Группы с циклическим представлением и 3-многообразия

А.Ю. Веснин

9 декабря 2017

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

План

1. Группы с циклическим представлением
2. Определяющее слово длины три
3. Группы 3-многобразий с циклическими симметриями
4. Обобщения групп Фибоначчи
5. Гипотеза Мотеги – Терагайто

Группы с циклическим представлением

Группы Фибоначчи

$$F(2,m) = \langle x_1, \dots, x_m \quad | \quad x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \dots, m\rangle$$

были введены Дж. Конвеем [1965].

Все началось с вопроса: верно ли, что группа $F(2,5)$ является циклической группой порядка 11?

Возникает более общий вопрос: когда группа $F(2,m)$ является конечной?

Conway [1967], Brunner [1974], Havas [1976], Chalk–Johnson [1976], Newman [1988, Thomas [1989]:
$F(2,m)$ конечная группа тогда и только тогда, когда $m = 1,2,3,4,5,7$.

А именно,
$F(2,3) = Q_8$, $F(2,4) = \mathbb{Z}_5$, $F(2,5) = \mathbb{Z}_{11}$, $F(2,7) = \mathbb{Z}_{29}$.

Сбалансированное представление

Конечное представление $\langle X|R\rangle$ группы G называется сбалансированным, если число определяющих соотношений $|R|$ равно числу порождающих $|X|$.

Группы, допускающие сбалансированное представление, естественным образом возникают в трехмерной топологии. В частности, сплетение Хегора трехмерного многообразия индуцирует сбалансированное представление его фундаментальной группы.

Представление называется геометрическим, если оно соответствует сплетению Хегора трехмерного многообразия.

Пример. Сбалансированное представление

$$G_{2,1}(5) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \mid (a_{i-1}^{-1} a_i)^2 a_i (a_i^{-1} a_{i+1})^{-2} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, 5\rangle$$

соответствует сплетению Хегора трехмерного многообразия.

Пример сбалансированного представления

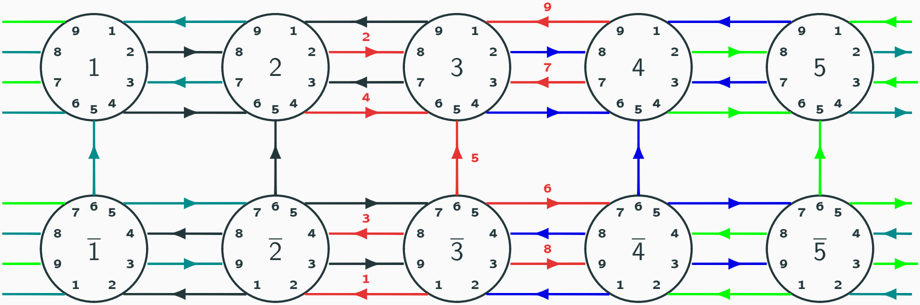

Диаграмма Хегора для группы $G_{2,1}(5)$.

Красная кривая получается из дуг следующими отождествлениями:

$$\overline{3}_1 \longrightarrow \overline{2}_2 \xrightarrow{a_2^{-1}} 2_2 \longrightarrow 3_8 \xrightarrow{a_3} \overline{3}_8 \longrightarrow \overline{2}_4 \xrightarrow{a_2^{-1}} 2_4 \longrightarrow 3_6 \xrightarrow{a_3} \overline{3}_6 \longrightarrow 3_5$$

$$\xrightarrow{a_3} \overline{3}_5 \longrightarrow \overline{4}_7 \xrightarrow{a_4^{-1}} 4_7 \longrightarrow 3_3 \xrightarrow{a_3} \overline{3}_3 \longrightarrow \overline{4}_9 \xrightarrow{a_4^{-1}} 4_9 \longrightarrow 3_1 \xrightarrow{a_3} \overline{3}_1.$$

Этой кривой соответствует определяющее слово

$$w = a_1^{-1}a_2a_1^{-1}a_2a_2a_3^{-1}a_2a_3^{-1}a_2 = (a_1^{-1}a_2)^2a_2(a_2^{-1}a_3)^{-2}.$$

Группы с циклическим представлением

Пусть $\mathbb{F}_n$ – свободная группа ранга $n \geq 1$ с порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – циклически приведенное слово в $\mathbb{F}_n$.

