МАТЕМАТИКА

Г.И. Синкевич
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры математики
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: Galina.sinkevich@gmail.com

ИСТОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

История развития понятия о комплексных числах с момента их возникновения до начала векторного исчисления. Исследовано изменение и обогащение геометрического и физического смысла.
Ключевые слова: *Комплексное число; кватернион; вектор; Кардано; Бомбелли; Валлис; Муавр; Эйлер; Даламбер; Вессель; Арган; Гаусс; Грассман; Гамильтон; Ганкель.*

G.I. Sinkevich
Cand. of Phys.-Math. Sciences
Associated Professor
Department of Mathematics
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
Saint-Petersburg, Russian Federation
E-mail: Galina.sinkevich@gmail.com

THE HISTORY OF GEOMETRIC REPRESENTATIONS OF COMPLEX NUMBERS

The history of the conception of complex numbers from their appearance till the beginning of vector calculus. The attention is focused on an enrichment of their geometric and physical meaning.
Keywords: *Complex number; quaternion; vector; Cardano; Bombelli; Wallis; Moivre; Euler; d'Alembert; Wessel; Argand; Gauss; Grassmann; Hamilton; Hankel.*

Развитие понятия числа имеет длинную историю. В античности числом называлось только натуральное число: 1, 2, 3,…, были известны аликвотные дроби и пропорции, которые назывались ratio – отношения, и представляли собой отношения натуральных чисел. В античной Греции обнаружилось, что существуют величины, которые не могут быть выражены никаким отношением, например, диагональ единичного квадрата. Их вычисляли приближенно, с помощью метода исчерпывания. Коэффициенты уравнений, корни уравнений могли быть только положительными. Если при решении задач возникала отрицательная величина, она считалась не имеющей смысла, так как количество не может быть менее чем ничто, но иногда говорили, что в коммерческом смысле это может означать долг. В России XVIII в. отрицательные числа называли убыточными [1, *с. 10*]. Поэтому при решении уравнений отыскивали только положительные корни. Так было до эпохи Возрождения.

Отрицательное число не признавалось полноценным математическим объектом также потому, что для величин должно было выполняться правило пропорции (ratio): если левая часть есть отношение меньшего к большему, то и правая часть пропорции также должна быть отношением меньшего к большему. Но для пропорции вида $\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ это не выполнялось. Кроме того, количество не могло быть менее, чем ничего, относилось ли это к натуральным или рациональным (ratio) числам.

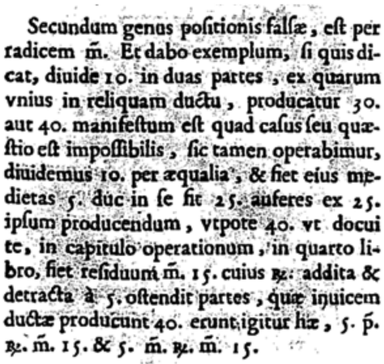
В 1494 г. Лука Пачоли (1445–1517) написал трактат «Сумма арифметики, геометрии, отношений и пропорций» («Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità»), в котором собрал сведения по арифметике, которыми обладали европейцы и индийцы.

В 1544 г. Михаил Штифель впервые[1] сказал, что отрицательные числа – это числа, меньшие нуля (ниже нуля) [2, *с. 94*]. С этого момента постепенно начинает формироваться представление о числовой шкале, на которой положительные числа расположены вправо от нуля по возрастанию, а отрицательные числа – влево от нуля по убыванию. В XVII в. это нашло отражение в хронологической шкале – впервые разнородные хронологии были приведены к шкале, имеющей точку отсчета, положительное направление (от Р.Х.) и обратный отсчет (до Р.Х.) – Жозеф Жюст Скалигер (1540–1609) и Дионисий Петавиус (1583–1652). В 1742 г. шведский астроном Андерс Цельсий (1701–1744) создал температурную шкалу с нулем как точкой отсчета. Современный вид шкала приобрела благодаря К. Линнею[2].

До XVII в. движение рассматривалось только как равномерное по прямой или окружности. Более сложные траектории движения появились в XVII в. Описывать неравномерное движение стало возможным после создания математического анализа. Механическая интерпретация отрицательного числа появляется впервые у Дж. Валлиса, который описал пример перемещения по прямой сначала вперед на 5 ярдов, а затем назад на 8 ярдов [3, *с. 265*].

1545 г. «Великое искусство» Джероламо Кардано

1545 г. считается годом открытия комплексных чисел. Джероламо Кардано, исследуя решение кубического уравнения, пришел в промежуточных выкладках к случаю мнимых корней вспомогательного уравнения, которые затем уничтожались. Он искал только положительные корни, отрицательные называл невозможными, а корни из отрицательных величин – поистине софистическими [4]. Напомним, что в те времена совсем не было ни алгебраической символики, ни формул. Правила излагались словами. Вот страница 287 из «Великого искусства» Кардано, и перевод к ней:



Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m̃. Et dabo exemplum, si quis dicat, diuide 10. in duas partes, ex quarum vnius in reliquam ductu, producatur 30. aut 40. manifestum est quad casus seu quæstio est impossibilis, sic tamen operabimur, diuidemus 10. per æqualia, & fiet eius medietas 5. duc in se fit 25. auferes ex 25. ipsum producendum, vtpote 40. vt docui te, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet residuum m̃. 15. cuius R. addita & detracta à 5. ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40. erunt igitur hæ, 5. p̃. R. m̃. 15. & 5. m̃. R. m̃. 15.

Кардано, «Великое искусство», Глава XXXVII (De regula falsum ponendi – правило ложного положения, отрицательное неизвестное): «Второй вид ложного решения заключается в корне из отрицательного количества (per radicem *m*). Я приведу пример. Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые по перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5; умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычти из 25 то, что должно получиться по перемножении, скажем, 40, – как я объяснял это тебе в главе о действиях в 4-й книге; тогда останется *m*:15; если взять от этого *R* и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут:5*p*:*Rm*:15 и 5*m*:*Rm*:15».

Здесь Кардано рассматривает уравнение $x(10–x)=40$, или $x^2+40=10x$ (уравнение должно было быть записано так, чтобы коэффициенты были положительны). Кардано решает его согласно своему правилу, в современной записи:$x = 5 \pm \sqrt{25-40} = 5 \pm \sqrt{-15}.$ Двоеточие тогда использовалось вместо точки. Кардано

[1] Подобное высказывание есть также в трактате 1484 г. Никола Шюке *Le triparty en la science des nombres*, но он был опубликован только в 1880 г., хотя его идеи были известны.

[2] Термометры изобретались и ранее, но на их шкалах не было разметки ниже нуля (реперной точки).

показывает, что произведение корней равно 40. В тексте p означает plus, плюс; m означает minus, минус; R означает radix, корень; $5p{:}Rm{:}15$ означает $5+\sqrt{-15}$; $5m{:}Rm{:}15$ означает $5-\sqrt{-15}$; $25m{:}m{:}15$ quod est 40 означает 25–(–15)=40. Кардано использует тот факт, что комплексно сопряженные корни при сложении дают действительное число. История открытия формулы решения кубического уравнения описана в книгах [5–8].

1572 г. «Алгебра» Рафаэля Бомбелли

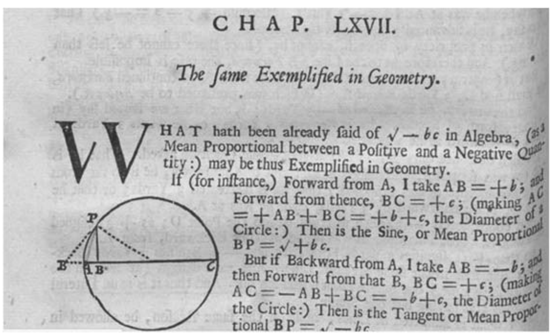
В 1572 г. последователь Кардано, инженер-гидравлик Рафаэль Бомбелли (1526–1572), написал книгу «Алгебра» [9], в которой впервые ввел правила арифметических операций над отрицательными числами, и рассмотрел решение кубического уравнения в случае корней из отрицательных величин. Решая такие уравнения, где во вспомогательных уравнениях под знаком кубического радикала удавалось выделить куб суммы либо разности, а значит, и извлечь кубический корень, Бомбелли показал, что корни из отрицательных величин взаимно уничтожатся, так как слагаемые являются взаимно сопряженными. Бомбелли указал на возможность определить отношение равенства, сумму и произведение комплексных чисел. Но ни физического, ни геометрического смысла у корней из отрицательных величин еще не было. Бомбелли, как инженер-гидравлик, относился к ним как к полезной вспомогательной конструкции.

