

В настоящей работе получено:

**Утверждение 2.** При любой гладкой функции  $h(x, y)$  система (3) обладает дополнительным законом сохранения

$$\begin{aligned} P &= u \left( \eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + 2\eta) , \\ Q &= v \left( \eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + 2\eta) , \\ R &= \left( \eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + \eta - h(x, y)) , \end{aligned} \tag{4}$$

который аналогичен закону сохранения (2).

В работе также получены расширения системы базовых законов сохранения в случаях специальных видов функции  $h(x, y)$ .

### Литература

1. *Стокер Д.Д.* Волны на воде: Математическая теория и приложения М.: Изд-во ИЛ. 1959.
2. *Aksenov A. V., Druzhkov K. P.* Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722. P. 1–7.

## Образование трехмерных течений на режиме сильного взаимодействия

<sup>1</sup>Г. Н. Дудин, <sup>2</sup>В. Я. Нейланд

*Центральный Аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского*

<sup>1</sup>[gndudin@yandex.ru](mailto:gndudin@yandex.ru)

<sup>2</sup>[neyland@tsagi.ru](mailto:neyland@tsagi.ru)

Исследования двумерных течений около плоской пластины, оканчивающейся донным срезом, показали, что на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия разложение функций течения в окрестности передней кромки не является единственным, а содержит неизвестную константу [1,2,3]. При этом предполагалось, что дополнительное условие на задней кромке (например, донное давление) является постоянной величиной и не изменяется по поперечной координате. В работе [1], в которой впервые

было установлен этот факт для определения индуцированного давления была использована формула "касательного клина" в [3] в более точной постановке, рассматривался ударный слой. В настоящей работе рассматривается обтекание под нулевыми углами атаки и скольжения бесконечной плоской пластины конечной длины (по направлению набегающего потока) на режиме сильного взаимодействия при заданной температуре ее поверхности. Предполагается, что на задней кромке пластины может задаваться дополнительное условие, которое является функцией от поперечной координаты. В соответствии с обычными оценками для ламинарного пограничного слоя в гиперзвуковом потоке вводятся безразмерные переменные и функции течения, и используется преобразование А. А. Дородницына. Вводится преобразование переменных, которое позволяет учесть особенности поведения функций течения в окрестности передней кромки [2] и формулируется краевая задача для пространственного пограничного слоя с заданной зависимостью давления от поперечной координаты на задней кромке пластины. В окрестности передней кромки проводится разложение функций течения в степенные ряды для определения функций течения на кромке и собственных чисел. В эти разложения входит свободный параметр, который является функцией от поперечной координаты. В разложение для поперечной компоненты скорости входит производная от этого параметра по поперечной координате. В результате получаются две краевые задачи. Одна - для нахождения главных членов разложения для компонент скорости в продольном и нормальном направлениях, и энтальпии (автомодельная система уравнений). Вторая - для нахождения коэффициентов в членах разложений, содержащих собственное число (неавтомодельная система уравнений). При этом уравнение для поперечной компоненты скорости отделяется от указанных краевых задач и может быть решено после нахождения значения собственного числа. В результате численного решения первой краевой задачи (автомодельной) определены профили компонент скорости в продольном и нормальном направлениях, а также энтальпии для различных значений температурного фактора, показателя адиабаты и числа Прандтля. В результате решения неавтомодельной системы уравнений вычислены соответствующие коэффициенты в разложениях и найдены собственные числа в зависимости от указанных выше параметров течения. Используя автомодельные профили функций течения и

соответствующие им собственные числа, решена краевая задача для определения профиля поперечной компоненты скорости. Показано сильное влияние показателя адиабаты и температурного фактора на образование пространственного течения в рассмотренном случае.

## Литература

1. Нейланд В.Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 40-49.
2. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. - М.: Физматлит, 2003. - 456 с.
3. Brown S.N., Stewartson K. A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Q J Mech. appl. Math. 1975. V. XXVIII, Pt. 1. P75-90.

## Оптимальная по расходу форма трубы при ламинарном потоке в ней вязкой жидкости

<sup>1</sup>А. Г. Егоров, <sup>2</sup>К. Ю. Носулько

*Казанский (Приволжский) федеральный университет*

<sup>1</sup>aegorov0@gmail.com

<sup>2</sup>knosulko@gmail.com

Рассматривается режим двухфазного установившегося течения – ламинарный стратифицированный поток [1,2] жидкости в горизонтальной трубе, при котором в нижней части трубы течет более тяжелая фаза (вода), в верхней – легкая (нефть). Для труб круглого поперечного сечения этот режим рассматривался во многих работах [3,4,5]. В данных работах было установлено, что зависимость расхода нефти от доли воды в потоке немонотонна. Следствием немонотонности является принципиальная возможность повышения эффективности перекачки вязкой нефти в круглых трубах за счет добавления в поток некоторого количества воды, выполняющей роль жидкой смазки.