

2009) в рамках простейшей кинетики засорения. Демонстрируется высокая точность вычисления параметров за фронтом.

В завершении приводится возможный путь обобщения данной задачи — рассмотрение двухскоростной гиперболической модели, в которой скорости несущей среды и переносимой фазы не совпадают (Леонтьев Н.Е., 2017, DOI: 10.1134/S0015462817010161).

Автор выражает благодарность Леонтьеву Н.Е. за полезные замечания и обсуждение данной работы.

## **Математический анализ разрушения для вариационной модели механики композитов**

**<sup>1</sup>Е. М. Рудой, <sup>2</sup>В. В. Щербаков**

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирский государственный университет*

<sup>1</sup>*rem@hydro.nsc.ru*

<sup>2</sup>*victor@hydro.nsc.ru*

В последние десятилетия широкое распространение в авиации, космонавтике, автомобилестроении получили искусственные материалы — волокнистые композиты, состоящие из упругой матрицы, армированной высокопрочными тонкими волокнами. Использование композиционных материалов обусловлено их уникальными свойствами: высокой прочностью, малым весом, большой сопротивляемостью агрессивным средам. Опыт показывает, что уже на стадии изготовления или же на ранней стадии эксплуатации волокнистых композитов в них появляются трещиноподобные дефекты, которые оказывают существенное влияние на прочностные характеристики материалов и механизмы их разрушения.

В докладе представлены результаты исследования нелинейной краевой задачи о равновесии композита, армированного тонким упругим волокном при наличии трещины отслоения. Для описания вертикальных прогибов волокна используется полулинейное уравнение типа Кирхгофа — Бергера с нелокальным коэффициентом. На берегах трещины задаются краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств и исключающие взаимное проникание точек упругой матрицы и волокна, что приводит к слабой постановке задачи в виде эллиптического вариационного неравенства. На основе метода малых регулярных возмущений формы

области развит математический аппарат, позволяющий проанализировать зависимость решения от длины трещины и получить формулы для скорости высвобождения энергии при продвижении трещины вдоль направления армирования. Показано, что в случаях, соответствующих локальному сдвигу и растяжению трещины, формулы для скоростей высвобождения энергии допускают представление в виде инвариантных интегралов, не зависящих от гладких замкнутых кривых, окружающих одну или обе вершины трещины. Тем самым, найдены аналоги основополагающих понятий механики разрушения (формулы Гриффитса,  $J$ -интеграла Эшелби — Черепанова — Райса и  $M$ -интеграла Ноулса — Стернберга) и установлена их связь друг с другом. Необходимо отметить, что полученные формулы отличаются от классических наличием слагаемых, зависящих от перемещений волокна. Кроме того, предложен итерационный алгоритм численного решения задачи, основанный на методе декомпозиции области и алгоритме Удзавы решения вариационных неравенств. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма. Наша работа продолжает исследования, начатые в [1,2,3].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (№ 17-71-10171).

## Литература

1. Хлуднев А. М., Щербakov В. В. Сингулярные инвариантные интегралы для упругих тел с тонкими упругими включениями и трещинами // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471, № 4. С. 425–429.
2. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler—Bernoulli inclusions // Mathematics and Mechanics of Solids. Published ahead of print 29 August 2016. DOI 10.1177/1081286516664208.
3. Rudoy E. Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // ESAIM: Mathematical Modeling and Numerical Analysis. 2016. Vol. 50, No. 4, pp. 99–1009.