1637 г. «Геометрия» Рене Декарта

В 1637 г. Рене Декарт (1595–1650) издал свою «Геометрию, в которой назвал мнимые корни «воображаемыми» (imaginariae). Там же впервые появился термин «действительный корень». Отрицательные корни он называл ложными. Мнимые корни появлялись у Декарта в решении задачи о пересечении окружности с параболой. Декарт рассматривает случаи их пересечения, касания и тот случай, «когда окружность не пересекает параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных корней и что все они воображаемые». «Не существует ни одной величины, которая соответствует этим воображаемым корням» [10, *с. 85*].

1685 г. «Алгебра» Джона Валлиса

Первым математиком, попытавшимся дать геометрическую и физическую интерпретацию отрицательным и мнимым числам, был Джон Валлис. Это было в 1685 г. в его трактате «Алгебра». Отрицательные числа он поясняет на задаче о перемещении: «Но если, продвинувшись вперед на 5 ярдов в B, он пройдет обратно на 8 ярдов в D, и будет спрашиваться, насколько он продвинулся вперед, когда попал в D, или сколько это по ходу движения из A, то я скажу: –3 ярда (так как +5–8= –3). Иными словами, он продвинулся вперед на 3 ярда меньше, чем ничто. Уместность этой речи сомнительна (так как не бывает меньше, чем ничто). И, следовательно, если [рассматривать движение] по линии AB вперед, то этот случай невозможен». Мнимые – как стороны утраченного квадратного земельного поля [3, *с. 265*]. Мнимая величина для него есть «средняя пропорциональная между положительной и отрицательной величиной». На его рисунке мы видим, что мнимое число представляет собой отрезок касательной BP. Вот рассуждение Валлиса:


CHAP. LXVII.

The same Exemplified in Geometry.

WHAT hath been already said of $\sqrt{-bc}$ in Algebra, (as a Mean Proportional between a Positive and a Negative Quantity:) may be thus Exemplified in Geometry.

If (for instance,) Forward from A, I take AB = +b; and Forward from thence, BC = +c; (making AC = +AB + BC = +b + c, the Diameter of a Circle:) Then is the Sine, or Mean Proportional BP = $\sqrt{+bc}$.

But if Backward from A, I take AB = −b; and then Forward from that B, BC = +c; (making AC = −AB + BC = −b + c, the Diameter of the Circle:) Then is the Tangent or Mean Proportional BP = $\sqrt{-bc}$.

«Глава LXVII. Представление того же геометрически.

То, что уже было сказано о $\sqrt{-bc}$ в алгебре (как о среднем пропорциональным между положительным и отрицательным количеством), можно проиллюстрировать геометрически.

Если, например, вперед от A я возьму $AB= +b$, а вперед оттуда $BC= +c$ (составим $AC= +AB+BC= +b+c$, диаметр круга), тогда синус (полухорда), или среднее пропорциональное, $BP = \sqrt{+bc}$.

Но если я возьму $AB= -b$ в обратную сторону от A, а потом возьму $BC= +c$ вперед от этого B (составим $AC= -AB+BC= -b+c$ как диаметр круга), тогда касательная будет средним пропорциональным $BP = \sqrt{-bc}$.

Так как $\sqrt{+bc}$ означает синус (полухорду), $\sqrt{-bc}$ будет обозначать тангенс (касательную) той же дуги AP от той же точки P до того же диаметра AC. <…>.

Это требует новых невыполнимостей в алгебре (которые не встречались в линейных уравнениях), не только отрицательных корней, и количеств, меньших, чем ничто, но и корней из отрицательных квадратов. Чего, строго говоря, быть не может: так как нет действительных корней (положительных или отрицательных), которые, будучи умножены сами на себя, дадут отрицательный квадрат.

Эта неосуществимость в алгебре аргументируется неосуществимостью рассмотренного случая в геометрии; и так как точка B не может (по нашему предположению) лежать на прямой AC, как бы ни располагать ее (спереди или сзади) от A.

Так что, вопреки случаю отрицательных корней, мы должны сказать, что точку B невозможно найти, если предполагать ее положение на AC впереди, но сзади от A может быть такой же отрезок: сейчас мы должны сказать, что для случая отрицательного корня точка B не может быть найдена, как предполагалось, на прямой AC, но она может быть выше этой линии в той же плоскости.

На чем бы я хотел бы особенно настаивать, так как понятие (я полагаю), новое, и это явное заявление, как я сейчас думаю, предназначено развить идею того, что мы называем *мнимыми корнями* квадратного уравнения.

Но когда мы приводим квадратное уравнение не к отрицательной величине, относительно которой мы говорили ранее, но к так называемой мнимой величине, это все равно, что сказать, что точка B не может находиться на прямой AC, как мы предполагали, но, вне этой линии, она может находиться (на той же плоскости), на таком же расстоянии выше прямой AC» [Там же, *с. 266–268*].

К сожалению, предположение Валлиса о том, что комплексные числа расположены не на прямой, а на комплексной плоскости, осталось непонятым современниками. Для того, чтобы число стало математическим объектом, нужно было определить отношения (равенство, больше, меньше, то есть порядок) и операции над объектами. Но было неясно, всегда ли операция над комплексными числами приведет к числу такого же вида, то есть $x + y\sqrt{-1}$.

1702 г., Г. Лейбниц

Г. Лейбниц попытался это показать в 1702 г., но потерпел неудачу. В статье «Наглядное доказательство нового анализа для познания бесконечности по отношению к суммам и квадратурам», раскладывая двучлен x^4+a^4 на множители, Лейбниц пришел к результату

$$x^4 + a^4 = \left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)$$
$$\left(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)$$

и сделал вывод, что существуют мнимости другого вида. Он назвал мнимые числа idealis mundi monstro[3] [11, *с. 216*].

1712 год. Логарифм отрицательного и мнимого числа

До 1702 г. мнимые числа рассматривались лишь как корни из отрицательных величин. В 1702 г. Иоганн Бернулли столкнулся с проблемой вычисления логарифма комплексного числа. К 1712 г. Бернулли и Лейбниц спорили по поводу того, чем является логарифм

[3] Itaque elegans et mirabile effugium repetir in illo Analyseos miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus - То, что мы называем мнимым корнем – это изысканное и замечательное изобретение в этом удивительном анализе, прообраз мирового чуда, амфибия между бытием и небытием.

отрицательного числа. Для положительного числа a справедливо $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$. Продолжая рассуждение, можно заключить, что $\ln i = \ln\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\ln(-1)$. Но чему равен ln(–1)? Лейбниц полагал, что он должен быть комплексным. Бернулли, а потом и Даламбер, считали, что вещественным. Английский математик и астроном Р. Котс (Cotes, 1682–1716) в работе «Измерения отношений» (Logometria) 1714, опубликованной в Philisophical Transactions в 1717 г., поместил формулу $\ln(\cos x + i\sin x) = xi$, высказанную такими словами: «Если какая-либо дуга четверти круга, описанного радиусом *CE*, имеет синус *CX* и синус дополнения до четверти *XE* и если принять радиус *CE* за модуль, то дуга будет мерой отношения $EX + XC\sqrt{-1}$ к *CE*, умноженной на $\sqrt{-1}$». Котс не дал ей каких-нибудь применений.

В 1749 году Эйлер обосновал ее, подтвердив правоту Лейбница. Сейчас мы знаем эту формулу в виде $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\varphi + 2k\pi i$.

1707 и 1722 годы. Тригонометрическое представление Абрахама Муавра

В 1707, а затем в 1722 г. у Абрахама Муавра появилась тригонометрическая интерпретация комплексного числа. Кубические и выше уравнения решались не только алгебраическим, но и тригонометрическим способом, с помощью синусов кратных дуг [12]. Известен эпизод с Франсуа Виетом, в 1594 г. решившим этим способом уравнение 45-й степени. Используя известные соотношения, Муавр пришел к формуле возведения в степень и извлечения корня натуральной (до 7-й) степени из комплексного числа. Интересно, что он рассматривал дуги окружности $x^2+y^2=1$, а затем дуги гиперболы $x^2-y^2=1$, что привело его к идее мнимой подстановки $y = v\sqrt{-1}$ [13]. Но, даже представив комплексное число в тригонометрической форме, Муавр не изображал его на плоскости.

