

Законы нуля или единицы для случайных дистанционных графов

Попова С.Н.

МГУ

Определение. Случайный граф Эрдеша-Реньи $G(n, p)$ — это случайный элемент со значениями в Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n$, где

$$\Omega_n = \{(V = \{1, \dots, n\}, E)\}, \quad \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n},$$

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Определение. Случайный граф Эрдеша-Реньи $G(n, p)$ — это случайный элемент со значениями в Ω_n и распределением $P_{n,p}$ на $\mathcal{F}_n$, где

$$\Omega_n = \{(V = \{1, \dots, n\}, E)\}, \quad \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n},$$

$$P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Определение. Пусть $\mathcal{G}_n = (V_n, E_n)$ — последовательность графов.

Случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ — это случайный элемент со значениями в $\Omega_{\mathcal{G}_n}$ и распределением $P_{\mathcal{G}_n,p}$ на $\mathcal{F}_{\mathcal{G}_n}$, где

$$\Omega_{\mathcal{G}_n} = \{G = (V, E) : V = V_n, E \subseteq E_n\},$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{G}_n} = 2^{\Omega_{\mathcal{G}_n}}, \quad P_{\mathcal{G}_n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{|E_n| - |E|}.$$

Определение. Свойства графов первого порядка определяются формулами первого порядка, которые строятся из

- предикатных символов $\sim, =$
- логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$
- переменных $x, y, \dots$
- кванторов $\forall, \exists$

Определение. Свойства графов первого порядка определяются формулами первого порядка, которые строятся из

- предикатных символов $\sim, =$
- логических связок $\neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \vee, \wedge$
- переменных $x, y, \dots$
- кванторов $\forall, \exists$

Определение. Говорят, что случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы, если для любого свойства первого порядка L либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{G}_n, p}(L) = 0,$$

либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\mathcal{G}_n, p}(L) = 1.$$

Теорема (Глебский и др., 1969; Фагин, 1976)

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\forall \beta > 0 \quad \min(p, 1 - p)n^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема (Глебский и др., 1969; Фагин, 1976)

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\forall \beta > 0 \quad \min(p, 1 - p)n^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема (Шела, Спенсер, 1988)

Пусть $p(n) = n^{-\beta}$, где β иррационально.

Тогда случайный граф $G(n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Случайный дистанционный граф $G(\mathcal{G}_n^{dist}, p)$

$$\mathcal{G}_n^{dist} = (V_n^{dist}, E_n^{dist}), \quad n = 4k$$

$$V_n^{dist} = \left\{ \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n v^i = 2k \right\}$$

$$E_n^{dist} = \left\{ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n^{dist} \times V_n^{dist} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k \right\}$$

Теорема (Жуковский, 2011)

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{dist} \right|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{dist}, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы, но существует подпоследовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{dist}, p)$, подчиняющаяся закону нуля или единицы.

Случайный дистанционный граф $G\left(\mathcal{G}_n^{\{-1,0,1\}}, p\right)$

$$\mathcal{G}_n^{\{-1,0,1\}} = \left(V_n^{\{-1,0,1\}}, E_n^{\{-1,0,1\}}\right)$$

$$a = a(n), \quad b = b(n), \quad c = c(n), \quad d = d(n)$$

$$a(n) + b(n) + d(n) = n$$

$$V_n^{\{-1,0,1\}} = \{\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) : v^i \in \{-1, 0, 1\},$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = 1\}| = a,$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = -1\}| = b,$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = 0\}| = d\},$$

$$E_n^{\{-1,0,1\}} = \left\{ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n^{\{-1,0,1\}} \times V_n^{\{-1,0,1\}} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \right\}$$

Случайный дистанционный граф $G\left(\mathcal{G}_n^{\{-1,0,1\}}, p\right)$

$$\mathcal{G}_n^{\{-1,0,1\}} = \left(V_n^{\{-1,0,1\}}, E_n^{\{-1,0,1\}}\right)$$

$$a = a(n), \quad b = b(n), \quad c = c(n), \quad d = d(n)$$

$$a(n) + b(n) + d(n) = n$$

$$V_n^{\{-1,0,1\}} = \{\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) : v^i \in \{-1, 0, 1\},$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = 1\}| = a,$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = -1\}| = b,$$

$$|\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = 0\}| = d\},$$

$$E_n^{\{-1,0,1\}} = \left\{ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n^{\{-1,0,1\}} \times V_n^{\{-1,0,1\}} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \right\}$$