Пусть $\theta : \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_n$ – автоморфизм, опеределенный на порождающих следующим образом: $\theta(x_i) = x_{i+1}$, если $i = 1, \ldots, n-1$, и $\theta(x_n) = x_1$. Представление

$$\mathcal{G}_n(w) = \langle x_1, \ldots, x_n \quad | \quad w = 1,\, \theta(w) = 1,\, \ldots,\, \theta^{n-1}(w) = 1 \rangle$$

называется n-циклическим с определяющим словом w.

Группа $\mathcal{G}$ называтся циклически представимой, если $\mathcal{G}$ изоморфна группе $\mathcal{G}_n(w)$ для некоторых n и w.

Основные проблемы

Проблема. Когда группа $\mathcal{G}_n(w)$ конечна?

Проблема. Когда группа $\mathcal{G}_n(w)$ является фундаментальной группой трехмерного многообразия?

Группы Фибоначчи и группы Сирадски

Пример. Слово $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^{-1}$ задаёт группы Фибоначчи:

$$F(2, n) \;=\; \langle x_1, \ldots, x_n \quad | \quad x_i x_{i+1} \;=\; x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, n \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю n.

Пример. Слово $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 x_2^{-1}$ задаёт группы Сирадски:

$$S(n) \;=\; \langle x_1, \ldots, x_n \quad | \quad x_i x_{i+2} \;=\; x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю n

Замечание. Эти группы представляют интерес с топологической точки зрения.

Многообразия Фибоначчи

Helling – Kim – Mennicke [1988–1998]: Группы Фибоначчи $F(2, 2n)$, $n \geq 2$, возникают как фундаментальные группы замкнутых ориентируемых 3-многообразий M_n, называемых многообразиями Фибоначчи. При $n \geq 4$ многообразия M_n являются гиперболическими.

Hilden – Lozano – Montesinos [1992]: Многообразия Фибоначчи M_n, $n \geq 2$, являются n-листными циклическими накрытиями трехмерной сферы, разветвленными над узлом восьмерка.

Группы Фибоначчи с нечетным числом порождающих, I

Лемма. [Johnson] Если m нечетно, то группа $F(2, m)$ имеет кручение.

Доказательство. В самом деле, в группе

$$F(2, m) = \langle x_1, \ldots, x_m \quad | \quad x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, m \rangle$$

рассмотрим элемент

$$u = x_1 x_2 \ldots x_m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^2 &= (x_1x_2)(x_3x_4)\cdots(x_mx_1)(x_2x_3)\cdots(x_{m-1}x_m) \\ &= x_3 \quad x_5 \quad \cdots \quad x_m \quad x_2 \quad x_4 \quad \cdots \quad x_1 \\ &= (x_2^{-1}x_4)(x_4^{-1}x_6)\cdots(x_{m-1}^{-1}x_1)(x_1^{-1}x_3)(x_3^{-1}x_5)\cdots(x_m^{-1}x_2) = 1. \end{aligned}$$

Убедимся, что $u \neq 1$.

Группа Фибоначчи с нечетным числом порождающих, II

Выполнение равенства $u = 1$ повлекло бы коммутирование порождающих $x_1, \dots, x_m$. В самом деле, если

$$u = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \cdots x_m = 1,$$

то

$$\begin{array}{rcl} x_3^2\, x_4\, x_5\, x_6\ \cdots\ x_m & = & 1, \\ x_3\, x_5^2\, x_6\ \cdots\ x_m & = & 1, \\ x_3\, x_5\, x_7^2\ \cdots\ x_m & = & 1, \\ x_3\, x_5\, x_7\ \cdots\ x_m^2 & = & 1, \\ (x_2^{-1} x_4)(x_4^{-1} x_6)(x_6^{-1} x_8) \cdots (x_{m-1}^{-1} x_1) x_m & = & 1, \\ x_2^{-1}\, x_1\, x_m & = & 1. \end{array}$$