Л. Эйлер

В 1730–1740-х гг. в Петербурге Л. Эйлер разработал основы теории функций комплексного переменного. В своих работах Эйлер переходил от координат точки (*x, y*) к комплексному числу $p = x \pm \sqrt{-1}y$, представлял его в полярных координатах $p = s\left(\cos\omega \pm \sqrt{-1}\sin\omega\right)$. Это представление использовали после Л. Эйлера Лагранж и другие математики в двумерных задачах матфизики, но тогда еще не было ни геометрического, ни тем более физического представления операций над комплексными числами. В 1743 г. Л. Эйлер создает метод решения линейных дифференциальных уравнений высших порядков, в котором при решении характеристических алгебраических уравнений возникают мнимые числа. При этом общее решение уравнения действительно [14].

В 1748 г. Л. Эйлер доказал формулу Муавра для всех действительных *n*. Сейчас ее доказывают как следствие из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Л. Эйлер опубликовал эту формулу в статье 1740 г. и в VII главе книги «Введение в анализ бесконечно малых» (Introductio in analysin infinitorum, 1748 г.) [15, *c. 104*].

Понятие комплексного числа постигалось Эйлером постепенно. Большое число наблюдений собственных математических исследований не всегда находило геометрическую либо физическую интерпретацию. А.И. Маркушевич обратил внимание на такой факт. В 1741 г. Л. Эйлер в письме к Гольдбаху (9.XII. 1741) сообщает: «Я нашел также недавно замечательный парадокс, а именно, что значение выражения

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

весьма близко к $\frac{10}{13}$ и эта дробь отличается только в миллионных долях от действительной. Истинное значение этого выражения есть косинус дуги 0,6931471805599…». Смысл этой цитаты становится ясным, если представить $\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ в виде $\frac{e^{+\sqrt{-1}\ln 2} + e^{-\sqrt{-1}\ln 2}}{2}$, что по формуле Эйлера из «Введения в анализ бесконечно малых» $\cos v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$ дает cos ln2.

Значение ln2 и приводится Л. Эйлером [16, с. 18].

1749/51 гг., Л. Эйлер

Л. Эйлер в статье «Исследованиях о мнимых корнях уравнений» (Recherches sur les raciness imaginaires des équations. Mém. Ac. Berlin, (1749) 1751) рассмотрел вопрос о возможном виде комплексного числа. «Мнимым количеством называют такое, которое ни больше нуля, ни меньше нуля, ни равно нулю; это, следовательно, нечто невозможное, как, например, $\sqrt{-1}$ или вообще $a+b\sqrt{-1}$, поскольку такое количество ни положительно, ни отрицательно, ни нуль» [17, *с. 79*]. Доказываемую им основную теорему алгебры Л. Эйлер рассматривает как частный случай следующего предложения: «Всякое мнимое количество всегда образовано двумя членами, один из которых есть действительное количество, обозначаемое через *M*, а другой – произведение также действительного количества *N* на $\sqrt{-1}$; таким образом, $\sqrt{-1}$ есть единственный источник всех мнимых выражений» [17, *с. 121*].

Для доказательства Л. Эйлер применил к числам вида $a+b\sqrt{-1}$ различные алгебраические и трансцендентные операции, известные в его время, и показал, что результат будет числом того же вида.

1752. Жан Лерон Даламбер. Условия Коши-Римана

В XVIII в. бурно развивалась гидродинамика. В 1752 г. Ж.Л. Даламбер рассматривал плоское движение идеальной жидкости. В статье «Опыт новой теории сопротивления жидкостей» Даламбер определил скорость $f(x,y)=u(x,y)+v(x,y)\sqrt{-1}$, где функции *u*(*x, y*) и *v*(*x, y*) – проекции скорости частицы жидкости на оси координат. Они связаны уравнениями $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$, то есть *vdx*+*udy* и *udv*–*vdy* – полные дифференциалы, компактная запись $\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}=0$. В 1755 г. Л. Эйлер пришел к тем же результатам, а позже установил, что действительная и мнимая часть любой аналитической функции необходимо удовлетворяют этим условиям [18, *с. 3*].

proprietates, quae inter quantitates M, N, P et Q intercedunt. Primo enim cum ſit $P=\int(M\partial x-N\partial y)$, quoniam haec formula ſemper integrationem admittit, erit per criterium huiusmodi formularum generale $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$. Eodem autem modo, quia habemus $Q=\int(N\partial x+M\partial y)$, ob integrabilitatem huius formulae erit $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$. Ecce ergo per talem ſubſtitutionem ſemper inueniuntur eiusmodi duae functionos M et N binarum variabilium *x* et *y*, his inſignibus proprietatibus praeditae, vt ſit tam $\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ quam $\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$.

В работах Л. Эйлера была изложена теория элементарных функций комплексной переменной. Сейчас эти условия носят имена Коши-Римана, и являются условиями аналитичности функции. Для такой функции семейства кривых *u*(*x, y*)=*C* и *v*(*x, y*)=*C* взаимно ортогональны.

1768 г. Л. Эйлер. «Универсальная Арифметика»

Операции извлечения корня еще долгое время представляли трудности. В «Универсальной арифметике» 1768 г. [1, *т. 1*] Л. Эйлер пишет: «Корни из отрицательных чисел ни больше, ни меньше, нежели ничего, и самое ничего они также не будут, ибо 0 умноженный на 0 в произведении дает 0, и, следовательно, не отрицательное число.

Когда все возможные числа, которые только представить можно, суть больше или меньше нуля или самой 0,~~то~~ то из сего видно, что корни квадратные из отрицательных чисел в число возможных чисел включены быть не могут, следовательно, суть числа *невозможные*. Сие обстоятельство ведет нас к познанию таких чисел, которые по их свойству суть невозможные и обыкновенно *мнимыми* числами называются, потому что их в уме только представить можно» [1, *с. 90*, курсив Эйлера].

Но далее Эйлер проводит ошибочное рассуждение: «Но когда $\sqrt{a}$, умноженный на $\sqrt{b}$, дает $\sqrt{ab}$; то $\sqrt{-2}$, умноженный на $\sqrt{-3}$, даст $\sqrt{6}$; равным образом $\sqrt{-1}$, умноженный на $\sqrt{-4}$, даст $\sqrt{4}$, то есть 2; откуда видно, что два невозможные числа, помноженные сами собою, произвести могут возможное или действительное число. Но когда $\sqrt{-3}$ умножен будет на $\sqrt{+5}$, то получится $\sqrt{-15}$, или возможное число, помноженное на невозможное, всегда невозможное производит» [1, *с 93*]. Как видим, операции над комплексными числами еще были неясны, но спустя 9 лет Л. Эйлер исправил свою ошибку, дав определение $\sqrt{-1}$ как мнимости i, квадрат которой равен –1, то есть $\frac{1}{i} = -i$. Эйлер обсуждал вопрос о целесообразности мнимых чисел: «Наконец еще сомнение разрешить надлежит, которое состоит в том, когда такие ~~сила~~ суть невозможны, то кажется, что они совсем не нужны, и учение сие за самую малость почесть можно. Но, несмотря на сие, оно в самом деле весьма нужно, ибо очень часто случаются такие вопросы, о которых скоро узнать нельзя, возможные ли они или невозможные? А когда решение их приведет нас на такие числа невозможные, то сие значить будет, что и самый вопрос невозможен. Для изъяснения сего примером рассмотрим следующий вопрос: данное число 12 разбить на две такие части, которых бы произведение было 40? Сей вопрос когда по предписанным в следующих правилах решать будем, то найдем для двух искомых чисел $6+\sqrt{-4}$ и $6-\sqrt{-4}$, которые, следовательно, суть невозможные: итак, из сего видно, что вопроса сего решить не можно. Ежели бы должно было число 12 разделить на такие две части, которые в произведении дали 35, то сии части были бы без сомнения 7 и 5» [1, *с. 94, 95*].

