентных циклических полуколец**

$ G $	Количество элементов в полукольце $S$														
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
2	-	-	-	1	1	4	5	10	11	17	21	30	32	43	
3	-	-	-	-	-	-	-	2	2	6	6	17	17	32	
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	
Число полуоколец	1	2	3	5	6	10	12	20	22	33	38	59	62	91	

1. По следствию 1 определить  $n$  для которых существует  $(n + 1)$ -элементное КИЦП  $S$ , заданное множеством  $G$ .
2. Вычислить элементы  $p_i$ ,  $i = \overline{0, n}$  кортежа (4), пользуясь теоремой 1 и леммой 4:

$$p_i = \min(J \cap J_i), \quad p_{p_i} = p_i.$$

3. По кортежу (4) восстановить операцию сложения.

С помощью предложенного алгоритма в системе компьютерной алгебры SageMath найдены все КИЦП с малым числом элементов. Их количество в зависимости от числа базисных элементов идеала  $I$  приведено в табл. 1.

### 5. Конечные идемпотентные циклические полуокольца с коммутативным сложением, заданные двупорожденными идеалами

**Лемма 8.** Для произвольных различных простых натуральных чисел  $g_1$  и  $g_2$ , и каждого натурального числа  $k \leq \min\{g_1, g_2\}$  существует единственная пара целых чисел  $v_1$  и  $v_2$  таких, что

$$k = v_1 g_1 + v_2 g_2, \quad |v_1| \leq \frac{g_2}{2}, \quad |v_2| \leq \frac{g_1}{2}, \quad (7)$$

причем, хотя бы одно из неравенств строгое.

*Доказательство.* Пусть  $\text{НОД}(g_1, g_2) = 1$ . Для них найдется единственная пара (см. [10, предложение 61]) целых чисел  $u_1$  и  $u_2$ , что

$$1 = u_1 g_1 + u_2 g_2, \quad |u_1| \leq \frac{g_2}{2}, \quad |u_2| \leq \frac{g_1}{2}. \quad (8)$$

Пусть  $u_1 > 0$  и  $u_2 < 0$ . Если это не так, то изменим нумерацию чисел  $g_1$  и  $g_2$  и соответствующих коэффициентов  $u_1, u_2$ .

Возьмем произвольное натуральное число  $k < \min\{g_1, g_2\}$ , рассмотрим  $k = ku_1g_1 + ku_2g_2$  и представим  $ku_1 = q_1g_2 + r_1$  и  $-ku_2 = q_2g_1 + r_2$ . Ясно, что  $r_1 \neq 0$  и  $r_2 \neq 0$ . Имеем

$$k = (q_1 - q_2)g_1g_2 + r_1g_1 - r_2g_2.$$

Так как  $k < \min\{g_1, g_2\}$ , то  $k + r_2g_2 - r_1g_1 < (r_2 + 1)g_2 - r_1g_1 < g_1g_2$ . Следовательно,  $q_1 - q_2 = 0$ . Иными словами, нашлись коэффициенты  $r_1 < g_2, r_2 < g_1$ , что

$$k = r_1g_1 - r_2g_2.$$

Покажем, что либо  $r_1 \leq \frac{g_2}{2}$  и  $r_2 \leq \frac{g_1}{2}$ , либо  $r_1 \geq \frac{g_2}{2}$  и  $r_2 \geq \frac{g_1}{2}$ .

Действительно, если  $r_1 > \frac{g_2}{2}$ ,  $r_2 < \frac{g_1}{2}$ , то  $2r_1 = g_2 + t_1$ ,  $2r_2 = g_1 - t_2$  для некоторых натуральных  $t_1$  и  $t_2$ . Значит,

$$2k = 2r_1g_1 - 2r_2g_2 = g_1g_2 + g_1t_1 - g_1g_2 + g_2t_2 = g_1t_1 + g_2t_2 > g_1 + g_2.$$

Однако,  $2k = 2\min\{g_1, g_2\} < g_1 + g_2$ .

