

Структура катящихся волн в длинных каналах с податливыми стенками

¹В. Ю. Ляпидевский, ²А. А. Чесноков

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирский государственный университет*

¹liapid@hydro.nsc.ru

²chesnokov@hydro.nsc.ru

Изучение течения жидкости в каналах с упругими стенками представляет прикладной (задачи биомеханики) и теоретический интерес. Достаточно подробный обзор основных приложений и математических моделей приведен в работе Neil & Jensen, 2003. Одной из основных задач теории описания совместного движения жидкости и канала с податливыми стенками является моделирование распространения пульсовой волны. Для исследования подобных волновых процессов широко распространено применение одномерной модели, сходной по своей структуре с уравнениями теории мелкой воды и газовой динамики. Замыкающим соотношением («уравнением состояния») в этом случае служит связь давления с площадью поперечного сечения просвета канала. Для канала круглого сечения при положительной разности давлений в жидкости и окружающей среде уравнение состояния является выпуклым и газодинамическая модель достаточно адекватно описывает распространение пульсационных волн (Formaggia, Lamponi & Quarteroni, 2003). Однако при отрицательном перепаде давлений возможно резкое схлопывание трубки и развитие автоколебаний большой амплитуды.

В представленном докладе основное внимание уделяется изучению возникновения и развития режима течения, соответствующего катящимся волнам (квазипериодическое движение, в котором плавные участки течения разделены сильными разрывами). Особенностью таких течений является переход от докритического течения к сверхкритическому режиму в системе координат, движущейся вместе с волной. Несмотря на давние исследования в этой области, остается ряд открытых вопросов, связанных с формированием квазипериодических режимов течения в рамках моделей с невыпуклым уравнением состояния.

Нелинейные уравнения газодинамического типа

$$h_t + (uh) = 0, \quad (uh)_t + (u^2h + P(h))_x = \alpha h - cfu^2 \quad (1)$$

при $P = (gh^2/2) \cos \varphi$ и $\alpha = g \sin \varphi$ сводятся к модели движения тонкого слоя жидкости в открытом наклонном канале с учетом турбулентного трения, в рамках которой была построена математическая теория катящихся волн (Dressler, 1949). Уравнения вида (1) с невыпуклой, как правило, функцией $P(h)$ используются для описания течений в каналах и трубках с тонкими упругими стенками (см. Педли, 1983; Brook, Falle, Pedley, 1999). Особый интерес представляет моделирование автоколебаний большой амплитуды и схлопывания трубки. При выполнении критерия Уизема для постоянных начальных данных, соответствующих состоянию равновесия ($\alpha h_0 = c_f u_0^2$), в процессе эволюции течения формируются квазипериодические волны конечной амплитуды.

В работе изучается структура и свойства катящихся волн, описываемых системой (1) с используемой в гемодинамике зависимостью давления от нормированного сечения канала вида $p = h^{10} - h^a$ при $a = -3/2$, а также при $a = -5/2$, что соответствует невыпуклой функции $p(h)$. Между двумя рассматриваемыми случаями имеется отличие, состоящее в том, что в терминах переменной $\tau = 1/h$ функция $\hat{P}(\tau) = P(h)$, связанная с давлением в жидкости p соотношением $P'(h) = hp'(h)$, является выпуклой при $a = -3/2$ и невыпуклой при $a = -5/2$. Это обстоятельство приводит к совершенной различному типу решений уравнений (1). Результаты аналитического и численного исследования показывают, что в первом случае реализуются регулярные катящиеся волны (Dressler, 1949). Для невыпуклой функции \hat{P} формируется аномальный квазипериодический режим течения, в котором форма катящейся волны существенно отличается от классической. Возможность существования таких режимов течения в открытых каналах произвольной формы показана в работе Boudlal & Liapidevskii, 2004, но для течений в эластичных трубках они исследованы аналитически и реализованы в численных расчетах впервые. В классе бегущих волн построено двухпараметрическое семейство периодических решений, соответствующих регулярным и аномальным катящимся волнам. Получены диаграммы катящихся волн, определяющие возможные допустимые параметры потока, при которых могут формироваться квазипериодические режимы течения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00156) и в рамках программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-8146.2016.1).