Предыдущая модель: $a = n/2, \quad b = 0, \quad c = n/4, \quad d = n/2$

Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\{-1, 0, 1\}} \right|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\{-1, 0, 1\}} \right|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Теорема

Пусть $a(n) = b(n)$, $c(n) = 0$, $d(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда случайный дистанционный граф $\mathcal{G} \left(G_n^{\{-1, 0, 1\}}, p \right)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\{-1, 0, 1\}} \right|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Теорема

Пусть $a(n) = b(n)$, $c(n) = 0$, $d(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда случайный дистанционный граф $\mathcal{G} \left(G_n^{\{-1, 0, 1\}}, p \right)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема

Пусть $a(n) - b(n) = \alpha n$, $c(n) = \alpha^2 n$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 1$, $d(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда случайный граф $G \left(\mathcal{G}_n^{\{-1, 0, 1\}}, p \right)$ не подчиняется закону нуля или единицы, но существует подпоследовательность $G \left(\mathcal{G}_{n_i}^{\{-1, 0, 1\}}, p \right)$, подчиняющаяся закону нуля или единицы.

Закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

Теорема

Пусть $a - b = o(n)$, $c = o(a - b)$, $a = \Theta(n)$, $d(n) \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, и для всякого $m \in \mathbb{N}$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n > n_0$ числа $a(n) - b(n)$ и $c(n)$ делятся на m . Тогда случайный дистанционный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{-1,0,1\}}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

$EHR(G, H, r)$

Графы G, H , число раундов r

Два игрока Новатор и Консерватор

i -ый раунд:

- Новатор выбирает вершину либо из G , либо из H
- Консерватор выбирает вершину из другого графа

Пусть $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ — вершины, выбранные из графов G и H соответственно.

Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда

$$G|_{\{x_1, \dots, x_r\}} \cong H|_{\{y_1, \dots, y_r\}}.$$

$EHR(G, H, r)$

Графы G, H , число раундов r

Два игрока Новатор и Консерватор

i -ый раунд:

- Новатор выбирает вершину либо из G , либо из H
- Консерватор выбирает вершину из другого графа

Пусть $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ — вершины, выбранные из графов G и H соответственно.

Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда

$$G|_{\{x_1, \dots, x_r\}} \cong H|_{\{y_1, \dots, y_r\}}.$$

Теорема

Случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P_{\mathcal{G}_n, \mathcal{G}_m, p}(\text{Консерватор выигрывает } EHR(G, H, k)) = 1$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$.

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня r** , если для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ ($k + l \leq r$) существует вершина $\mathbf{v}$, соединенная ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ и не соединенная ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$.

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня r** , если для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ ($k + l \leq r$) существует вершина $\mathbf{v}$, соединенная ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ и не соединенная ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$.

Утверждение

Пусть для каждого $r \in \mathbb{N}$ $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня r асимптотически почти наверное. Тогда $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня r** , если для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$ ($k + l \leq r$) существует вершина $\mathbf{v}$, соединенная ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ и не соединенная ребрами с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_l$.

Утверждение

Пусть для каждого $r \in \mathbb{N}$ $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня r асимптотически почти наверное. Тогда $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Утверждение

Пусть существует такое $\beta > 0$, что для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V_n$

$$|\{\mathbf{v} \in V_n : \{\mathbf{v}, \mathbf{v}_i\} \in E_n, \quad i = 1, \dots, r\}| \geq f(n, r),$$

$$f(n, r) = \Omega(|V_n|^\beta).$$

Тогда $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня r асимптотически почти наверное.

