К обоснованию теории мелкой воды

В. В. Остапенко
Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет
ostapenko_vv@ngs.ru

Уравнения теории мелкой воды выведены [1] из уравнений неразрывности и Эйлера в рамках длинноволнового приближения $H/L \ll 1$, где H – характерная глубина потока, а L – характерная длина поверхностных волн. В то же время уравнения этой теории используются не только для описания медленно меняющихся течений с гладкой свободной поверхностью (таких как паводковые течения в реках), но также широко применяются для моделирования быстро протекающих волновых процессов, связанных с распространением гидравлических боров, возникающих при разрушении плотины гидросооружения [2] или при выходе крупных морских волн типа цунами на мелководье и наклонный берег [3]. В последнем случае эти уравнения используются в форме гиперболической системы законов сохранения с выпуклым расширением, допускающей разрывные решения с ударными (прерывными) волнами [4], которыми моделируются гидравлические боры реального течения. Однако на фронтах ударных волн пространственная производная уровня свободной поверхности жидкости $h_x = \infty$, что противоречит условию длинноволнового приближения [2], в силу которого $|h_x| \ll 1$. Для разрешения этого противоречия в рамках классической теории необходимо считать, что ударными волнами описываются переходные области, ширина которых L_0 много больше характерной глубины потока [5]. Однако натурные наблюдения и результаты лабораторного моделирования показывают[2,3,5–8] что поперечные размеры реальных гидравлических боров сравнимы с характерными глубинами рассматриваемых потоков, в силу чего соответствующие им переходные области, как правило, не удовлетворяют условию длинноволнового приближения $H/L_0 \ll 1$.

Поэтому в [9] предлагается другой подход для преодоления данного противоречия теории мелкой воды. Этот подход связан с выводом базисных уравнений этой теории из многомерных интегральных законов сохранения массы и полного импульса. Возникающие при этом ограничения на параметры течения имеют интегральную форму и непосредственно не связаны с классическим условием длинноволнового приближения $H/L \ll 1$. В настоящей работе вводится гидростатическое приближение $w^2/c^2 \ll 1$, где w — вертикальная скорость жидкости, а $c = \sqrt{gh}$ — скорость распространения малых возмущений в фиксированной точке рассматриваемого течения. Понятие гидростатического приближения является локальным, обобщает понятие длинноволнового приближения и применяется для обоснования применимости теории мелкой воды при моделировании волновых течений жидкости с гидравлическими борами.

Литература

1. Friedrichs K. O. *On the derivation of shallow water theory.* Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 109–134.
2. Стокер Дж. Дж. *Волны на воде. Математическая теория и приложения.* М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Yeh H., Liu P., Synolakis C. E. *Long-wave runup models.* Singapore: World Sci. Publ., 1996.
4. Lax P. D. *Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves.* Philadelphia: SIAM, 1972.
5. Остапенко В. В. *Модифицированные уравнения теории мелкой воды, допускающие распространение прерывных волн по сухому руслу.* ПМТФ. 2007. Т. 48. № 6. С. 22–43.
6. Stansby P. K., Chegini A., Barnes T. C. *The initial stages of dam-break flow* J. Fluid Mech. 1998. V. 374. P. 407–424.
7. Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В. *Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала.* Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 72–83.
8. Гусев А. В., Остапенко В. В., Малышева А. А., Малышева И. А. *Волны в открытом канале, образующиеся при прохождении прерывной волны над ступенькой дна.* ПМТФ. 2008. Т. 49. № 1. С. 31–44.
9. Остапенко В. В. *О законах сохранения теории мелкой воды.* Докл. АН. 2015. Т. 464. № 5. С. 558–561.