

On equations of incompressible liquids in Lagrangian variables

V. S. Dryuma

Institute of Mathematics and Informatics of the AS of Moldova
valdryum@gmail.com

1. The Euler system of equations of two-dimensional flows of incompressible ideal fluid in Lagrangian variables has the form

$$x_{tt} + p_u y_v - p_v y_u = 0, \quad y_{tt} + x_u p_v - x_v p_u = 0, \quad x_u y_v - x_v y_u = 1, \quad (1)$$

where the variables $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $p = p(u, v, t)$ are the coordinates and pressure of individual elements of fluid.

To construct of exact particular solutions of the system (1) find from it expressions to partial derivatives of function $p = p(u, v)$

$$p_v = -y_{tt} y_v - x_v x_{tt}, \quad p_u = -x_u x_{tt} - y_u y_{tt}, \quad (2)$$

in which it is necessary to substitute an explicit solutions of the equations of incompressibility of fluid

$$x_u y_v - x_v y_u = 1. \quad (3)$$

As example of solution of undetermined equation (3) we choose a following $x(u, v, t) = \mu(v, t)$, $y(u, v, t) = \nu(v, t) - \frac{u}{\frac{\partial}{\partial v} \mu(v, t)}$, which depend from two arbitrary function $\mu(v, t)$ and $\nu(v, t)$.

Remark. Solutions of the equation (3) after hodograph transformations

$$x(u, v) = x, \quad u - \lambda(x, v) = 0, \quad x_u = 1/\lambda_x, \quad x_v = -\lambda_v/\lambda_x,$$

$$y(u, v) = y, \quad y - \rho(x, v) = 0, \quad y_u = \rho_x \lambda_x, \quad y_v = \rho_v - \rho_x \lambda_v/\lambda_x.$$

takes the form $-\rho_v + \lambda_x = 0$ and it has solution $\lambda(x, v, t) = \psi_v$, $\rho(x, v, t) = \psi_x$, where $\psi(x, v, t)$ is arbitrary function or $\lambda(x, v, t) = \int \rho_v dx + F_1$.

2. The Euler system of equations of three-dimensional flows of incompressible ideal fluid in Lagrangian variables has the form

$$x_{tt} + y_u z_v p_w - y_u z_w p_v - z_u y_v p_w + z_u y_w p_v + p_u y_v z_w - p_u y_w z_v = 0,$$

$$y_{tt} + z_u x_v p_w - z_u x_w p_v - x_u z_v p_w + x_u z_w p_v + p_u x_w z_v - p_u x_v z_w = 0,$$

$$\begin{aligned}
z_{tt} + x_u y_v p_w - x_u y_w p_v - y_u x_v p_w + y_u x_w p_v + p_u x_v y_w - p_u x_w y_v &= 0, \\
x_u y_v z_w - x_u y_w z_v - y_u x_v z_w + y_u x_w z_v + z_u x_v y_w - z_u x_w y_v &= 1. \quad (4)
\end{aligned}$$

From the system (4) follows expressions to the partial derivatives on the function pressure $p = p(u, v, w, t)$

$$\begin{aligned}
p_u &= -z_u z_{tt} - x_u x_{tt} - y_u y_{tt}, \quad p_v = -x_v x_{tt} - y_v y_{tt} - z_v z_{tt}, \\
p_w &= -x_w x_{tt} - y_w y_{tt} - z_w z_{tt}, \quad (5)
\end{aligned}$$

for which necessary to write the conditions of compatibility

The system of equations consisted from the conditions of compatibility and the equation of incompressibility

$$x_u y_v z_w - x_u y_w z_v - y_u x_v z_w + y_u x_w z_v + z_u x_v y_w - z_u x_w y_v = 1, \quad (6)$$

that together form full system of 3D equations of Lagrangian hydrodynamics.

The equation (6) play key role in this theory and for solving of it can be used presentation of the function and variables in parametric form [1]

$$\begin{aligned}
x &= a(\tau, v, w, t), \quad y = b(\tau, v, w, t), \quad z = c(\tau, v, w, t), \quad u = e(\tau, v, w, t), \\
x_u &= a_\tau / e_\tau, \quad x_v = a_v - e_v a_\tau / e_\tau, \quad x_w = a_w - e_w a_\tau / e_\tau, \quad x_t = a_t - e_t a_\tau / e_\tau, \\
y_u &= b_\tau / e_\tau, \quad y_v = b_v - e_v a_\tau / e_\tau, \quad y_w = a_w - e_w a_\tau / e_\tau, \quad y_t = a_t - e_t a_\tau / e_\tau, \\
z_u &= c_\tau / e_\tau, \quad z_v = a_v - e_v a_\tau / e_\tau, \quad z_w = a_w - e_w a_\tau / e_\tau, \quad z_t = a_t - e_t a_\tau / e_\tau, \quad (7)
\end{aligned}$$

where the variable τ is considered as parameter .

Substitution of the expressions (7) in the equation (6) leads to an undefined relationship, which allows find its solutions, dependent on arbitrary functions. These functions are used then to construction of solutions of the full system.

As example is the singular solution of the system (4)

$$y(u, v, w, t) = -2at \cos(u) \cos(v), \quad x(u, v, w, t) = -2at \sin(u) \sin(v),$$

$$z(u, v, w, t) = -1/2 \frac{w}{a^2 t^2 (\cos(2u) - \cos(2v))},$$

$$p(u, v, w, t) = -3/8 \frac{w^2}{(\cos(v)^2 - \cos(u)^2) (-\cos(2u) + \cos(2v)) t^6 a^4}.$$

Литература

1. On solving of Euler equations of ideal incompressible liquid, *Interntional Conference on Mathematical Control theory and Mechanics, Suzdal, July' 3-7 Abstracts: (2015)*, 166–168.

Математическая модель плотностного течения

¹D. Dutykh, ²В. Ю. Ляпидевский

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирский государственный университет*

LAMA, UMR 5127 CNRS, Université Savoie Mont Blanc, France

¹Denys.Dutykh@univ-smb.fr

²liapid@hydro.nsc.ru

Плотностные течения представляют важный с теоретической и практической точки зрения класс течений, широко распространенный в атмосфере и в океане. Влияние топографии, наличие осадков приводят к развитию таких высокоэнергетических процессов как формирование снежных лавин и потоков взвеси, локальных присклоновых течений (Lac du Bourget), мощных подводных "водопадов" и др. Основными механизмами развития плотностных течений являются генерация турбулентности за фронтом течения, подъем и осаждение осадков, вовлечение в поток окружающей жидкости. При этом принципиальная проблема моделирования состоит в определении скорости фронта течения. Несмотря на наличие большого экспериментального материала, связывающего скорость распространения потока с условиями его генерации, вывести эти зависимости из общих принципов в рамках существующих моделей не удается.

В работе представлена многослойная модель мелкой воды с учетом массообмена между слоями в результате турбулентного перемешивания и осаждения осадков, построенная на основе полной системы законов сохранения [Ляпидевский, Тешуков, 2000]. Эта модель позволяет более полно описать начальную стадию развития плотностного течения и найти граничные условия, определяющие динамику потока. Кроме того, рассматриваемая схема течения, в которой скорость более плотной жидкости в придонном слое превосходит скорость фронта приводит к новым математическим постановкам задач о структуре головной части и прави-