

Гидродинамические законы сохранения систем уравнений одномерной и двумерной мелкой воды

К. П. Дружков

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Konstantin.Druzhkov@gmail.com

В безразмерных переменных система уравнений одномерной мелкой воды над неровным дном $y = h(x)$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \eta_x &= 0, \\ u_x(\eta + h) + u(\eta_x + h_x) + \eta_t &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Под гидродинамическими законами сохранения системы (1) будем понимать пары функций $(P; R)$, такие что

$$(D_x(P) + D_t(R))|_{(1)} = 0,$$

где P и R зависят от x, t, u, η .

В работе [2] было получено:

Утверждение 1. При любой гладкой функции $h(x)$ система (1) обладает дополнительным законом сохранения

$$\begin{aligned} P &= u(\eta + h(x))(u^2 + 2\eta), \\ R &= (\eta + h(x))(u^2 + \eta - h(x)), \end{aligned} \tag{2}$$

В безразмерных переменных система уравнений двумерной мелкой воды над неровным дном $z = h(x, y)$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + \eta_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + \eta_y &= 0, \\ u_x(\eta + h) + u(\eta_x + h_x) + v_y(\eta + h) + v(\eta_y + h_y) + \eta_t &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Под гидродинамическими законами сохранения системы (3) будем понимать тройки функций $(P; Q; R)$, такие что

$$(D_x(P) + D_y(Q) + D_t(R))|_{(3)} = 0,$$

где P, Q и R зависят от x, y, t, u, v, η .

В настоящей работе получено:

Утверждение 2. При любой гладкой функции $h(x, y)$ система (3) обладает дополнительным законом сохранения

$$\begin{aligned} P &= u \left(\eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + 2\eta), \\ Q &= v \left(\eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + 2\eta), \\ R &= \left(\eta + h(x, y) \right) (u^2 + v^2 + \eta - h(x, y)), \end{aligned} \quad (4)$$

который аналогичен закону сохранения (2).

В работе также получены расширения системы базовых законов сохранения в случаях специальных видов функции $h(x, y)$.

Литература

1. Стокер Д.Д. Волны на воде: Математическая теория и приложения М.: Изд-во ИЛ. 1959.
2. Aksenov A. V., Druzhkov K. P. Conservation laws and symmetries of the shallow water system above rough bottom // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 722. P. 1–7.

Образование трехмерных течений на режиме сильного взаимодействия

¹Г. Н. Дудин, ²В. Я. Нейланд

Центральный Аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

¹gndudin@yandex.ru

²neyland@tsagi.ru

Исследования двумерных течений около плоской пластины, оканчивающейся донным срезом, показали, что на режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия разложение функций течения в окрестности передней кромки не является единственным, а содержит неизвестную константу [1,2,3]. При этом предполагалось, что дополнительное условие на задней кромке (например, донное давление) является постоянной величиной и не изменяется по поперечной координате. В работе [1], в которой впервые