Аналогично, если  $r_1 < \frac{g_2}{2}$ ,  $r_2 > \frac{g_1}{2}$ , то для некоторых натуральных чисел  $t_1, t_2$  имеем  $2r_1 = g_2 - t_1$ ,  $2r_2 = g_1 + t_2$ ,

$$2k = g_1g_2 - g_1t_1 - g_1g_2 - g_2t_2 = -(g_1t_1 + g_2t_2) < 0,$$

что невозможно.

Итак, если  $r_1 \leq \frac{g_2}{2}$ ,  $r_2 \leq \frac{g_1}{2}$ , то  $v_1 = r_1$  и  $v_2 = -r_2$ . Если же  $r_1 \geq \frac{g_2}{2}$ ,  $r_2 \geq \frac{g_1}{2}$ , то  $v_1 = g_1 - r_2$  и  $v_2 = r_1 - g_2$ . При этом, хотя бы одно из неравенств (7) строгое, так как  $k \neq 0$ .

Теперь установим единственность коэффициентов  $v_1$  и  $v_2$ . Ясно, что если  $k = v'_1g_1 + v'_2g_2$  для  $v'_1 \neq v_1$ ,  $v'_2 \neq v_2$ , то  $(v'_1 - v_1)g_1 + (v'_2 - v_2)g_2 = 0$  и  $v'_1 = v_1 + q_1g_2$ ,  $v'_2 = v_2 + q_2g_1$  для некоторых целых ненулевых  $q_1, q_2$ . Следовательно,  $|v'_1| \geq \frac{g_2}{2}$  и  $|v'_2| \geq \frac{g_1}{2}$ , причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Лемма доказана.

**Предложение 5.** Пусть I идеал показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^0\}^\Delta$  КИЦП  $S$ , заданный условием (5) и  $G = \{g_1, g_2\}$  — его базис, причем НОД( $g_1, g_2$ ) = 1. Тогда для каждого элемента  $k < \min\{g_1, g_2\}$  полуокольца  $\mathbb{N}_n$  элемент  $p_k = ug_1$ , где  $u$  — положительный коэффициент Безу со свойством  $0 \leq u \leq \frac{g_2}{2}$ .

Действительно, по лемме 6 элемент  $p_k$  имеет вид  $p_k = u_1g_1 = 1 + u_2g_2$ , для некоторого упорядочения множества  $G = \{g_1, g_2\}$ . Иными словами, числа  $u_1$  и  $-u_2$  — коэффициенты Безу.

**Лемма 9.** Пусть КИЦП  $S$  задано кортежем (4). Если  $J$  — идеал натуральных чисел с базисом  $G = \{g_1, g_2\}$ ,  $\text{НОД}(g_1, g_2) = 1$ , то для каждого натурального  $k \leq \min\{g_1, g_2\}$  наименьшим элементом множества  $(J \cap J_k) \setminus J_{v_k^{(+)}, g_1}$  является  $(g_{\sigma_k(1)} + v_k^{(-)}) g_{\sigma_k(2)}$ , где  $v_k^{(+)}$  — положительный, а  $v_k^{(-)}$  — отрицательный коэффициенты в представлении  $k$  формулой (7),  $\sigma_k$  — соответствующая перестановка на множестве  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $g_1, g_2$  взаимно простые базисные элементы двупорожденного идеала  $J$ . По лемме 8, для каждого  $k \leq \min\{g_1, g_2\}$  найдется единственная пара целых чисел  $v_1$  и  $v_2$ , удовлетворяющих условию (7). Причем, хотя бы одно из неравенств  $|v_1| \leq \frac{g_2}{2}$  или  $|v_2| \leq \frac{g_1}{2}$  строгое.

Будем считать, что  $v_1 > 0$ ,  $v_2 < 0$  и обозначим

$$u_1 = (g_2 - v_1) > 0, \quad u_2 = (g_1 + v_2) > 0.$$

Имеем  $k = u_2 g_2 - u_1 g_1$ . Ясно, что  $\frac{g_2}{2} \leq u_1 < g_2$ ,  $\frac{g_1}{2} \leq u_2 < g_1$ .

Обозначим  $z_0 = v_1 g_1$ .

Рассмотрим элемент  $z \in J \cap J_k$ , удовлетворяющий свойству

$$z = u_2 g_2 = k + u_1 g_1 \tag{9}$$

Заметим, что  $z_0 \leq \frac{g_1 g_2}{2} \leq z$ , причем хотя бы одно из двух неравенств строгое.