Сравнивая с соотношением $x_m x_1 = x_2$ получаем, что x_1 и x_m коммутируют. Аналогично, x_i и x_{i+1} коммутируют и далее x_i и x_j коммутируют. Известно, что при нечетном $m \geq 9$ группа $F(2, m)$ бесконечна, а её абелианизатор – конечен. Следовательно, $u \neq 1$. $\square$

Группы Сирадски

Cavicchioli – Hegenbarth – Kim [1998]: Группа Сирадски $S(n)$ является фундаментальной группой n-листного циклического накрытия сферы S^3 с множеством ветвления узел трилистник.

Замечание. Обобщенные группы Сирадски

$$S(k,n) = \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_i x_{i+2} \ \ldots \ x_{i+2k-2} = x_{i+1} x_{i+3} \ \ldots \ x_{i+2k-3} \rangle$$

являются фундаментальными группами n-листных циклических накрытий 3-сферы разветвленных над торическими узлами $\mathbf{t}(2,k)$, где трилистник имеет обозначение $\mathbf{t}(2,3)$.

Пример геометрического представления

В. – Козловская [2017]: Следующее представление является геометрическим:

$$\mathcal{G}_n(x_1x_2x_3x_3x_4x_5x_4^{-1}x_3^{-1}x_2x_3x_4x_3^{-1}x_2^{-1}).$$

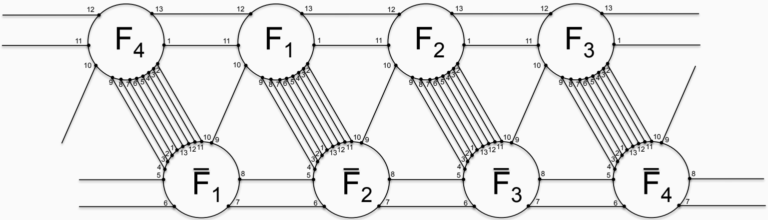

Диаграмма Хегора для $n = 4$.

Соответствующее многообразие является n-листным циклическим разветвленным накрытием линзового пространства $L(5,1)$ и $2n$-листным циклическим накрытием S^3 разветвленным над $\mathbf{t}(5,2)$.

Определяющее слово длины три

Определяющее слово длины три

Рассмотрим случай $w = x_1 x_{1+m} x_{1+k}^{-1}$.

Cavicchioli – Hegenbarth – Repovs [1998]: являются ли группы

$$G_n(m,k) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k}, \quad i = 1, \ldots, n \rangle$$

фундаментальными группами трехмерных многообразий?

Случай $(m,k) = (1,2)$ соответствует группам Фибоначчи.

Случай $(m,k) = (2,1)$ соответствует группам Сирадски.

Бардаков – Веснин [2003]: Пусть n нечетно, $k - m$ четно, и $(m - 2k, n) = 1$, тогда $G_n(m,k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда, в частности, фундаментальной группой гиперболического 3-многообразия.

Результат Хови – Вильямса

Howie – Williams [2017]: Среди всех групп $G_n(m,k)$, за исключением двух групп, фундаментальными группами трехмерных многообразий являются только конечные группы, группы Сирадски, и группы Фибоначчи с четным числом порождающих.

Проблема. Являются ли группы

$$G_9(4,1) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_9 \quad | \quad x_i x_{i+4} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 9 \rangle$$

и

$$G_9(7,1) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_9 \quad | \quad x_i x_{i+7} = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 9 \rangle$$

фундаментальными группами 3-многообразий?

Группы 3-многобразий с циклическими симметриями

Трехмерные многообразия с циклической симметрией, I

Пусть M – замкнутое ориентируемое 3-многообразие допускающее циклическую симметрию.

