Построение специальных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности

[1]А. Л. Казаков, [2]Св. С. Орлов
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Иркутск
[1]s.orlov@icc.ru
[2]kazakov@icc.ru

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$T_t = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (k(T)\nabla_{\mathbf{x}} T), \quad k(T) = k_0 T^{\sigma}, \tag{1}$$

которое, как известно, встречается при описании процессов горения, тепло- и массопереноса, фильтрации в сплошных нелинейных средах [1]. В литературе (1) именуется *нелинейным уравнением теплопроводности* (*фильтрации*) [2,3], а также *уравнением пористой среды* (*the porous medium equation*) [4].

Будем считать, что $T \triangleq T(t, \mathbf{x})\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^{\nu+1} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\nu \in \{0, 1, 2\}$, $k_0, \sigma \in \mathbb{R}_+$. В предположении наличия пространственных (плоской, осевой и сферической) симметрий уравнение (1) серией невырожденных преобразований приводится к одномерному виду

$$u_t = uu_{\rho\rho} + \frac{u_\rho^2}{\sigma} + \frac{\nu u}{\rho}\, u_\rho, \tag{2}$$

в котором u — новая искомая функция времени $t \geqslant 0$ и неотрицательной скалярной переменной $\rho = ||\mathbf{x}||_\nu \triangleq (\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2)^{1/2}$.

Авторами исследуется проблема поиска точных решений типа тепловой волны уравнения (2), удовлетворяющих специальному краевому условию

$$u(t,\rho)|_{\rho=f(t)} = 0. \tag{3}$$

Здесь $\rho = f(t)$ — некоторая функция, обладающая достаточной степенью гладкости. Ее график определяет в плоскости переменных (t, ρ) *фронт тепловой волны*.

Настоящая работа включает в себя три основных этапа.

А. Поиск точных решений уравнения (2) в виде

$$u(t,\rho) = \psi(t,\rho)v(\xi), \quad \xi \triangleq \xi(t,\rho), \quad \psi\, \xi_t \xi_\rho \not\equiv 0 \tag{4}$$

(прямой метод Кларксона–Крускала) [5]. Структура анзаца [4] предполагает редукцию к ОДУ относительно $v(\xi)$. В формулу

[4], в частности, укладываются такие важные для приложений классы точных решений, как автомодельные, типа бегущей волны [6,7].

B. Согласование найденных семейств решений с краевым условием (3). Выделение решений типа тепловой волны. Переход к задачам Коши для ОДУ 2-го порядка.

C. Качественное исследование свойств решений задач Коши. Идентификация поведения решений типа тепловой волны.

Итак, авторами получены новые классы точных решений нелинейного уравнения теплопроводности (2), имеющих вид тепловой волны. Проводится подробный качественный анализ, позволяющий определить поведение и свойства этих решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-01-00608, № 16-31-00291).

Литература

1. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
2. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. Сидоров А. Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
4. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. Oxford: Claredon Press, 2007.
5. Olver P. J. Direct reduction and differential constraints // Proc. Roy. Soc. (London). 1994. Ser. A, V. 444. P. 509-523.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
7. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.