Докажем, что  $z \notin J_{z_0}$ . Предположим противное. Тогда для некоторых целых неотрицательных чисел  $c_1, c_2$ :

$$z = c_1 g_1 + c_2 g_2 + z_0.$$

Подставляя в данное равенство вместо  $z_0$  и  $z$  их линейные представления в базисе  $G$ , получаем:

$$u_2 g_2 = (c_1 + v_1) g_1 + c_2 g_2.$$

Значит,  $u_2 > c_2$  и  $(u_2 - c_2) g_2 = (c_1 + v_1) g_1$ , а так как  $g_1$  и  $g_2$  взаимно просты, то  $(u_2 - c_2)$  делится на  $g_1$ . Имеем  $0 < u_2 - c_2 < u_2 < g_1$ , что невозможно. Следовательно,  $z \notin (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ .

Покажем, что  $z$  — наименьший элемент множества  $(J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ .

Рассмотрим произвольный элемент  $z^* \in (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ . Тогда для некоторых  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_n$  выполняется равенство  $z^* = d_1 g_1 + d_2 g_2$ . Используя равенства (9), получаем

$$\begin{aligned} z_0 &< z^* < z, \\ g_1 v_1 &< d_1 g_1 + d_2 g_2 < u_2 g_2. \end{aligned}$$

Заметим, что  $d_2 < u_2$  и  $d_1 < v_1$ . Так как, если  $d_2 \geq u_2$ , то  $z^* = d_1g_1 + (d_2 - u_2)g_2 + z \in J_{z_0}$ , что невозможно в силу выбора  $z^*$ . Аналогичное противоречие получаем в предположении  $d_1 \geq u_1$ :  $z^* = (d_1 - v_1)g_1 + d_2g_2 + z_0 \in J_{z_0}$ .

Так как  $z^* \in J_k$ , то найдутся целые неотрицательные числа  $e_1$  и  $e_2$  такие, что  $z^* = e_1g_1 + e_2g_2 + k$ .

Пусть  $l_1 = \min\{d_1, e_1\}$ ,  $l_2 = \min\{d_2, e_2\}$ . Рассмотрим элемент

$$z' = (d_1 - l_1)g_1 + (d_2 - l_2)g_2 = (e_1 - l_1)g_1 + (e_2 - l_2)g_2 + 1 \in J \cap J_1.$$

Ясно, что  $z^* = z' + l_1g_1 + l_2g_2$ . Иными словами,  $z' \leq z^*$ .

Возможны два случая:  $(d_1 - l_1) = 0$  или  $(e_1 - l_1) = 0$ .

Рассмотрим случай  $(d_1 - l_1) = 0$ , тогда  $y_1 = e_1 - l_1 \neq 0$  и  $y_2 = d_2 - l_2 \neq 0$ . Значит,  $(e_2 - l_2)g_2 = 0$  и  $z' = y_2g_2 = y_1g_1 + k$ .

Имеем,  $y_2g_2 - y_1g_1 = k$ ,  $y_2 < g_1$  и  $y_1 < g_2$ . Таким образом,  $y_2$  и  $-y_1$  — коэффициенты Безу в линейном представлении НОД чисел  $g_1$  и  $g_2$ . Поэтому, в силу (9),  $z' = z_0$  или  $z' = z$ . Если  $z' = z_0$ , то  $z^* = z_0 + l_1g_1 + l_2g_2 \in J_{z_0}$ , что невозможно. Если же  $z' = z$ , то  $z^* \geq z$  и, в силу произвольности выбора  $z^* \in (J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ , число  $z$  — наименьший элемент множества  $(J \cap J_k) \setminus J_{z_0}$ .

Случай  $(e_1 - l_1) = 0$  аналогичен рассмотренному. Лемма доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $g_1$  и  $g_2$  — произвольные взаимно простые натуральные числа, большие либо равные 3. Для каждого  $n$ , удовлетворяющего неравенству

$$M < n \leq \min \{(g_{\sigma_k(1)} + v_k^{(-)})g_{\sigma_k(2)} : k \in \mathbb{N}, k < m\}, \quad (10)$$

где  $M = \max\{g_1, g_2\}$ ,  $m = \min\{g_1, g_2\}$ ,  $v_k^{(-)}$  — отрицательный коэффициент в представлении  $k$  формулой (7),  $\sigma_k$  — соответствующая перестановка на множестве  $G$ , существует единственное  $(n+1)$ -элементное КИЦП  $S$  с множеством показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^0\}^\Delta$  порожденным базисом  $G = \{g_1, g_2\}$ .