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V_n^{\{-1,0,1\}}$$

Найдем $\Omega \left(\left| V_n^{\{-1,0,1\}} \right|^\beta \right)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_i\} \in E_n^{\{-1,0,1\}} \Leftrightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_i) = c$$

Нужно найти такой вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{3r}$, что $A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} c \\ \vdots \\ c \\ a-b \end{pmatrix}$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Случайный дистанционный граф $G(\mathcal{G}_n^{\mathbb{Z}}, p)$

$$\mathcal{G}_n^{\mathbb{Z}} = (V_n^{\mathbb{Z}}, E_n^{\mathbb{Z}})$$

$$V_n^{\mathbb{Z}} = \{\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) : v^i \in M, \quad i = 1, \dots, n, \\ \forall m \in M \quad |\{i \in \{1, \dots, n\} : v^i = m\}| = a_m(n)\}$$

$$E_n^{\mathbb{Z}} = \left\{ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n^{\mathbb{Z}} \times V_n^{\mathbb{Z}} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(n) \right\}$$

- множество $M \subset \mathbb{Z}, |M| < \infty$.
- функции $a_m = a_m(n), m \in M$, такие, что

$$\sum_{m \in M} a_m(n) = n.$$

- функция $c = c(n)$

Пусть функция $p = p(n)$ удовлетворяет свойству

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\mathbb{Z}} \right|^{\beta} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

Пусть функция $p = p(n)$ удовлетворяет свойству

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\mathbb{Z}} \right|^{\beta} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

$$\Phi(n) = \sum_{m \in M} m a_m(n)$$

Пусть функция $p = p(n)$ удовлетворяет свойству

$$\min(p, 1 - p) \left| V_n^{\mathbb{Z}} \right|^{\beta} \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall \beta > 0.$$

$$\Phi(n) = \sum_{m \in M} m a_m(n)$$

Теорема

Пусть $t \in M$, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Phi(n) = t \cdot n, \quad c(n) = t^2 \cdot n,$$

и $a_m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда случайный граф $\mathcal{G}(G_n^{\mathbb{Z}}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Теорема

Пусть $t \in M$, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Phi(n) = (t + \alpha)n, \quad c(n) = (t + \alpha)^2 n, \quad \text{где } \alpha \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha < 1,$$

и $a_m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть последовательность $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такова, что

$$\forall d \in \mathbb{N} \quad \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i > i_0 \quad d \mid n_i.$$

Тогда последовательность $\{\mathcal{G}(G_{n_i}^{\mathbb{Z}}, p)\}_{i \in \mathbb{N}}$ подчиняется закону нуля или единицы.

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \in V_n^{\mathbb{Z}}$$

Найдем $\Omega \left(|V_n^{\mathbb{Z}}|^{\beta} \right)$ вершин, соединенных ребрами с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_i\} \in E_n^{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow (\mathbf{v}, \mathbf{v}_i) = c$$

Для данного вектора $x \in \mathbb{Z}^{|M|^r}$, удовлетворяющему уравнению

$$A\mathbf{x} = (\Phi, \dots, \Phi, n)^T,$$

нужно найти такой вектор $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{|M|^r}$, что

$$A\mathbf{y} = (c, \dots, c, \Phi)^T, \quad 0 \leq y_j \leq x_j \text{ при всех } j.$$

Случайный дистанционный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$

$$\mathcal{G}_n^{\{0,1\}} = (V_n^{\{0,1\}}, E_n^{\{0,1\}})$$

$$a = a(n), \quad c = c(n)$$

$$V_n^{\{0,1\}} = \left\{ \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n) : v^i \in \{0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^n v^i = a \right\}$$

$$E_n^{\{0,1\}} = \{ \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in V_n^{\{0,1\}} \times V_n^{\{0,1\}} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c \}$$

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\forall \beta > 0 \quad \min(p, 1 - p) |V_n^{\{0,1\}}|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть функция $p = p(n)$ такова, что

$$\forall \beta > 0 \quad \min(p, 1 - p) |V_n^{\{0,1\}}|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема

Пусть $a(n) = \alpha n$, $c(n) = \alpha^2 n$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 1$.

Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$ не подчиняется закону нуля или единицы, но существует подпоследовательность

$G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$, подчиняющаяся закону нуля или единицы.

- Когда данная последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы?

