Математическое моделирование в механике сплошных сред с использованием полигармонических уравнений и их систем

[1]**А. О. Казакова**, [2]**Е. А. Микишанина**, [3]**А. Г. Терентьев**
Чувашский государственный университет
[1]kazakova_anastasia@bk.ru
[2]evaeva_84@mail.ru
[3]agterent@rambler.ru

Полигармоническим уравнением n - го порядка называется уравнение вида

$$\Delta^n u = 0. \tag{1}$$

где Δ - оператор Лапласа, $n \in N$. Многие задачи теории упругости и гидродинамики сводятся к решению гармонических ($n = 1$) и бигармонических ($n = 2$) уравнений. Однако удобные аналитические выражения могут быть получены только для некоторых областей частного вида. В остальных случаях применяются численные методы.

В [1] для решения краевых задач для уравнения (1) предложен численный метод граничных элементов, который заключается в аппроксимации границы области системой конечного числа малых элементов и в аппроксимации вспомогательных функций $u_k = \Delta^k u$ $(k = \overline{0, n-1})$ и их нормальных производных $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial n}$ на каждом элементе. Тогда система интегральных уравнений Грина для этих функций может быть сведена к системе линейных уравнений относительно их значений в контрольных точках (середины граничных элементов). Если контур разбивается на N элементов, то эта система представляет систему Nn линейных алгебраических уравнений относительно $2Nn$ компонент, из которых Nn компонент задаются граничными условиями. Эти условия классифицируются по аналогии с краевыми задачами для гармонического уравнения: 1) условия Дирихле, если на границе заданы функции u_k ; 2) условия Неймана, если заданы нормальные производные v_k ; 3) смешанные условия, если задана часть функций u_k и часть функций v_k .

В докладе также рассматриваются системы вида

$$\begin{cases} \Delta^n u = v, \\ \Delta^m v = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Возможны два случая: 1) v является заданной m-гармонической функцией; 2) v является решением m-гармонического уравнения.

Применяя к первому уравнению системы (2) m раз оператор Лапласа, получаем одно полигармоническое уравнение порядка $m + n$, для решения которого необходимы $m + n$ граничных условий. Первые n граничных условий совпадают с граничными условиями для первого уравнения системы (2). Если функция v задана, то оставшиеся m условий могут быть найдены из нее непосредственным дифференцированием. Если v неизвестна, то оставшиеся m условий совпадают с граничными условиями для второго уравнения системы (2).

К решению краевых задач для систем дифференциальных уравнений сводятся многие задачи теории упругости, например, исследование изгиба пластин, в том числе многослойных, и тонких оболочек приводит к системе вида (2). Чистый изгиб пластины в некторых случаях описывает система:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x,y) = q(x,y), \\ \Delta^m q(x,y) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $q(x,y)$ определяется нагрузкой на пластину, а также ее физическими и геометрическими характеристиками. Граничные условия для решения системы (3) задаются в зависимости от способа закрепления контура пластины и степени определенности функции $q(x,y)$. В докладе рассматриваются случаи жесткой заделки и свободного опирания края пластины.

В качестве приложения в гидродинамике можно рассмотреть плоскую модель Стокса движения цилиндра в ограниченной вязкой жидкости. Задача сводится к нахождению бигармонической функции тока ψ, через которую выражаются скорости точек жидкости и все другие гидродинамические характеристики. Граничные условия получаются из условий прилипания: на контурах скорость жидкости совпадает со скоростью контуров. Далее от этих граничных условий можно перейти к граничным условиям для функции тока – на границах будут заданы сама функция ψ и ее нормальная производная (основная краевая задача для бигармонического уравнения). Численный метод решения такой постановки рассмотрен в работе [2]. Тестовые примеры, рассмотреные для задач о движении круглого цилиндра (точные решения задач получены, например, в работах [3,4]), подтверждают высокую точность предложенного алгоритма. Проведены расчеты для цилиндров эллиптического и прямоугольного сечений.

Литература

1. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012.– Т.52. – №1. – С. 2050-2059.
2. *Терентьев А.Г., Казакова А.О.* Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016.– №2(28). – С. 34-47.
3. *Терентьев А.Г., Терентьев А.А.* Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Известия НАНИ ЧР. – 2002.– №2. – С. 44-62.
4. *Казакова А.О., Петров А.Г.* О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. – 2016.– №3. – С. 16-25.

Численный расчет течения вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами

[1]А. О. Казакова, [2]А. Г. Петров

[1] *Чувашский государственный университет*

[2]*ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН*

[1]kazakova_anastasia@bk.ru

[2]petrovipmech@gmail.ru

Построен алгоритм численного решения плоской задачи гидродинамики между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения. Предполагается малость числа Рейнольдса, и уравнения движения жидкости решаются в линейном приближении Стокса. Пусть жидкость заключена между двумя цилиндрическими телами с сечением произвольной формы: в плоскости $z = x + iy$ контур ∂D_0 находится внутри контура ∂D_1. Если жидкость несжимаема, то компоненты ее скорости выражаются через функцию тока, которая в приближении Стокса