

ОПЕРАТОР ТИПА КАЛЬДЕРОНА–ЗИГМУНДА В СВЯЗИ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.М.САВЧУК

В докладе речь пойдет о дифференциальных операторах высокого порядка, порожденных в пространстве $L_2[0, 1]$ выражениями вида

$$\tau(y) = \sum_{k,s=0}^m (\tau_{k,s}(x) y^{(m-k)}(x))^{m-s}, \quad m = 2n,$$

и подходящими краевыми условиями. Функции $\tau_{k,s}$ здесь могут быть классическими, но могут быть и обобщенными функциями порядка сингулярности $\min\{k, s\}$. Нас будут интересовать вопросы асимптотического поведения собственных значения, собственных функций и резольвенты. Оказывается, что оценивание остаточных членов в таких асимптотиках приводит к следующей интересной задаче. Пусть $f \in L_2[0, 1]$. Вычислим коэффициенты Фурье ее срезки $c_n(x) = \int_0^x f(t) e^{2\pi i n t} dt$. Конечно $\|\{c_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}\|_{l_2} \leq \|f\|_{L_2}$ равномерно по $x \in [0, 1]$. Верно ли, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{x \in [0, 1]} |c_n(x)|^2 \leq C \|f\|_{L_2}^2 ?$$

Такой же вопрос можно задать и относительно преобразования Фурье: верно ли, что

$$\int_{\mathbb{R}} \Upsilon^2(\lambda) d\lambda \leq C \int_0^1 |f(x)|^2 dx, \quad \Upsilon(\lambda) := \sup_{x \in [0, 1]} \int_0^x f(t) e^{i\lambda t} dt ?$$

Первый вопрос можно переформулировать так. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x_n \in [0, 1]$. Обладает ли система

$$y_n(x) = I_n(x) e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad I_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, x_n], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

свойством бесселевости в $L_2[0, 1]$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |(f, y_n)|^2 \leq C \|f\|^2 ?$$

Оказывается, эти задачи легко можно свести к изучению операторов конволюции

$$f(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}} k(x-y) f(y) dy$$

и более общих операторов типа Кальдерона–Зигмунда

$$f(x) \mapsto \int_{\mathbb{R}} k(x, y) f(y) dy, \quad k(x, y) \sim (x-y)^{-1}, \text{ при } x-y \rightarrow 0.$$

Такая связь позволила получить определенные результаты, хотя решить полностью поставленные задачи не удалось.