цилиндров эллиптического и прямоугольного сечений.

Литература

1. *Казакова А.О., Терентьев А.Г.* Численное решение краевых задач для полигармонического уравнения // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012.– Т.52. – №1. – С. 2050-2059.
2. *Терентьев А.Г., Казакова А.О.* Численное решение плоской задачи теории упругости в многосвязной области // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2016.– №2(28). – С. 34-47.
3. *Терентьев А.Г., Терентьев А.А.* Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // Известия НАНИ ЧР. – 2002.– №2. – С. 44-62.
4. *Казакова А.О., Петров А.Г.* О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. – 2016.– №3. – С. 16-25.

Численный расчет течения вязкой жидкости между двумя движущимися цилиндрами

[1]А. О. Казакова, [2]А. Г. Петров

[1] *Чувашский государственный университет*

[2]*ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН*

[1]kazakova_anastasia@bk.ru

[2]petrovipmech@gmail.ru

Построен алгоритм численного решения плоской задачи гидродинамики между двумя произвольно движущимися цилиндрами произвольного сечения. Предполагается малость числа Рейнольдса, и уравнения движения жидкости решаются в линейном приближении Стокса. Пусть жидкость заключена между двумя цилиндрическими телами с сечением произвольной формы: в плоскости $z = x + iy$ контур ∂D_0 находится внутри контура ∂D_1. Если жидкость несжимаема, то компоненты ее скорости выражаются через функцию тока, которая в приближении Стокса удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2\Psi = 0$, и, используя условия прилипания на границах, можно перейти к основной краевой задаче для этого уравнения в двусвязной плоской области.

Теорема Гурса: любая бигармоническая функция Ψ может быть представлена с помощью двух гармонических функций φ и ψ: $\Psi = \varphi(x, y) + x \cdot \psi(x, y)$. Граничные условия тогда примут вид:

$$\begin{gathered}\varphi|_{\partial D_k} + x_k(s)\,\psi|_{\partial D_k} = g^{(k)}(s), \qquad k = 0, 1, \\ (\partial\varphi/\partial n)|_{\partial D_k} + x_k(s)\,(\partial\psi/\partial n)|_{\partial D_k} + \psi|_{\partial D_k} dy_k/ds = g_n^{(k)}(s).\end{gathered} \tag{1}$$

Каждая из гармонических функций φ и ψ удовлетворяет граничным интегральным уравнениям вида:

$$\begin{gathered}A\varphi_n(s) + B\varphi(s) = 2\pi\varphi(s) \quad (M \in \partial D_0)\,, \\ A\varphi_n(s) + B\varphi(s) = 0 \quad (M \in \partial D_1)\,,\end{gathered} \tag{2}$$

где A и B - линейные операторы:

$$\begin{gathered}A\varphi_n(s) = -\int\limits_{\partial D} G\,(s, s')\,\varphi_n(s')ds', \\ B\varphi(s) = \int\limits_{\partial D} G_n\,(s, s')\,(\varphi(s') - \varphi(s))\,ds',\end{gathered}$$

$G\,(s, s') = \ln\,(r\,(s, s'))$, $r^2\,(s, s') = (x - x')^2 + (y - y')^2$.

Уравнения (1) и (2) представляют систему восьми уравнений с неизвестными $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\varphi_n^{(k)}$, $\psi_n^{(k)}$ $(k = 0, 1)$.

Для проведения численных расчетов используется модификация метода граничных элементов – схема без насыщения, подробно описанная в [1]. Вводится дискретизация контуров конечным числом точек $M_i^{(0)}$ $(i = \overline{1, N_0})$, $M_i^{(1)}$ $(i = \overline{1, N_1})$. Тогда система граничных уравнений (1), (2) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций $\varphi^{(k)}$, $\psi^{(k)}$, $\varphi_n^{(k)}$, $\psi_n^{(k)}$ $(k = 0, 1)$ в точках $M_i^{(k)}$. К ней необходимо присоединить дискретизированные условия $\int\limits_{\partial D} (\partial\varphi/\partial n)\,ds = 0$, $\int\limits_{\partial D} (\partial\psi/\partial n)\,ds = 0$ для нахождения неопределенных констант интегрирования, входящих в правые части граничных условий (1). Решив полученную систему, определяем неизвестные граничные значения искомых функций, зная которые можно приближенно определить значение бигармонической функции тока Ψ в любой точке области D.

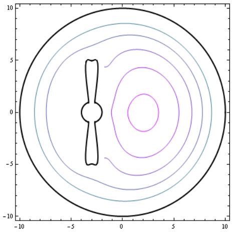

Рис. 1: Линии тока для модели миксера ($N_0 = 120$, $N_1 = 180$). Вертикальное положение

Рис. 2: Линии тока для модели миксера ($N_0 = 120$, $N_1 = 180$). Горизонтальное положение

На тестовых примерах для случая круговых цилиндров (точное аналитическое решения получено в [2]) показана эффективность предложенного алгоритма. С его помощью проведены численные расчеты для модели миксера для различных форм лопатки при различных ее положениях. В частности, на рис. 1 и 2 представлены линии тока $\Psi = const$ для вертикального и горизонального положений лопатки сложной формы, вращающейся с угловой скоростью $\omega = 1$, параметры контуров показаны на рисунках.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-19-01633.

Литература

1. *Petrov A.G.* Quadrature Formulas for Periodic Functions and Their Application to the Boundary Element Method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2008.– V.48. – No. 8. – pp. 1266-1283.
2. *Казакова А.О., Петров А.Г.* О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движу-

щимися поступательно // Изв. РАН. МЖГ. – 2016.– № 3. – С. 16-25.

Об ориентационной неустойчивости сдвиговых течений нематических жидких кристаллов

А. Г. Калугин
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
kalugin@mech.math.msu.su

Нематические жидкие кристаллы (нематики) – среды, обладающие дополнительным макроскопическим параметром – единичным вектором ориентации (директором) $\vec{n}$, описывающим среднее направление длинных осей молекул в частице среды. Используя этот параметр и свойства симметрии среды, можно ввести анизотропную свободную энергию – энергию упругости ориентации Франка, которая с точностью до тождественных преобразований в общем случае принимает вид

$$2F_V = K_1(\mathrm{div}\vec{n})^2 + K_2(\vec{n}, \mathrm{rot}\vec{n})^2 + K_3|[\vec{n}, \mathrm{rot}\vec{n}]|^2 +$$

$$+K_{24}\left(\nabla_i n_j \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2\right),$$

где K_i – постоянные Франка. Также нематики обладают анизотропным тензором вязких напряжений.

Для нематических жидких кристаллов характерна ориентационная неустойчивость, которая наблюдается, например, в динамических процессах. В частности, для сдвиговых потоков рядом авторов экспериментально обнаружено и теоретически исследовалось образование периодических структур поля директора. В представленной работе рассматривается задача об устойчивости сдвиговых течений слоя нематика в случае, когда на границе среды для директора применяется модель слабого сцепления. Для такой модели ориентация директора на границе находится из условия минимума поверхностной энергии. В докладе рассматривается случай, когда минимум достигается при параллельном стенкам директоре. При этом в энергии Франка необходимо учитывать слагаемое с коэффициентом K_{24} которое имеет дивергентную форму и поэтому не входит в уравнения движения среды и