*Доказательство.* Пусть  $g_1, g_2$  взаимно простые натуральные числа, большие либо равные 3. Для каждого  $k < \min\{g_1, g_2\}$  по лемме 8 существует единственная пара целых чисел  $v_k^{(+)}$  и  $v_k^{(-)}$  таких, что  $k = v_k^{(+)}g_1 - v_k^{(-)}g_2$ , где  $v_k^{(+)} \leq \frac{g_2}{2}$ ,  $v_k^{(-)} \leq \frac{g_1}{2}$ .

Рассмотрим число  $n$ , удовлетворяющее условию (10). По лемме 9 для каждого натурального  $k \leq \min\{g_1, g_2\}$  множество  $(J \cap J_k) \setminus J_{v_k^{(+)}g_1}$  пусто. Так как  $k' = v_k^{(+)}g_1 \in J \cap J_k$  справедливо равенство  $J \cap J_k = J_{k'}$  и, следовательно, по теореме 1 существует единственное  $(n+1)$ -элементное КИЦП  $S$  с множеством показателей элементов верхнего конуса  $\{\alpha^0\}^\Delta$ .

Укажем направления дальнейших исследований конечных идемпотентных циклических полуколец.

1. Определение свойств базиса  $G$  идеала  $I$  полукольца  $\mathbb{N}_n$  необходимых и достаточных для существования  $(n+1)$ -элементного КИЦП, заданного базисом  $G$ .
2. Улучшение алгоритма поиска конечных идемпотентных циклических полуколец с заданным количеством элементов.
3. Алгебраическое описание строения конечных идемпотентных циклических полуколец, заданных  $k$ -порожденными идеалами для  $k \geqslant 3$ .

## Список литературы

1. **Бестужев А. С.** Конечные идемпотентные циклические полукольца // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2011. Вып. 13. С. 71–78.*
2. **Бестужев А. С. Вечтомов Е. М.** Циклические полукольца с коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2015. Вып. 20. С. 8–39.*
3. **Веденникова А. В., Чупраков Д. В.** О представлении конечных идемпотентных циклических полуколец кортежами целых чисел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2017. Вып. 19. С. 70–76.*
4. **Вечтомов Е. М.** Введение в полукольца. Киров: ВГПУ, 2000. 44 с.
5. **Вечтомов Е. М., Лубягина (Орлова) И. В.** Циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 33–52.*
6. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Циклические полукольца с неидемпотентным некоммутативным сложением // *Фундаментальная и прикладная математика. 2015. Т. 20. № 6. С. 17–41.*

7. **Вечтомов Е. М.** Мультипликативно циклические полуокольца // *Технологии продуктивного обучения математике: традиции и новации. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2016. С. 130–140.*
8. **Вечтомов Е. М., Орлова И. В.** Идеалы и конгруэнции циклических полуоколец // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер.1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 1(22). С. 29–40.*
9. **Лубягина И. В.** О циклических полуокольцах с некоммутативным сложением // *Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Издательство Казанского математического общества, 2010. Т. 40. С. 212–215.*
10. **Ноден П., Китте К.** Алгебраическая алгоритмика с упражнениями и решениями. М.: Мир, 1999. 720 с.
11. **Чермных В. В., Николаева О. В.** Об идеалах полуокольца натуральных чисел // *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2009. Вып. 11. С. 118–121.*
12. **Bestugev A. S., Vechtomov E. M.** Multiplicatively cyclic semirings // *XIII Международная научная конференция им. Академика М. Кравчука. Киев: Национальный технический университет Украины, 2010. С. 39.*

ВятГУ

Поступила 08.06.2017

**Summary**

**Chuprakov D. V., Vedernikova A. V.** About structure of finite cyclic semirings with idempotent commutative addition

The paper deals with finite idempotent cyclic semirings with commutative addition. Authors presents a criteria for existence of finite idempotent cyclic semirings with commutative addition, associated with ideal of nonnegative integers. They derived estimates of the cardinality of FIC-semiring. The article offers algorithms for calculation cardinality of FIC-semiring by basis of associated ideal of nonnegative integers.