- Когда данная последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы?
- Существует ли такое свойство первого порядка L и последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p}(L) \in (0, 1)$$

- Когда данная последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется закону нуля или единицы?
- Существует ли такое свойство первого порядка L и последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} P_{\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p}(L) \in (0, 1)$$

- Какие предельные вероятности $P_{\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p}(L)$ можно получить?

Определение. Случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ **подчиняется k -закону нуля или единицы**, если для любого свойства первого порядка L , задаваемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k , выполнено либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(L) = 0,$$

либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n,p}(L) = 1.$$

Определение. Скажем, что случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется расширенному k -закону нуля или единицы, если для любого свойства L , определяемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k , любой частичный предел последовательности $P_{\mathcal{G}_n, p}(L)$ равен 0 или 1.

Определение. Скажем, что случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется расширенному k -закону нуля или единицы, если для любого свойства L , определяемого формулой первого порядка с кванторной глубиной не более k , любой частичный предел последовательности $P_{\mathcal{G}_n, p}(L)$ равен 0 или 1.

Цель. Найти условия на последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$, при которых имеет место один из следующих случаев:

- выполнен k -закон нуля или единицы
- k -закон нуля или единицы не выполнен, но выполнен расширенный k -закон нуля или единицы
- не выполнен расширенный k -закон нуля или единицы

Обозначения. $a = \alpha n$, $c = \alpha^2 n$, $\alpha = s/q$, $(s, q) = 1$.

Обозначения. $a = \alpha n$, $c = \alpha^2 n$, $\alpha = s/q$, $(s, q) = 1$.

Теорема (3-закон нуля или единицы)

Случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Обозначения. $a = \alpha n$, $c = \alpha^2 n$, $\alpha = s/q$, $(s, q) = 1$.

Теорема (3-закон нуля или единицы)

Случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется 3-закону нуля или единицы.

Теорема (4-закон нуля или единицы)

- Случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется расширенному 4-закону нуля или единицы.
- Последовательность $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется 4-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда
 $\exists i_0$, такое, что все числа $a(n_i) - c(n_i)$ при $i > i_0$ имеют одинаковую четность.

Теорема (5-закон нуля или единицы)

Пусть последовательность $\{n_i\}$ такова, что числа $a(n_i) - c(n_i)$ четны при достаточно больших i . Тогда

- $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется расширенному 5-закону нуля или единицы,
- $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется 5-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда $\exists i_0$, такое, что либо $\forall i > i_0 \ 3 | a(n_i) - c(n_i)$, либо $\forall i > i_0 \ 3 \nmid a(n_i) - c(n_i)$.

Теорема (6-закон нуля или единицы)

Пусть $q \neq 5$ и последовательность $\{n_i\}$ такова, что $a(n_i) - c(n_i)$ делятся на 12 при достаточно больших i . Тогда

- $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется расширенному 6-закону нуля или единицы,
- $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ подчиняется 6-закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда $\exists i_0$, такое, что либо $\forall i > i_0 \ 5 | a(n_i) - c(n_i)$, либо $\forall i > i_0 \ 5 \nmid a(n_i) - c(n_i)$.

Опровержение расширенных законов нуля или единицы для случайного дистанционного графа

$$\forall \beta > 0 \quad \min(p, 1 - p) |V_n^{\{0,1\}}|^\beta \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (*)$$

Теорема (опровержение расширенного б-закона нуля или единицы)

Пусть имеет место один из следующих двух случаев:

- $q = 5$ и последовательность $\{n_i\}$ такова, что $a(n_i) - c(n_i)$ не делятся на 5 при достаточно больших i ,*
- $\alpha = \frac{1}{2}$ и последовательность $\{n_i\}$ такова, что $a(n_i) - c(n_i)$ не делятся на 4 при достаточно больших i .*

Тогда существует такая функция $p(n)$, удовлетворяющая (), что $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ не подчиняется расширенному б-закону нуля или единицы.*

Опровержение расширенных законов нуля или единицы для случайного дистанционного графа

Теорема (опровержение расширенного закона нуля или единицы)

Пусть q четно, $\alpha \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ и последовательность $\{n_i\}$ такова, что $a(n_i) - c(n_i)$ не делятся на 4 при достаточно больших i . Тогда существует такая функция $p(n)$, удовлетворяющая $()$, что $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ не подчиняется расширенному закону нуля или единицы.*

$EHR(G, H, k)$

Графы G, H , число раундов k

Два игрока Новатор и Консерватор

i -ый раунд:

- Новатор выбирает вершину в графе G или в графе H
- Консерватор выбирает вершину в другом графе

Пусть $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ — вершины, выбранные из графов G и H соответственно.

Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда

$$G|_{\{x_1, \dots, x_k\}} \cong H|_{\{y_1, \dots, y_k\}}.$$

$EHR(G, H, k)$

Графы G, H , число раундов k

Два игрока Новатор и Консерватор

i -ый раунд:

- Новатор выбирает вершину в графе G или в графе H
- Консерватор выбирает вершину в другом графе

Пусть $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ — вершины, выбранные из графов G и H соответственно.

Консерватор выигрывает тогда и только тогда, когда $G|_{\{x_1, \dots, x_k\}} \cong H|_{\{y_1, \dots, y_k\}}$.

Теорема

Случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы тогда и только тогда, когда

*$P(\text{Консерватор выигрывает в игре } EHR(G(\mathcal{G}_n, p), G(\mathcal{G}_m, p), k)) \rightarrow 1$
при $n, m \rightarrow \infty$.*

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня t** , если для любых различных вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ ($l + r \leq t$) существует вершина $\mathbf{v}$, смежная с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ и не смежная с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$.

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня t** , если для любых различных вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ ($l + r \leq t$) существует вершина $\mathbf{v}$, смежная с $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l$ и не смежная с $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$.

Предложение

Пусть $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня $(k - 1)$ с асимптотической вероятностью 1. Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Определение. Граф $G = (V, E)$ обладает **свойством полного расширения уровня t** , если для любых различных вершин $v_1, \dots, v_l, u_1, \dots, u_r$ ($l + r \leq t$) существует вершина v , смежная с $v_1, \dots, v_l$ и не смежная с $u_1, \dots, u_r$.

Предложение

Пусть $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня $(k - 1)$ с асимптотической вероятностью 1. Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется k -закону нуля или единицы.

Следствие

Пусть $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{N}$. Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется закону нуля или единицы.

Предложение

Пусть $a(n) = \alpha n$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $c = \alpha^2 n$ и $\forall m \in \mathbb{N} \quad m | n_i$ при достаточно больших i .

Предложение

Пусть $a(n) = \alpha n$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 1$. Тогда $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1 для каждого $t \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $c = \alpha^2 n$ и $\forall m \in \mathbb{N} \quad m | n_i$ при достаточно больших i .

Предложение

Пусть $a(n) = \alpha n$, $c = \alpha^2 n$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $0 < \alpha < 1$, $t \leq 5$. Тогда $G(\mathcal{G}_{n_i}^{\{0,1\}}, p)$ обладает свойством полного расширения уровня t с асимптотической вероятностью 1 тогда и только тогда, когда $D_t | (a(n_i) - c(n_i))$ при достаточно больших i , где

$$D_2 = 1, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 6, \quad D_5 = 60.$$

Определение. Скажем, что вершины $v_1, \dots, v_t$ графа $G = (V, E)$ образуют **особенный t -набор**, если не существует вершины $v \in V$, смежной со всеми вершинам $v_1, \dots, v_t$.

Определение. Скажем, что вершины $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$ графа $G = (V, E)$ образуют **особенный t -набор**, если не существует вершины $\mathbf{v} \in V$, смежной со всеми вершинам $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$.

Пусть $\mathcal{R}_t$ — свойство остовных подграфов $\mathcal{G}_n$:

для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, не образующих особенный t -набор в $\mathcal{G}_n$ и для любого $U \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ существует вершина $\mathbf{v}$, смежная со всеми вершинами из U и не смежная со всеми вершинам из $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\} \setminus U$.

Определение. Скажем, что вершины $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$ графа $G = (V, E)$ образуют **особенный t -набор**, если не существует вершины $\mathbf{v} \in V$, смежной со всеми вершинам $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$.