Birman – Hilden [1975]: ввели понятие n-симметричного рода Хегора M относительно симметрии порядка n.

n-Симметричный род Хегора $g_n(M)$ многообразия M – это такое наименьшее целое g, что M допускает n-симметричное сплетение Хегора рода g.

Теорема 1. [Birman – Hilden] Каждое замкнутое ориентируемое 3-многообразие n-симметричного рода Хегора $g_n(M)$ представимо как n-листное циклическое накрытие сферы S^3 разветвленное над зацеплением L с мостовым числом

$$\mathrm{br}(L) \leq 1 + \frac{g_n(M)}{n-1}.$$

Трехмерные многообразия с циклической симметрией, II

Теорема 2. [Birman – Hilden] Каждое n-листное циклическое накрытие сферы S^3, разветвленное над узлом с косовым числом b, является замкнутым ориентированным 3-многообразием M n-симметричного рода Хегора

$$g_n(M) \leq (b-1)(n-1).$$

Теорема 3. [Mulazzani, 2000] Каждое n-листное циклическое накрытие сферы S^3, разветвленное над узлом K с мостовым числом $\mathrm{br}(K)$, является замкнутым ориентированным 3-многообразием M n-симметричного рода Хегора

$$g_n(M) \leq (\mathrm{br}(K)-1)(n-1).$$

Замечание. Нас будет интересовать случай $\mathrm{br}(K) = 2$. Приведенные теоремы дают $g_n(M) \leq n-1$.

Ранг и род

Очевидно, что n-симметричный род Хегора даёт верхнюю оценку обычного рода Хегора трехмерного многообразия M:

$$g(M) \leq g_n(M).$$

Обозначим через $\mathrm{rk}(G)$ ранг группы G, т.е. минимальное число её порождающих,

$$\mathrm{rk}(G) = \min\{|X| : \langle X \rangle = G\},$$

где через $|X|$ обозначена мощность множества X.

Если G – фундаментальная группа замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия M, то

$$\mathrm{rk}(G) \leq g(M).$$

Двухмостовые узлы и зацепления

Нормальная форма Конвея для двухмостового зацепления $\mathbf{b}(p/q)$.

$$p/q = [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Здесь a_j обозначает $|a_j|$ полуоборотов в направлении, зависящем от знака числа a_j.

Циклические разветвленные накрытия двухмостовых узлов

Через $M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n)$ для $\varepsilon = \pm 1$ обозначим n-листное циклическое накрытие S^3, разветвленное над двухмостовым узлом $\mathbf{b}(p/q)$, где $p/q = 2k + \frac{\varepsilon}{2\ell}$.

Теорема 4. [Kim – V., 1998] Фундаментальная группа $\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n))$ имеет следующее циклическое представление

$$\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n)) = \langle a_1, \ldots, a_n \,|\, (a_{i-1}^{-\ell} a_i^{\ell})^k a_i^{\varepsilon} (a_i^{-\ell} a_{i+1}^{\ell})^{-k} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \rangle.$$

Это представление является геометрическим, то есть возникает из сплетения Хегора многообразия. Диаграмма Хегора для $\pi_1(M^1_{2,1}(5))$ приведена на следующем слайде.

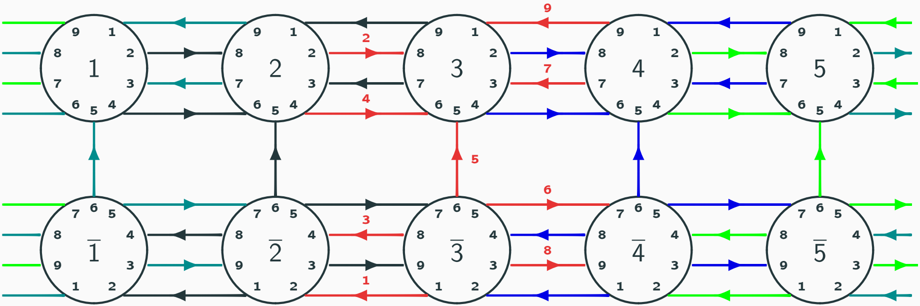

Диаграмма Хегора для $\pi_1(M^1_{2,1}(5))$.