*Keywords:* semiring, cyclic semiring, monogenous semiring, idempotent, ideal, positive integer.

### References

1. **Bestujev A. S.** Finite Idempotent Cyclic Semirings, *Matekaticheskiy Vestnik Pedvuzov I Universitetov Volgo-Vyatskogo Regiona*, 2011, n. 13, pp. 71–78
2. **Bestuzev A. S., Vechtomov E. M.** Cyclic Semirings With Commutative Addition, *Bulletin of Syktyvkar State University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, vol. 1 (20), 2015, pp. 8–39.
3. **Vedernikova A. V., Chuprakov D. V.** About Representation of Finite Idempotent Cyclic Semirings by Tuples of Integers, *Mathematical Bulletin of Universities and Pedagogical Unyversities of Volgo-Vyatskii Region*, 2017, n. 19, pp. 70–76.
4. **Vechtomov E. M.** *Introduction to Semirings*, Kirov: VGPU, 2000, 44 p.
5. **Vechtomov E. M., Lubyagina (Orlova) I. V.** Cyclic Semirings With Idempotent Noncommutative Addition, *Fundamentalnaya I Prikladnaya Matematika*, 2011/2012, vol. 17, n. 1, pp. 33–52.
6. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** cyclic Semirings With Nonidempotent Noncommutative Addition, *Fundamentalnaya I Prikladnaya Matematika*, 2015, vol. 20, n. 6, pp. 17–41.
7. **Vechtomov E. M.** Multiplicative Cyclic Semirings, *Technologies of Productive Learning of Mathematics: Traditions And Innovations*, Arzamas, 2016, pp. 130–140.
8. **Vechtomov E. M., Orlova I. V.** Ideals and Congruences of Cyclic Semirings, *Bulletin of Syktyvkar University, Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, n. 1 (22), pp. 29–40.
9. **Lubyagina I. V.** About Cyclic Semirings With Noncommutative Addition, *Trudy Matematicheskogo Chentra Im. N. I. lobachevskogo*, Kazan, 2010, vol. 40, pp. 212–215.
10. **Naudin P., Quittè C.** *Algorithmique Algèbrique Avec Exercices Corrigès* [in Russian], M.: Mir, 1999, 720 p.
11. **Chermnyh V. V., Nikolaeva O. V.** Amout Ideals of Semiring of Positve Integers, *Mathematical Bulletin of Universities and Pedagogical Unyversities of Volgo-Vyatskii Region*, 2009, n. 11, pp. 118–121.

12. Bestugev A. S., Vechtomov E. M. Multiplicatively Cyclic Semirings, *International Scientific Conference Named After Academician M. Kravchuk*, Kiev: National Technical University of Ukraine, 2010, p. 39.

**Для цитирования:** Чупраков Д. В., Ведерникова А. В. О структуре конечных циклических полуколец с идемпотентным коммутативным сложением // *Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2 (23). С. 91–108.*

**For citation:** Chuprakov D. V., Vedernikova A. V. About structure of finite cyclic semirings with idempotent commutative addition, *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2017, №2 (23), pp. 91–108.

## ПЕРСОНАЛИИ

**Беляева Надежда Александровна** – д.ф.-м.н., профессор, заведующая кафедрой математического моделирования и кибернетики, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: mmik@syktsu.ru

**Веденникова Анастасия Васильевна** – магистрант, кафедра фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: vecht@mail.ru

**Ермоленко Андрей Васильевич** – к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

**Лубягина Елена Николаевна** – к.ф.-м.н., доцент, кафедра фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: shishkina.en@mail.ru

**Макаров Павел Андреевич** – к.ф.-м.н., доцент, кафедра радиофизики и электронники, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: mkrvpa@gmail.com

**Михайлов Александр Вениаминович** – аспирант, Физико-математический институт, Коми НЦ УрО РАН, e-mail: alexvm2008@mail.ru