1777 г., Л. Эйлер вводит символ *i*

В докладе «О формах дифференциалов углов, особенно с иррациональностями, которые интегрируются с помощью логарифмов и круговых дуг, Магистр естественных наук Академии представил 5 мая 1777 года», опубликовано в 1794 г., Л. Эйлер впервые ввел символ мнимой единицы i по первому слову imaginaire, которым Декарт называл мнимые числа.

Перевод: Рассмотрим и исследуем дифференциальную формулу $\frac{\partial\Phi\cos\Phi}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, интеграл от

Solutio.

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet iſtud praeſtandi, niſi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in poſterum deſignabo, ita vt ſit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$. Iam ante omnia in numeratore noſtrae formulae loco coſ. Φ has duas partes ſubſtituamus

$$\tfrac{1}{2}(\text{coſ.}\,\Phi + i\,\text{ſin.}\,\Phi) + \tfrac{1}{2}(\text{coſ.}\,\Phi - i\,\text{ſin.}\,\Phi),$$

atque ipſam formulam propoſitam per duas huiusmodi partes repraeſentemus, quae ſint

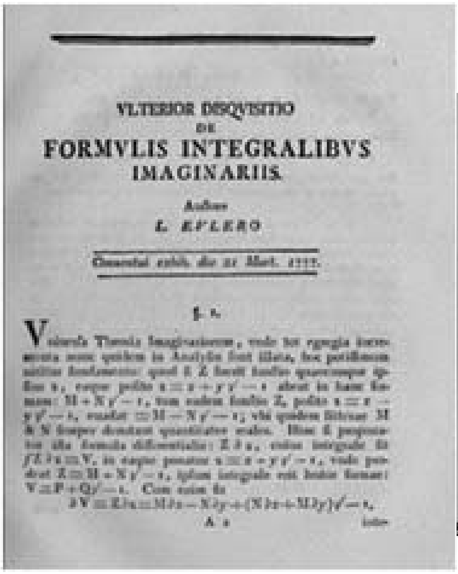
$$\partial p = \frac{\partial\Phi(\text{coſ.}\,\Phi + i\,\text{ſin.}\,\Phi)}{\sqrt[n]{\text{coſ.}\,n\Phi}} \text{ et } \partial q = \frac{\partial\Phi(\text{coſ.}\,\Phi - i\,\text{ſin.}\,\Phi)}{\sqrt[n]{\text{coſ.}\,n\Phi}},$$

ita vt ipſa formula noſtra propoſita ſit $\frac{1}{2}\partial p + \frac{1}{2}\partial q$, ideoque eius integrale $\frac{p+q}{2}$.

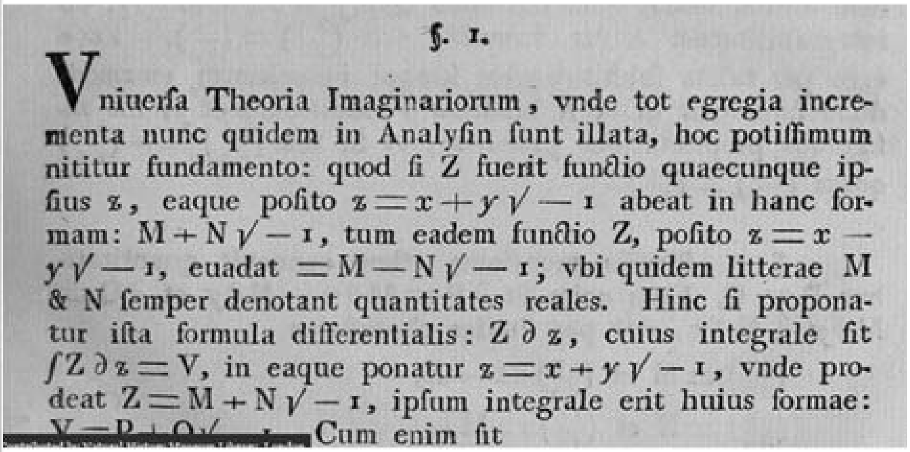
логарифма дуг окружностей. Решение. Для этого мне представляется доступным еще один способ, который однако требует мнимой единицы $\sqrt{-1}$, которую в дальнейшем мы будем обозначать буквой i, так что $ii = -1$, или, что то же, $\frac{1}{i} = -i$. Прежде всего заметим, что значение нашей формулы – это cos.Φ – можно заменить двумя частями $\partial p = \frac{\partial\Phi(\cos.\Phi + i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$ и $\partial q = \frac{\partial\Phi(\cos.\Phi - i\sin.\Phi)}{\sqrt[n]{\cos.n\Phi}}$, и тогда наша формула может быть представлена как $\frac{1}{2}\partial p + \frac{1}{2}\partial q$, и тогда интеграл выразится как $\frac{p+q}{2}$ [19, *с. 184*].

В семидесятые годы Эйлер меняет свое отношение к мнимым числам. Из вспомогательного формализма они приобретают необходимый теоретический статус, получив определение ($i^2 = -1$) и описание свойств. Л. Эйлер разработал теорию интегралов функции комплексного переменного, в том числе выделив *принцип симметрии*: «Вся теория мнимых, которым анализ теперь обязан столькими успехами, опирается главным образом на следующее основание: если Z есть какая-либо функция от z, которая после подстановки $z = x + y\sqrt{-1}$ принимает такой вид: $M + N\sqrt{-1}$, то по подстановке $z = x - y\sqrt{-1}$ та же функция $M - N\sqrt{-1}$, где буквы M и N означают всегда действительные количества» [20, *с. 3*]. Отсюда следуют формулы Эйлера-Даламбера, или, как мы их теперь называем, формулы Коши-Римана.

Тогда же Эйлер применил функцию комплексной переменной к конформным (сохраняющим углы и подобие в малом) преобразованиям.



VLTERIOR DISQVISITIO
DE
FORMVLIS INTEGRALIBVS
IMAGINARIIS.
Auctore
L. EVLERO.



§. 1.

Vniuerſa Theoria Imaginariorum, vnde tot egregia incrementa nunc quidem in Analyſin ſunt illata, hoc potiſſimum nititur fundamento: quod ſi Z fuerit functio quaecunque ipſius z, eaque poſito $z = x + y\sqrt{-1}$ abeat in hanc formam: $M + N\sqrt{-1}$, tum eadem functio Z, poſito $z = x - y\sqrt{-1}$, euadat $= M - N\sqrt{-1}$; vbi quidem litterae M & N ſemper denotant quantitates reales. Hinc ſi proponatur iſta formula differentialis: $Z\,\partial z$, cuius integrale ſit $\int Z\,\partial z = V$, in eaque ponatur $z = x + y\sqrt{-1}$, vnde prodeat $Z = M + N\sqrt{-1}$, ipſum integrale erit huius formae: [redacted] Cum enim ſit

1797/1799 г., Каспар Вессель

Геометрическую интерпретацию комплексных чисел и действий над ними впервые дал норвежский геодезист-картограф Датской академии наук Каспар Вессель (1745–1818) в работе «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях, преимущественно к решению плоских и сферических многоугольников» [21], поданной в 1797 и опубликованной в 1799 г. на датском языке. Работа была им написана для картографов.