Верхняя оценка для рода Хегора

Теорема 5. [Lei – V., in prep.] Пусть $k, \ell \geq 1$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда для $n \geq 3$ имеет место неравенство

$$g(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n)) \leq n - \left[\frac{n}{3}\right].$$

Метод доказательства: преобразования дестабилизации для сплетения Хегора.

Следствие. Ранг группы $\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n))$ ограничен сверху величиной

$$\mathrm{rk}(\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n))) \leq n - \left[\frac{n}{3}\right].$$

Проблема. Найти $\mathrm{rk}(\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n)))$.

Замечание. Почти во всех случаях рассматриваемые многообразия являются гиперболическими и для них $\mathrm{rk} \geq 2$.

Пусть $k = 1$, $\ell = 1$, $\varepsilon = 1$. Соответствующий узел $\mathbf{b}(5/2)$ – это узел восьмерка. Тогда $\pi_1(M^1_{1,1}(n))$ – это группа Фибоначчи $F(2, 2n)$, которая является двупорожденной.

Пусть $k = 2$, $\ell = 1$, $\varepsilon = -1$. Соотвествующий узел $\mathbf{b}(7/2)$ – это 5_2.

Теорема 6. [Newman, 2001] Для ранга $\mathrm{rk}(\pi_1(M^{-1}_{2,1}(n)))$ имеют место следующие оценки:

$$\frac{\log 24}{\log 60}\left[\frac{n-6}{4}\right] \leq \mathrm{rk}(\pi_1(M^{-1}_{2,1}(n))) \leq \frac{n+1}{2}.$$

Обобщения групп Фибоначчи

Обобщенные группы Фибоначчи

Johnson [1974]: ввел группы

$$F(r,m) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \mid x_i \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r} \rangle,$$

где $i = 1, \ldots, m$, назвав их обобщенными группами Фибоначчи.

- группы $F(r,2)$ конечны;
- если $m > 2r+1$, то группы $F(r,m)$ бесконечны кроме случая $F(7,2)$ и, возможно, $F(3,9)$;

$r \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	8	5	11	∞	29	∞	∞	∞
3	8	2	∞	22	1512	?	∞	?	∞
4	3	63	3	∞	?	?	?	?	∞
5	24	∞	624	4	∞	?	∞	∞	?
6	5	5	125	7775	5	∞	?	?	∞
7	48	342	∞	?	7^6-1	6	∞	?	∞
8	7	∞	7	?	∞	8^7-1	7	∞	?
9	80	8	6560	∞	?	∞	9^8-1	8	∞

Дальнйшие обобщения, I

Campbell – Robertson [1975]:

$$H(r,m,s) \;=\; \langle x_1,\; \ldots\; , x_m \mid x_i\; x_{i+1}\; \cdots\; x_{i+r-1} \;=\; x_{i+r}\; \cdots\; x_{i+r+s-1}\rangle,$$

где $i = 1, \ldots, m$.

- Если $(r+s,m) > 3$, то группа $H(r,m,s)$ бесконечна.

Szczepański – Vesnin [2000]: При $k \geq 2$

$$H(k, 2k-1, k-1) \cong S(k, 2k-1)$$

и эта группа является фундаментальной группой $(2k-1)$–листного циклического накрытия S^3, разветвленного над $\mathbf{t}(2k-1, 2)$.

Дальнейшие обобщения, II

Campbell – Robertson [1975]:

$$F(r, m, k) \;=\; \langle x_1,\; \ldots\; , x_m \mid x_i\; x_{i+1}\; \cdots\; x_{i+r-1} \;=\; x_{i+r+k-1} \rangle,$$

где $i = 1, \ldots, m$.

- Если $d = (m, k-1)$ и $F(r, d)$ конечна, то $F(r, m, k)$ конечна.

Szczepański–Vesnin [2000]: (1) Предположим, что r четно, m нечетно и взаимно просто с $r + 2k - 1$. Тогда $F(r, m, k)$ не может быть группой гиперболического 3-орбифолда конечного объёма.