**Однечев Владимир Петрович** – д.ф.-м.н., профессор, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: W.P.Odyniec@mail.ru

**Осипов Константин** – магистрант, кафедра прикладной математики и информационных технологий в образовании, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: ea74@list.ru

**Пименов Револьт Револьтович** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет, e-mail: revoltp@mail.ru

**Тимшина Лариса Вячеславовна** – старший преподаватель, кафедра фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: larisatimshina@rambler.ru

**Чупраков Дмитрий Вячеславович** – к.ф.-м.н., доцент, кафедра фундаментальной и компьютерной математики, Вятский государственный университет, e-mail: vecht@mail.ru

**Яковлева Анна Федоровна** – магистрант, кафедра математического моделирования и кибернетики, Сыктывкарский государственный университет им. Питирима Сорокина, e-mail: mmik@syktsu.ru

## AUTHORS

**Belyaeva Nadezhda** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Modeling and Cybernetics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: mmik@syktsu.ru

**Vedernikova Anastasia** – Student, Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: vecht@mail.ru

**Yermolenko Andrey** – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: ea74@list.ru

**Lubyagina Elena** – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: shishkina.en@mail.ru

**Makarov Pavel** – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Radiophysics and electronics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: mkrvpa@gmail.com

**Mikhailov Alexandr** – Post-graduate student, Physical and Mathematical Institute, Komi Scientific Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, e-mail: alexvm2008@mail.ru

**Odyniec Vladimir** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: W.P.Odyniec@mail.ru

**Osipov Konstantin** – Student, Department of Applied Mathematics and Information Technologies in Education, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: ea74@list.ru

**Pimenov Revolt** – St. Petersburg Academic University, e-mail: revoltp@mail.ru

**Timshina Larisa** – Senior Lecturer, Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: larisatimshina@rambler.ru

**Chuprakov Dmitry** – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Fundamental and Computer Mathematics, Vyatka State University, e-mail: vecht@mail.ru

**Yakovleva Anna** – Student, Department of Mathematical Modeling and Cybernetics, Syktyvkar State University named after Pitirim Sorokin, e-mail: mmik@syktsu.ru

# Contents

<b>Applied mathematics and mechanics</b>	
Belyaeva N. A., Yakovleva A. F. <i>Frontal wave of pressure flow . . . . .</i>	3
Makarov P. A. <i>On the variational principles of the mechanics of conservative and non-conservative systems . . . . .</i>	12
Mikhailov A. V. <i>The fluctuations of the ring supported with threads . . . . .</i>	26
<b>Mathematics</b>	
Pimenov R. R. <i>The interpretation and generalizations the Pappus's theorems: involutions and perpendicularity . . . . .</i>	42
<b>Methodical materials</b>	
Odyniec W. P. <i>Zenon Ivanovich Borevich (1922–1995) (To the 95th anniversary) . . . . .</i>	59
Lubyagina E. N., Timshina L. V. <i>Experience in the organization of students' educational and research activities in the study of second- order curves . . . . .</i>	69
<b>Tutor-follower</b>	
Yermolenko A. V., Osipov K. S. <i>Parallel programming in contact problems with a free boundary . . . . .</i>	84
Chuprakov D. V., Vedernikova A. V. <i>About structure of finite cyclic semirings with idempotent commutative addition . . . . .</i>	91
<b>Authors</b>	<b>109</b>

*Научное периодическое издание*

**Вестник Сыктывкарского университета  
Серия 1: Математика. Механика. Информатика  
Выпуск 2 (23) 2017**

Гл. редактор О.А. Сотникова  
Отв. редактор А.В. Ермоленко

Редактор Е.М. Насирова  
Компьютерный макет М.Н. Юркина  
Корректор Л.Н. Руденко

Подписано в печать 28.12.2016. Дата выхода в свет 30.12.2016.

Формат 70 × 108 $\frac{1}{8}$ . Бумага офсетная.

Гарнитура Computer Modern. Печать ризографическая. Усл. печ. л. 12,3.

Тираж 500 экз. Заказ № 8.

---

Адрес типографии:  
167023. Сыктывкар, ул. Морозова, 25,  
Тел. (8212)31-16-93, 31-03-82  
Издательский центр СГУ им. Питирима Сорокина