К. Вессель ввел понятие направленного отрезка, определил сложение как параллельное смещение плоскости, а умножение – как вращение плоскости с растяжением. В §5 своей работы Вессель пишет: «Пусть +1 обозначает положительную прямолинейную единицу, а +ε – некую другую единицу, перпендикулярную положительной единице и имеющую такое же происхождение. Тогда направляющий угол +1 будет равен 0°, для –1 будет равен 180°, для +ε будет равен 90°, для –ε будет равен –90° или 270°. В силу того правила, что направляющий угол произведения равен сумме углов сомножителей, мы будем иметь: (+1)(+1)=+1, (+1)(–1)=–1, (–1)(–1)=+1, (+1)(+ε)=+ε, (+1)(–ε)=–ε, (–1)(+ε)=–ε, (–1)(–ε)=+ε, (–ε)(–ε)=–1. Отсюда видно, что ε эквивалентен $\sqrt{-1}$ и отклонение произведения определяется так, что ни одно из общих правил этого действия не нарушается» [Там же, *с. 60*]. Вессель показал, что комплексные числ, представленные направленными отрезками, подчиняются собственной непротиворечивой арифметике. Суммой двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ К. Вессель называет диагональ параллелограмма, построенного на сторонах направленных отрезков, соответствующих слагаемым, т.е. параллельное смещение плоскости вдоль $a+bi$. Умножение двух комплексных чисел $(a+bi)(c+di) = (a+bi)\rho e^{i\varphi}$, где $\rho e^{i\varphi} = c+di$ отражает вращение плоскости около точки O на угол φ с удлинением всех размеров в отношении 1: ρ. Работа Весселя содержала основы векторного исчисления для двумерного пространства и была геометрической моделью комплексных чисел, но, к сожалению, она не была замечена ни в Дании, ни в Европе. Европейцы не читали ее, потому что не знали датского языка, а датские академики не обратили на нее внимания. Только спустя столетие, в 1897 г. в Копенгагене отдельной книгой вышел ее перевод на французский язык при редакционном участии Цейтена. Сейчас она доступна на английском языке в хрестоматии Смита [22]. Открытие К. Весселя не оказало никакого влияния на европейскую математику. В XIX в. геометрическая интерпретация комплексного числа была вновь открыта Арганом, и развита в работах Гаусса, Грассмана, Гамильтона и других ученых.

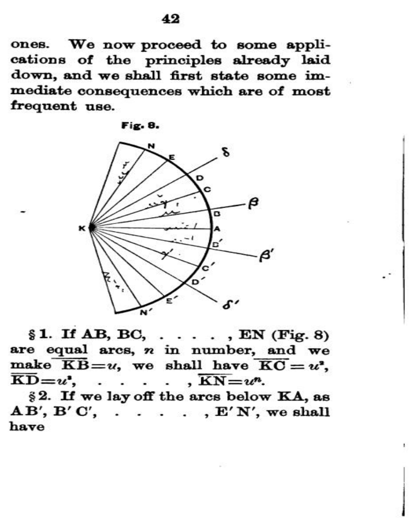
1806, 1813/14.
Жан Робер Арган (1768–1822).

В 1806 г. во Франции управляющий книжным магазином Жан Робер Арган (1768–1822) анонимно издал брошюру «Опыт некоторого способа представления мнимых величин в геометрических построениях» [22]. Ж.-Р. Арган весьма полно разработал геометрическую теорию комплексного числа, сделав те же выводы, что и К. Вессель. В частности, он заметил, что при умножении комплексных чисел их аргументы складываются (Арган, с. 20), а модули растягиваются. Ж.-Р. Арган ввел так называемые диаграммы Ж.-Р. Аргана, изображающие операции умножения, возведения в степень и извлечения корня из комплексного числа.

Ж.-Р. Арган близко подошел к понятию тригонометрических многочленов Чебышева (наименее уклоняющихся от нуля) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ и т.д., т.е. $F_1(x) = x$, $F_2(x) = 2x^2 - 1$, $F_3(x) = 4x^3 - 3x$ и т.д.

Работа Аргана была переиздана в 1813/14 году Ж. Жергоном в 4-м томе журнала «Annales de mathématiques pures et appliquées» (том IV, 1813–1814, с. 61) вместе с его новой статьей (там же, с. 133) в 5-м номере (т. V стр. 197). Появились и другие работы на эту тему, о них пишет Ганкель.

Вот пример одной из диаграмм Аргана из английского издания [23, *с. 42*]:


42

ones. We now proceed to some applications of the principles already laid down, and we shall first state some immediate consequences which are of most frequent use.

Fig. 8.

§ 1. If AB, BC, ... , EN (Fig. 8) are equal arcs, n in number, and we make $\overline{KB} = u$, we shall have $\overline{KC} = u^2$, $\overline{KD} = u^3$, ... , $\overline{KN} = u^n$.

§ 2. If we lay off the arcs below KA, as AB′, B′C′, ... , E′N′, we shall have

1821 А. Коши (1789–1857). Analyse algébrique

В 1821 г. Огюстен Коши читал курс анализа в Политехнической школе. Известно, что его студенты бурно протестовали против преподавания комплексных чисел, полагая эти знания бесполезными. Изложение этой темы в *Analyse algébrique* формально: Коши рассматривает действия над комплексными числами как операции над алгебраическими символами, что потом высмеивал Ганкель: теоремы сложения, тригонометрическая форма, арифметические действия над алгебраической формой, сводимость алгебраической формы к тригонометрической и обратно; возведение в степень и извлечение корня. Правда, Коши впервые дает формулу

$$(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\,\sin\vartheta)(\cos\vartheta - \sqrt{-1}\,\sin\vartheta) = 1,$$

а также обращает внимание на периодичность комплексного числа [24, *с. 173*]. У О. Коши нет геометрической интерпретации комплексных чисел и операций над ними. Но это был учебный курс, а не научное исследование. Позже, в 1829–1832 гг. О. Коши сделал величайший вклад в теорию функций комплексной переменной – создал теорию вычетов.

1831 г. Карл Фридрих Гаусс. «Теория биквадратичных вычетов»

К-Ф. Гаусс (1777–1855) был одним из самых скрытных ученых своего времени. Он знал все, но публиковал очень немногое. Понимание геометрической природы комплексных чисел неявно присутствует еще в его диссертации 1799 г., но строгое построение алгебры комплексных чисел сделано в «Теории биквадратичных вычетов» 1831 г. К-Ф.Гаусс писал: «Трудности, которой считается окруженной теория мнимых величин, по большей части имеют своей причиной мало удачные наименования (некоторые снабдили их даже неудачно звучащим названием невозможных величин). Если бы, исходя из представлений, даваемых многообразием двух измерений (которые с большой ясностью проявляются при пространственных соображениях), называть положительные величины прямыми, отрицательные – обратными, а мнимые – к ним перпендикулярными величинами, то мы имели бы простоту вместо путаницы, ясность вместо туманности» [25, *с. 704*]. Он рассматривал числа на комплексной плоскости, ввел понятие сопряженного числа, нормы, выделил целые и рациональные комплексные числа. Так как целью Гаусса в это работе была теория чисел, то и комплексные числа он привлек именно с этой целью. Благодаря тому, что некоторые простые числа оказались сомножителями комплексно сопряженных чисел, например,

$$2 = (1+i)(1-i),\ 5 = (1+2i)(1-2i),\ 13 = \\ = (3+2i)(3-2i),\ 17 = (1+4i)(1-4i),$$

К-Ф. Гауссу удалось раскрыть теоретико-числовые закономерности разложения чисел.

1841 г., Г. Грассман. Учение о протяжениях

Герман Грассман (1809–1877), учитель прусской гимназии, исследовал природу сложения и умножения комплексных чисел и на этой основе создал «Учение о протяжениях» (*Ausdehnungslehre*), изданном в 1844 и затем в 1862 г. Исходя из принципов и «требований статики и механики» [26, *с. 43*] он вывел понятие n-мерного многообразия с системой операций. В частности, Г. Грассман писал: «*Под произведением двух отрезков a, b мы понимает площадь образованного ими параллелограмма, имея в виду как величину, так и его положение*, то есть мы полагаем $ab = cd$ только в том случае, если параллелограмм, образованный отрезками a и b, не только равен по величине параллелограмму, образованному из отрезков c и d, но и лежит в параллельной с последними плоскости и имеет одно и то же направление [там же, *с. 48*]. <…> Если мы изменим местами факторы произведения ab, то смысл параллелограмма изменяется на обратный» [там же, *с. 61*]. Но сложность изложения и философский язык вместо математического надолго затруднили понимание его открытия, только к концу XIX в. послужившего основой введения n-мерного векторного пространства, что сделано в работах Гиббса.