(2) Для каждого m группа $F(m-1, m, 1)$ является фундаментальной группой многообразия Зейферта с параметрами

$$\Sigma_m \;=\; (0\; o\; 0 \mid\; -1\; \underbrace{(2,1),\; (2,1),\; \ldots, (2,1)}_{m}\;).$$

Дальнейшие обобщения, III

Maclachlan – Reid [1997]:

$$F^k(2,n) = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, x_i x_{i+1}^k = x_{i+2}, \quad i = 1, \dots, n \rangle.$$

Kim – V. [1998]:

$$F^{k/\ell}(2,n) = \langle x_1, \dots, x_n \,|\, x_i^\ell x_{i+1}^k = x_{i+2}^\ell, \quad i = 1, \dots, n \rangle.$$

При $k = 1$ эти группы соответствуют циклическим разветвленным накрытиям S^3, а именно, $F^{1/\ell}(2, 2n) = \pi_1(M^1_{\ell,\ell}(n))$.

Гипотеза Мотеги – Терагайто

Упорядоченные группы и обобщенное кручение

Группа G называется упорядоченной если G допускает отношение порядка "$<$" инвариантное относительного левого и правого умножений: если $g < h$ то $agb < ahb$ для любых $g, h, a, b \in G$. Тривиальная группа считается упорядоченной по определению.

Нетривиальный элемент $g \in G$ называется обобщенным кручением, если некоторое непустое конечное произведение элементов сопряженных g равно единичному элементу группы.

Гипотеза. [Motegi – Teragaito, 2016] Пусть G – фундаментальная группа трехмерного многообразия. Группа G упорядоченная тогда и только тогда, когда она не содержит обобщенных кручений.

Лемма. Если G упорядочена, то она не содержит обобщенных кручений.

Доказательство. Обозначим порядок на G через “$<$”. Предположим, что G содержит обобщенное кручение g. Значит, существуют $a_1, \ldots, a_n \in G$ такие, что

$$g^{a_1} g^{a_2} \cdots g^{a_n} = 1,$$

где $g^a = a^{-1} g a$. Поскольку $g \neq 1$, то имеет место $g > 1$ либо $g < 1$. Если $g > 1$, то в силу упорядоченности $g^{a_i} > 1$ для всех i. Следовательно, произведение сопряженных элементов также больше, чем 1 – противоречие. Случай $g < 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Известные факты, II

Пример. Обозначим через K бутылку Клейна. Тогда $\pi_1(K)$ содержит обобщенное кручение.

Доказательство. Напомним, что

$$\pi_1(K) = \langle x, y \mid y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

Следовательно, $xx^y = 1$. Поскольку $x \neq 1$, то x – обобщенное кручение. $\square$

Теорема 7. [Motegi – Teragaito] Пусть M – произвольное замкнутое геометрическое 3-многообразие, которое не является гиперболическим. Тогда фундаментальная группа $\pi_1(M)$ удовлетворяет Гипотезе.

Теорема 8. [Motegi – Teragaito] Фундаментальная группа n-листного циклического накрытия сферы S^3, разветвленного над узлом восьмерка, удовлетворяет Гипотезе.

Замечание. Такая группа есть группа Фибоначчи $F(2, 2n)$.

Известные факты, III

Теорема 9. [Motegi – Teragaito] В группе Фибоначчи $F(2,m)$, $m \geq 2$, каждый порождающий x_i является обобщенным кручением.

Метод доказательства: комбинаторная теория групп.

Замечание. Этот случай соответствует параметрам $k = \ell = \varepsilon = 1$.

Проблема. Какие из групп

$$\pi_1(M^{\varepsilon}_{k,\ell}(n)) = \langle a_1, \ldots, a_n \,|\, (a_{i-1}^{-\ell} a_i^{\ell})^k a_i^{\varepsilon} (a_i^{-\ell} a_{i+1}^{\ell})^{-k} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \rangle$$

являются упорядоченными?

Спасибо за внимание!