Пусть $\mathcal{R}_t$ — свойство остовных подграфов $\mathcal{G}_n$:

для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t$, не образующих особенный t -набор в $\mathcal{G}_n$ и для любого $U \subseteq \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\}$ существует вершина $\mathbf{v}$, смежная со всеми вершинами из U и не смежная со всеми вершинам из $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\} \setminus U$.

Предложение

Для любого $t \in \mathbb{N}$ случайный граф $G(\mathcal{G}_n^{\{0,1\}}, p)$ обладает свойством $\mathcal{R}_t$ с асимптотической вероятностью 1.

Предположим, что

- (1) $\mathcal{G}_n = (V_n, E_n)$ не имеет особенных $(t - 1)$ -наборов
- (2) $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством $\mathcal{R}_t$ с асимптотической вероятностью 1

Предположим, что

- (1) $\mathcal{G}_n = (V_n, E_n)$ не имеет особенных $(t - 1)$ -наборов
- (2) $G(\mathcal{G}_n, p)$ обладает свойством $\mathcal{R}_t$ с асимптотической вероятностью 1

Предложение

Пусть последовательность $\mathcal{G}_n = (V_n, E_n)$ удовлетворяет (1), (2) и следующим условиям:

- $\mathcal{G}_n$ имеет особенные t -наборы,
- для любого особенного t -набора любые две его вершины не смежны.

Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется $(t + 1)$ -закону нуля или единицы.

Предложение

Предположим, что $\mathcal{G}_n = (V_n, E_n)$ удовлетворяет (1), (2), и для любых вершин $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$, где $i < t$, выполнено одно из следующих двух условий:

- для любой вершины $\mathbf{v}_{i+1}$, такой, что вершины $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i+1}$ могут быть дополнены до особенного t -набора, существует $\Omega(|V_n|^\beta)$ различных вершин, каждая из которых может быть переведена в $\mathbf{v}_{i+1}$ автоморфизмом графа G_n , оставляющим неподвижными вершины $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i$ (где β - положительная константа),
- $|\{(\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t) : \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t\} \text{ — особенный } t\text{-набор}\}| = O(1)$.

Тогда случайный граф $G(\mathcal{G}_n, p)$ подчиняется расширенному $(t+1)$ -закону нуля или единицы.

Пусть $\mathcal{L}$ — свойство подграфов $G \subseteq \mathcal{G}_n$:

для любого набора вершин $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$, который может быть дополнен до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$ существуют вершины $\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t$, дополняющие $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ до особенного t -набора с ребрами в G .

Пусть $\mathcal{L}$ — свойство подграфов $G \subseteq \mathcal{G}_n$:

для любого набора вершин $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$, который может быть дополнен до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$ существуют вершины $\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t$, дополняющие $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ до особенного t -набора с ребрами в G .

Пусть $K(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ — число наборов $(\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t)$, дополняющих $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$.

Пусть $\mathcal{L}$ — свойство подграфов $G \subseteq \mathcal{G}_n$:

для любого набора вершин $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$, который может быть дополнен до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$ существуют вершины $\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t$, дополняющие $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ до особенного t -набора с ребрами в G .

Пусть $K(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ — число наборов $(\mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_t)$, дополняющих $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$.

Если существует $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ с

$$K(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i) \rightarrow \infty, \quad K(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i) = |V_n|^{o(1)},$$

то $P_{\mathcal{G}_n, p}(\mathcal{L})$ может стремиться к любому числу из $(0, 1)$.

Заменим $\mathcal{L}$ свойством первого порядка L :

$$L = \forall \mathbf{v}_1 \dots \forall \mathbf{v}_i \quad \exists \mathbf{v}_{i+1} \dots \exists \mathbf{v}_t \quad Q(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t),$$

где Q — свойство первого порядка, приближающее свойство, что либо набор $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i)$ нельзя дополнить до особенного t -набора с ребрами в $\mathcal{G}_n$, либо $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_t)$ — особенный t -набор с ребрами в $G(\mathcal{G}_n, p)$.

Спасибо за внимание!