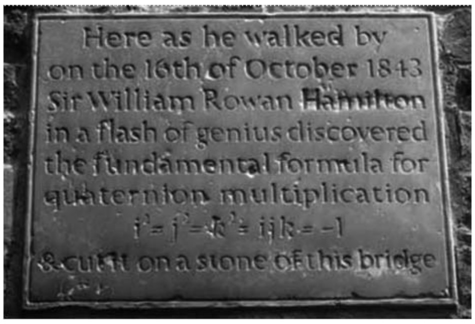
1843 г. У. Р. Гамильтон (1805–1865). Создание теории кватернионов

Сэр Уильям Роуэн Гамильтон (англ. William Rowan Hamilton; 1805–1865) – королевский астроном Ирландии, математик, механик-теоретик, физик-теоретик. С 1835 г. Гамильтон рассматривал алгебру ни как искусство, ни как язык, ни как науку о количестве, но скорее как науку о порядке в определенных рядах. Примером такого процесса является для него идеальное время, освобожденное от всех связей причинности и воздействий, так как оно по Канту является чистой интуитивной формой нашего внутреннего восприятия и лучше поэтому приспособлено, чем пространство, то есть форма нашего внешнего восприятия; во всяком случае, понятия «прошедшее», «настоящее» и «будущее» возникают в нашем сознании скорее, чем понятия «вперед» и «назад» в пространстве; поэтому алгебра у него – это наука чистого времени. «Если геометрия опирается на интуицию пространства, то алгебра могла бы опираться на родственную интуицию времени» [27, *с. 466*]. Гамильтон определил вектор как перенос. Его символ i означает, во-первых, единичный вектор оси Ox, во-вторых, мнимую единицу, и, в-третьих, оператор вращения – верзор.

В 1835 г. Гамильтон опубликовал работу «Теория алгебраических пар» [28], в которой дал новое построение теории комплексных чисел. Это была следующая форма ($z = (a, b)$) комплексных чисел после алгебраической ($z = a+bi$), тригонометрической ($z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$) и показательной ($z = re^{i\varphi}$). Гамильтон рассмотрел комплексное число $x+iy$ как алгебраическую пару (x, y) действительных чисел, то есть устранил геометрический элемент и свел комплексные числа к чистой алгебре, что позволило перейти к новому уровню геометрического обобщения – поворот и растяжение на плоскости. Это дало возможность формализовать методы матфизики в задачах потока жидкости или тепла, гравитации, звуке, оптике. Но эти задачи решались в двумерном пространстве.

Гамильтон хотел распространить систему комплексных чисел на трехмерное пространство, но обнаружил трудности с определением умножения – нарушался либо коммутативный закон, либо закон дистрибутивности. Это противоречило принципу перманентности эквивалентных форм Дж. Пикока, установленного в 1830 г.: законы операций алгебры должны оставаться неизменными, что бы ни означали символы, над которыми совершается операция[4]. Кроме того, у Гамильтона ненулевые сомножители могли дать нулевое произведение. Гамильтон пришел к выводу, что можно построить алгебру только для четырехмерных чисел.

Внезапное озарение, как нужно перемножать четверки чисел, настигло его 16 октября 1843 г. в Дублине на мосту Брумбридж через Королевский канал [27, *с. 443*]. «И вдруг меня осеняет сознание, что для вычислений с триплетами мы должны допустить в некотором смысле четвертое измерение пространства, или, перенося парадокс в алгебру, должны допустить третий мнимый символ k, отличный от i и j, не смешивающийся с i или j, но равный произведению первого как множителя и второго как множимого. Поэтому я пришел к вверению кватернионов». «Там и тогда я почувствовал гальванизирующий ток от приближающейся мысли, и искры, произведенные им, представляли собой фундаментальные уравнения между i, j, k, причем в точности такие, какие я с той поры всегда и использую». Гамильтон был настолько потрясен, что тут же на перилах моста нацарапал формулы $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Сейчас на мосту Брумбридж установлена мемориальная доска.



Как писал сам Гамильтон в 1843 г. о вращении, «Т.к. $\sqrt{-1}$ является в определенном хорошо известном смысле линией, перпендикулярной к линии 1, то кажется естественным, что должна быть некоторая другая мнимость для выражения линии, перпендикулярной к обеим первым. Вот почему вращение от 1 к ней, будучи удвоенным, также приводит к –1, и она также должна быть корнем квадратным из отрицательной единицы, хотя его не должно смешивать с предыдущим. Обозначая старый корень, как это часто делают немцы, через i, а новый – через j, я исследовал, какие законы надо принять для умножения» [там же, *с. 442*].

Для открытых им «четырехчленных чисел» Гамильтон ввел название кватернионы – от лат. quaterni ‘по четыре’. Он записывал кватернионы как суммы вида $q = a+bi+cj+dk$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – три кватернионные единицы (аналоги мнимой единицы i), a, b, c, d – действительные числа. Предполагая умножение кватернионов дистрибутивным относительно сложения, Гамильтон свел определение операции умножения кватернионов к заданию таблицы умножения для базовых единиц $1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1.

Из таблицы видно, что умножение кватернионов не является коммутативным (поэтому алгебраическая система кватернионов не является полем). Сложение векторов коммутативно, оно означает параллельный перенос пространства. Но результат выполнения двух трехмерных поворотов при умножении зависит их порядка. Вращение вокруг начала координат в пространстве определяет некоторую ось, и потому растяжение с вращением, которое в случае плоскости требовало двух констант, в пространстве может быть охарактеризовано лишь четырьмя параметрами.

Теория векторной функции скалярного аргумента была развита Гамильтоном в 1846 г.

[4] «§132. Law of the permanents of equivalent forms stated: Whatever form is algebraically equivalent to another, when expressed in general symbols, must be true, whatever those symbols denote» [29, *c. 104*].

Гамильтон ввел также понятия коллинеарности и компланарности векторов, ориентации векторной тройки и др. Он ввел понятие годографа, оператор «набла» и применил теорию к задачам небесной механики.

Появление векторного анализа

Теорию кватернионов Гамильтона, описанную им в 109 статьях, компактно изложил его ученик, шотландский математик Питер Тэт. Друг и соученик Тэта, Дж. К. Максвелл (1831–1879) увидел в теории кватернионов удобный аппарат для математического описания теории электричества и магнетизма, содержащейся в концепции поля и силовых линий, опубликованной Майклом Фарадеем в 1839–1855 гг. Максвелл выделил из теории кватернионов собственно векторное исчисление. Это было сделано в работе «Трактат по электричеству и магнетизму» (1873) [30] в разделе «Предварительные сведения». В работе Дж. К. Максвелла почти нет символики кватернионов, но из нее взято самое полезное для задач физики. Дж. К. Максвелл назвал вектор $-\left(i\frac{d\psi}{dx}+j\frac{d\psi}{dy}+k\frac{d\psi}{dz}\right)$ скатом или склоном функции ψ, используя слово «склон» (*slope*), чтобы указать направление (и величину) наиболее быстрого убывания ψ [там же, *с. 15*], а для функции двух переменных – направление самого крутого склона поверхности. Термин *gradient* образован от латинского *gradior* – «идти вперед». Термин вошел в употребление в метеорологии, затем Максвелл заменил им свой *the slope of* ψ.

Со временем произошла замена квадрата мнимой величины $i^2 = -1$ на скалярное произведение $(i, i) = 1$. Затем были написаны «Элементы векторного анализа» Гиббса [31] (1880-е годы), после чего Хевисайд (1903) придал векторному исчислению современный вид. Термин «векторный анализ» предложил Гиббс (1879) в своем курсе лекций. Изложение векторного исчисления Гиббса стало классическим [32].

Кватернионы по-прежнему используются в геометрии и физике, например в преобразовании Лоренца, там, где важно задавать трехмерный поворот при помощи минимального числа скалярных параметров, такое описание никогда не вырождается.

Г. Минковский в докладе, сделанном 1 сентября 1908 г. на 80-собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне, назвал совокупность вещественных *x, y, z, t миром* [33, *с. 304*].

1867. Герман Ганкель. «Теория комплексных числовых систем»

В 1867 г. вышла обобщающая книга Германа Ганкеля (1839–1873) «Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Д-ра Германа Ганкеля». Г. Ганкель делает исторический обзор и анализ комплексных чисел и их систем. Например, таких, где соблюдается закон коммутативности, но нарушается ассоциативность и дистрибутивность (работа Шеффлера[5] 1851 г.), системы комплексных чисел Киркмана, не подчиняющихся закону ассоциативности, связанные с операционным гипердетерминантом Кэли. Г. Ганкель замечает, что «существует связь между теорией функций от комплексных чисел высшего порядка и так называемым операционным исчислением, попросту символической совокупностью определенных операций над числами» [34, *с. 129*]. Именно благодаря пересказу Г. Ганкеля стала понятна и обрела признание работа Грассмана «Учение о протяжениях».

