

Анализ уравнений, описывающих волны в трубах с упругими стенками

И. Б. Бахолдин

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

ibbakh@yandex.ru

Рассматриваются одномерные уравнения, описывающие осесимметричные течения в трубах с упругими стенками. Уравнения движения стенок трубы были получены на основе полных уравнений мембраны с использованием начальной Лагранжевой продольная координата. Для материала стенок применялась нелинейная модель гиперупругого тела. Такая модель обычно используется в тех случаях, когда образец можно растянуть многократно без его разрушения, в данном случае это могут быть кровеносные сосуды или трубки из резиноподобных материалов. Зависимость напряжения от растяжения определяется потенциалом, подбираемым на основе экспериментальных данных. Обычная линейная и нелинейная упругость также может быть описана с помощью такого потенциала, таким образом, теоретические результаты исследования могут применяться и для обычных металлических трубопроводов. Предложено дополнительно учитывать жесткость стенок трубы на изгиб на основе локальной линеаризации уравнений. Это позволяет добиваться корректности уравнений и в случае продольного сжатия стенок трубы. Предложены способы учета сжимаемости материала стенок трубы, учета вязкости материала стенок и наполнителя. Рассмотрены случаи заполнения трубы жидкостью и газом. Частным случаем газонаполненной трубы можно считать модель с контролируемым давлением. Анализируется число и вид дисперсионных кривых для каждого случая. На основе этого анализа делаются предположения о возможном характере решений задачи о распаде произвольного разрыва.

Численно решена задача о распаде произвольного разрыва в случае контролируемого давления, заполнения трубы жидкостью и заполнения газом. Во всех случаях полученные результаты соответствуют ранее разработанной теории обратимых и слабодиссипативных структур разрывов. Обнаружены все основные типы обратимых структур разрывов. Для случая контролируемого давления также численно исследована устойчивость уединенных волн.

Анализируется возможность опрокидывания волн. В результате этого анализа делается вывод о том, что упругие волны могут опрокидываться, и это допустимо с физической точки зрения, и в случае контролируемого давления такие решения пригодны для описания реальных явлений. Гидродинамические и газодинамические волны не опрокидываются.

Применялись численные схемы, опробованные ранее на большом числе уравнений, описывающих среды со сложной дисперсией: трехслойная схема типа "крест" и двухслойная схема предиктор-корректор с аппроксимацией временных производных по методу Рунге-Кутты. В случае контролируемого давления и заполнения газом при расчете аппроксимируются непосредственно исходные уравнения и применяются явные схемы. В случае заполнения жидкостью делается преобразование уравнений для исключения давления и применяется неявная схема. Для решения уравнений, описывающих распространения волн в трубах, была разработана методика коррекции численных схем посредством добавления в уравнения членов с высшими производными. При данной методике не меняется порядок аппроксимации. Методика обеспечивает низкую схемную диссипацию и может применяться для нахождения решений широкого круга уравнений с дисперсией недиссипативного типа или со слабой диссипацией.

Для случаев заполнения жидкостью и газом и для случая контролируемого давления выведены упрощенные гиперболические уравнения длинных волн. Для таких уравнений возможно опрокидывание газодинамических и гидродинамических волн, требующее учета физической вязкости или использования специальных численных методов, позволяющих находить обобщенные решения с разрывами необратимого типа. Для случаев заполнения жидкостью и газом выведены уравнения волн малой амплитуды без учета продольных упругих волн, аналогичные уравнениям Буссинеска. В этом случае опрокидывания нет и можно применять стандартные методы расчета недиссипативных систем уравнений. Расчет и анализ решений уравнений такого типа проводился ранее при разработке теории обратимых структур разрывов.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, номер проекта 15-01-04357а.