Г. Ганкель высказал предположение: «Химическая формула может быть рассматриваема, как комплексное число, единицами которого служат химические обозначения элементов, а коэффициентами значки, показывающие кратные количества каждого из элементов. Химическому соединению соответствует в теории чисел операция умножения; элементам или собственным их атомным весам

[5] Scheffler Hermann (1820–1903).

отвечают первоначальные множители, а химические формулы для разложения тел суть буквально то же самое, что и формулы для разложения чисел» [там же, *с. 128*]. Это было за два года до открытия Менделеевым периодического закона.

Г. Ганкель сформулировал закон перманентности формальных законов: «Если две части логической формы, выраженные общими знаками универсальной арифметики, равны между собой, то они должны оставаться равными и тогда, когда знаки, их выражающие, перестают обозначать обыкновенные величины, и вследствие этого и сами операции получают уже некоторый другой, но определенный смысл» [там же, *с. 20*].

Заключение

Вещественные числа, теория которых развивалась от метода исчерпывания Евдокса до понятия непрерывной числовой области, созданной одновременно Мере, Гейне, Кантором, Дедекиндом и Вейерштрассом, была обобщена А.Н. Колмогоровым [35]. Вещественные числа замкнуты относительно арифметических операций и упорядочены.

Появление мнимой единицы расширило множество вещественных чисел, образовав двумерное пространство – комплексную плоскость. Это тоже полная и единственная система, но в ней уже нет упорядоченности.

Кватернионы имеют размерность 4 и утрачивают коммутативность умножения. В 1898 г. Адольф Гурвиц доказал, что система кватернионов также единственна. Кватернионы являются единственной конечномерной алгеброй с делением, которая содержит вещественные числа и не совпадает с вещественными или комплексными числами [37].

Понятие комплексного числа развивалось исходя из внутренней логики математики, а также исходя из потребностей прикладных наук – картографии, гидродинамики и других естественных наук. Исследования показали, что операции над комплексными числами отражают свойства движения в пространстве – поворот и растяжение.

Постепенно менялась картина мира: ньютонианская механистическая сменилась на релятивистскую, изменились и геометрические представления о пространстве. Математическая аксиоматика метрического пространства сформировалась в первые десятилетия XX в. (Фреше и Хаусдорф). Мнимая составляющая комплексных функций приобретала физические смыслы проекции силы, реактивного сопротивления, потери энергии, составляющей коэффициента преломления, гармонического колебания.

Мы рассказали здесь главное течение истории развития понятия комплексного числа. Были и другие попытки интерпретировать комплексное число и операции над ним, не получившие признания. В конце XIX в. в попытках расширить понятие комплексного числа возникли сложные многомерные системы, рассказ о которых за рамками этой статьи.

Развитие понятия комплексного числа послужило базой для теории функций комплексного переменного, операционных методов решения дифференциальных уравнений, неевклидовой геометрии, теории чисел, геодезии и картографии, математической физики, теории упругости, теории электромагнитного поля, электро- и магнитостатики, электродинамики, квантовой механики [36]. Комплексность отражает фундаментальные свойства мира – симметрию и цикличность.

Список литературы

1. Эйлер Л. *Универсальная арифметика г. Леонгарда Эйлера. Переведенная с немецкого подлинника студентами Петром Иноходцовым и Иваном Юдиным.* Т. 1, содержащий в себе все образы алгебраического вычисления. Санкт Петербург: Императорская Академия наук, 1768. 376 с.
2. Цейтен Г. *История математики в XVI и XVII веках.* Москва-Ленинград: ГТТИ, 1933. 430 с.
3. Wallis J. A treatise of algebra, both historical and practical. London : printed by John Playford, 1685. 374+17+176+17 p. Раздельная пагинация.
4. Cardani H. Artis magnae, sive de regulisalgebraicis, liber unus. Papiae: A.Osiandro. 1545. 82 p.
5. Niccolò Tartaglia. Quesiti et inventioni diverse, dialogo con interlocutori principali Francesco Maria della Rovere e Gabriele Tadino e argomenti diversi: aritmetica, geometria, algebra, statica, topografia, artiglieria, fortificazioni, tattica. 1546.

6. Bortolotti, E. La storia della matematica nella Università di Bologna by Ettore Bortolotti. Bologna: N. Zanichelli, 1947. 226 p.

7. Гутер Р., Полунов Ю. *Джироламо Кардано*. М.: Знание, 1980. 192 с.

8. Гиндикин С.Г. *Рассказы о физиках и математиках (издание третье, расширенное)*. М.: МЦНМО, НМУ, 2001. 448 с.

9. Bombelli R. L'Algebra opera. Divisa in tre libri. Bologna: Nella stamperia do Guovanni Rossi. 1572.

10. Декарт Р. *Геометрия* / Перевод, примечания и статья А.П. Юшкевича. Москва-Ленинград: ГОНТИ, 1938. 296 с.

11. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas. Acta eruditorum. 1702, May. Pp. 210–219.

12. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analytica. Philos. Trans. 1706/1707. Pp. 2368–2371.

13. Moivre Ab. De Sectione Anguli. Philisophical Transactions, 1722. 374. Vol. 32. Pp. 228–230.

14. Euler L. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. Miscellanea Berolinensis 1743. Vol. VII. Pp. 193–242.

15. Euler L. Cap. VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis. Introductio in analysin infinitorum. 1748. Vol. 1. P. 104. (Русский перевод: Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых. Москва-Ленинград. 1936. Т. 1).

16. Маркушевич А.И. *Очерки по истории теории аналитических функций*. Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1951. 129 с.

17. Euler L. Opera omnia, series I. Opera mathematica, Leipzig-Berlin, 1921. Vol. 6.

18. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginaries. Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae10 (1792) 1797. Раздельная пагинация. Математика. Pp. 3–19. (Также см. Opera Omnia. Series I. Vol. 19. Pp. 268–286).

19. Euler L. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrale licet. M.S. Academiae exbibit. Die 5 Maii 1777. Pp. 183–194. Euler L. Institutiones calculi integralis. Vol. 4. Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientarum. 1794.

20. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis. Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae. 10 (1792) 1797. Раздельная пагинация: Математика. Pp. 3–19.

21. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. A source book in Mathematics. Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. 701 p. Pp. 55–66.

22. Argand R. (1806). Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2e édition, Gauthier Villars, Paris (1874) BNF Pp. 1–60.

23. Argand J.R. Imaginary quantities; their geometrical interpretation. 1881. New York: D. Van Nostrand. 154 p.

24. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique. Analyse Algébrique. Paris: Éditions Jacques Gabay. 1821. 602 p.

25. Гаусс К.Ф. Теория биквадратических вычетов, сочинение вторoе // *Труды по теории чисел*. Перевод Б.Б. Демьянова, общая редакция И.М. Виноградова, комментарии Б.Н. Делоне. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 694–754.

26. Grassman H. Der Ausdehnungslehre von 1844 oder Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig: Verlag von Otto Wigand. 1878. 347 p.

27. Гамильтон У.Р. *Избранные труды* / Под ред. Л.С. Полака. М.: Наука, 1994. 560 с.

28. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. 17. Part 1 (1837). Pp. 293–422.

29. Peacock G. A treatise on algebra. London. Cambridge: J. & J.J. Deighton. 1830. 726 p.

30. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. 1873. Oxford: Clarendon Press. 504 p.

31. Gibbs J.W., Wilson E.B. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by E.B. Wilson. 1901. New York: New York, C. Scribner's Sons. 470 p.

32. Александрова Н.В. *Формирование основных понятий векторного исчисления.* Историко-математические исследования. М.: Наука, 1982. 26. С. 205–235.

33. Г. Минковский. *Пространство и время*. УФН, 1959 г. Т. LXIX. Вып. 2. Октябрь. С. 303–314.

34. Ганкель Г. *Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона вместе с их геометрическим толкованием Д-ра Германа Ганкеля.* Перевод с немецкого студентов математического кружка при Императорском Казанском университете. Под редакцией и с добавлениями профессора Императорского Казанского университета Н.Н. Парфентьева. Казань: Типо-литография Императорского Университета, 1912. 16+245 с.

35. Синкевич Г.И. *История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII–XIX вв.* СПб: Издательство СПбГАСУ, 2016. 312 с.

36. Арнольд В.И. *Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов*. М.: Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 2002. 40 с.

References

1. Euler L. *Universal'naya arifmetika g. Leongarda Euler'a. Perevedennaya s nemeckogo podlinnika studentami Petrom Inohodcovym i Ivanom Yudinym.* Tom 1, soderzhashchij v sebe vse obrazy algebraicheskogo vychisleniya [The universal arithmetic of Mr. Leongard Euler. Translated from the German script by students Peter

Inohodtsov and Ivan Yudin. T. 1, containing in itself all the images of algebraic computation]. Saint Petersburg: Imp. academiae scientiarum Petropolitanae, 1768. 376 p.

2. Zeuthen H.G. *Istoriya matematiki v XVI i XVII vekah* [The history of mathematics in the XVI and XVII centuries]. Moskva-Leningrad: GTTI. 1933. 430 p.

3. Wallis J. A treatise of algebra, both historical and practical. London : printed by John Playford, 1685. 374+17+176+17 p. Separate pagination.

4. Cardani H. Artis magnae, sive de regulisalgebraicis, liber unus. Papiae: A.Osiandro. 1545. 82 p.

5. Niccolò Tartaglia. Quesiti et inventioni diverse, dialogo con interlocutori principali Francesco Maria della Rovere e Gabriele Tadino e argomenti diversi: aritmetica, geometria, algebra, statica, topografia, artiglieria, fortificazioni, tattica. 1546.

6. Bortolotti, E. La storia della matematica nella Università di Bologna by Ettore Bortolotti. Bologna: N. Zanichelli, 1947. 226 p.

7. Guter R., Polunov Yu. Girolamo Kardano [Girolamo Cardano]. M.: Znanie, 1980. 192 p.

8. Gindikin S.G. *Rasskazy o fizikah i matematikah (izdanie tret'e, rasshirennoe)* [Stories about physicists and mathematicians (third edition, extended)]. M.: MCNMO, NMU, 2001. 448 p.

9. Bombelli R. L'Algebra opera. Divisa in tre libri. Bologna: Nella stamperia do Guovanni Rossi. 1572.

10. Descartes R. *Geometriya* / Perevod, primechaniya i stat'ya A.P. Yushkevicha [Geometry. Translation, notes and article A.P. Yushkevich]. Moskva-Leningrad: GONTI. 1938. 296 p.

11. Leibniz G. Specimen novum analyseos pro scientia infini, circa Summas & Quadraturas. Acta eruditorum. 1702, May. Pp. 210–219.

12. Moivre Ab. Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, et superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicus quae vocantur Cardani resolution analytica. Philos. Trans. 1706/1707. Pp. 2368–2371.

13. Moivre Ab. De Sectione Anguli. Philisophical Transactions, 1722. 374. Vol. 32. Pp. 228–230.

14. Euler L. De integratione aequationum differentialium altiorum graduum. Miscellanea Berolinensis 1743. Vol. VII. Pp. 193–242.

15. Euler L. Cap.VIII. De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis. Introductio in analysin infinitorum. 1748. Vol. 1. P. 104.

16. Markushevich A.I. *Ocherki po istorii teorii analiticheskih funkcij* [Essays on the history of the theory of analytic functions]. Moskva-Leningrad: GITTL. 1951. 129 p.

17. Euler L. Opera omnia, series I. Opera mathematica, Leipzig-Berlin, 1921. Vol. 6.

18. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis. Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae10 (1792) 1797. Separate pagination. Mathematics. Pp. 3–19.

19. Euler L. De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrale licet. M.S. Academiae exbibit. Die 5 Maii 1777. Pp. 183–194. Euler L. Institutiones calculi integralis. Vol. 4. Petropoli: Impensis Academiae Imperialis Scientarum. 1794.

20. Euler L. Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis. Nova acta academiae scientiarum Petropolitanae. 10 (1792) 1797. Separate pagination: Mathematics. Pp. 3–19.

21. Wessel C. On the analytical Representation on Direction; an Attempt, applied Chiefly to the Solution of Plane and Spherical Polygons. Smith D.E. A source book in Mathematics. Vol. 3. 1959. New York: Dover publications. 701 p. Pp. 55–66.

22. Argand R. (1806). Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2e édition, Gauthier Villars, Paris (1874) BNF Pp. 1–60.

23. Argand J.R. Imaginary quantities; their geometrical interpretation. 1881. New York: D. Van Nostrand. 154 p.

24. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique. Analyse Algébrique. Paris: Éditions Jacques Gabay. 1821. 602 p.

25. Gauss K.F. Teoriya bikvadraticheskih vychetov, sochinenie vtoroe [The theory of biquadratic residues, second composition]. *Trudy po teorii chisel.* Perevod B.B. Dem'yanova, obshchaya redakciya I.M. Vinogradova, kommentarii B.N. Delone [Proceedings on number theory. Translation of B.B. Demyanova, the general edition of I.M. Vinogradova, comments B.N. Delone]. M.: Izd-vo AN SSSR. 1959. Pp. 694–754.

26. Grassman H. Der Ausdehnungslehre von 1844 oder Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. Leipzig: Verlag von Otto Wigand. 1878. 347 p.

27. Hamilton W.R. *Izbrannye trudy* / Pod red. L. S. Polaka [Selected works. Ed. L.S. Polak]. M.: Nauka. 1994. 560 p.

28. Hamilton W.R. Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. 17. Part 1 (1837). Pp. 293–422.

29. Peacock G. A treatise on algebra. London. Cambridge: J. & J.J. Deighton. 1830. 726 p.

30. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. 1873. Oxford: Clarendon Press. 504 p.

31. Gibbs J.W., Wilson E.B. Vector analysis: A text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by E.B. Wilson. 1901. New York: New York, C. Scribner's Sons. 470 p.

32. Aleksandrova N.V. *Formirovanie osnovnyh ponyatij vektornogo ischisleniya.* Istoriko-matematicheskie issledovaniya [Formation of the basic concepts of vector calculus. Historical and mathematical research]. M.: Nauka.1982. 26. Pp. 205–235.

33. Minkowski H. *Prostranstvo i vremya* [Space and time]. UFN, 1959. Vol. LXIX, vyp. 2, oktyabr'. Pp. 303–314.

34. Hankel H. *Teoriya kompleksnyh chislovyh sistem, preimushchestvenno obyknovennyh mnimyh chisel i kvaternionov Gamil'tona vmeste s ih geometricheskim*

tolkovaniem D-ra H. Hankel'a. Perevod s nemeckogo studentov matematicheskogo kruzhka pri Imperatorskom Kazanskom universitete. Pod redakciej i s dobavleniyami professora Imperatorskogo Kazanskogo universiteta N.N. Parfent'eva [The theory of complex numerical systems, mainly ordinary imaginary numbers and Hamilton quaternions, together with their geometric interpretation of Dr. Hermann Hankel. Translation from the German students of the mathematical circle at the Imperial Kazan University. Edited and with the additions of professor of the Imperial Kazan University, N.N. Parfentiev~~a~~]. Kazan': Tipo-litografiya Imperatorskogo Universiteta, 1912. 16+245 p.

35. Sinkevich G.I. ~~*Istoriya ponyatiya chisla i nepreryvnosti*~~ *v matematicheskom analize XVII–XIX vv.* [History of the concept of number and continuity in mathematical analysis of the XVII–XIX centuries]. SPb: Izdatel'stvo SPbGASU. 2016. 312 p.

36. Arnol'd V.I. *Geometriya kompleksnyh chisel, kvaternionov i spinov* [Geometry of complex numbers, quaternions, and spins]. M.: Izdatel'stvo Moskovskogo centra nepreryvnogo matematicheskogo obrazovaniya. 2002. 40 p.

Информация об авторе

Синкевич Галина Ивановна, канд. физико-математических наук, доцент кафедры математики
Санкт-Петербургский архитектурно-строительный университет
190005, С.-Петербург, Российская Федерация, 2-я Красноармейская, 4
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com

Information about author

Sinkevich Galina Ivanovna, Cand. of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor Department of Mathematics
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering
190005, St.-Petersburg, Russian Federation, 2-th Krasnoarmeyskaya, 4
E-mail: galina.sinkevich@gmail.com