Квантовые каналы: дилатации и виды сходимости

М.Е.Широков
Математический институт им В.А.Стеклова

$\mathcal{H}_A$ – сепарабельное гильбертово пр-во, ассоц. с системой A,

$\mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ – алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}_A$ с нормой

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$$

$\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ – банахово пространство ядерных операторов в пр-ве $\mathcal{H}_A$ с нормой $\|\rho\|_1 = \mathrm{Tr}\sqrt{\rho^*\rho}$ (класс Шаттена порядка 1)

$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ – множество квантовых состояний системы A – положительных операторов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ с единичным следом

Если квантовые системы A и B описываются пространствами $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$, то система AB описывается тензорным произведением $\mathcal{H}_{AB} \doteq \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\rho_{AB}$ и $\rho_B = \mathrm{Tr}_A\rho_{AB}$ – частичные состояния составного состояния $\rho_{AB} \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AB})$.

Квантовый канал в картине Шредингера – линейное вполне положительное отображение $\Phi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$, сохраняющее след: $\mathrm{Tr}\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}\rho$ для всех $\rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$

полная положительность: $\rho_{AR} \geq 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Phi \otimes \mathrm{Id}_R(\rho_{AR}) \geq 0$

Квантовый канал в картине Гейзенберга – линейное вполне положительное отображение $\Phi^* : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$, такое что $\Phi^*(I_B) = I_A$, – двойственное отображение к Φ:

$$\mathrm{Tr}\,\Phi(\rho)B = \mathrm{Tr}\,\Phi^*(B)\rho \quad \forall \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A), B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$$

Если $\Phi : A \to B$ и $\Psi : C \to D$, то $\Phi \otimes \Psi : AC \to BD$.

Дилатации квантовых каналов

Для любого квантового канала $\Phi : A \to B$ теорема Стайнспринга гарантирует существование пространства $\mathcal{H}_E$ и изометрии $V : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_E$, таких что

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A). \tag{1}$$

Из (1) следует, что найдутся системы D и E', такие что

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_{E'} U_\Phi \rho \otimes \sigma_0 U_\Phi^*, \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A), \tag{2}$$

где σ_0 - чистое состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$, а U_Φ – унитарный оператор из $\mathcal{H}_{AD}$ в $\mathcal{H}_{BE'}$. Если $A = B$, то $D = E' = E$ в (2).

[А.С.Холево *Квантовые системы, каналы, информация*, гл.6]

Основной вопрос: непрерывность отображений $\Phi \mapsto V_\Phi$ и $\Phi \mapsto U_\Phi$ относительно разных топологий

Равномерная сходимость квантовых каналов

Пусть $\mathfrak{L}(A,B)$ множество супероператоров $\Phi : \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A) \to \mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$, т.ч. $\Phi(\rho^*) = [\Phi(\rho)]^*$. Операторная норма:

$$\|\Phi\| = \sup_{\rho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A),\|\rho\|_1\leq 1} \|\Phi(\rho)\|_1 = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)} \|\Phi(\rho)\|_1, \quad \Phi \in \mathfrak{L}(A,B).$$

Проблема: $\|\Phi \otimes \mathrm{Id}_R\| \neq \|\Phi\|$

Норма полной ограниченности (the diamond norm) на $\mathfrak{L}(A,B)$

$$\|\Phi\|_\diamond = \sup_{\rho\in\mathfrak{T}(\mathcal{H}_{AR}),\|\rho\|_1\leq 1} \|\Phi \otimes \mathrm{Id}_R(\rho)\|_1 = \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR})} \|\Phi \otimes \mathrm{Id}_R(\rho)\|_1.$$

[D.Aharonov, A.Kitaev, N.Nisan// Proc. 30th STOC, pp. 20-30, ACM Press, 1998.]

Если $\Phi^* : \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_A)$ – дуальное отображение к суперо-
ператору Φ (определяемое соотношением $\mathrm{Tr}\Phi(\rho)A = \mathrm{Tr}\Phi^*(A)\rho$), то

$$\|\Phi\|_\diamond = \|\Phi^*\|_{\mathrm{cb}} = \sup_{A\in\mathfrak{B}(\mathcal{H}_{BR}),\|A\|\leq 1} \|\Phi^* \otimes \mathrm{Id}_R(A)\|.$$

[V.I.Paulsen *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*, Cambridge University Press, 2002.]

Величина $\|\Phi - \Psi\|_\diamond$ имеет смысл меры различимости квантовых каналов Φ и Ψ посредством квантовых измерений.

$$\text{вероятность различения } = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\|\Phi - \Psi\|_\diamond\right)$$

[M.M.Wilde *Quantum Information Theory*, Cambridge University Press, 2013, Ch.9]

Телескопический метод Леунг-Смита

Проблема: для данной характеристики F найти оценку вида

$$\left|F(\Phi^{\otimes n}(\rho)) - F(\Psi^{\otimes n}(\rho))\right| \leq C_n\|\Phi - \Psi\|_*, \quad \forall\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A^{\otimes n})$$

Введем состояния $\sigma_k = \Phi^{\otimes k} \otimes \Psi^{\otimes(n-k)}(\rho)$, $k = 0, 1, ..., n$. Тогда

$$\left|F(\Phi^{\otimes n}(\rho)) - F(\Psi^{\otimes n}(\rho))\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|F(\sigma_k) - F(\sigma_{k-1})\right|.$$

$$\|\sigma_k - \sigma_{k-1}\|_1 = \|(\Phi - \Psi) \otimes \mathrm{Id}_R(\omega)\|_1 \leq \|\Phi - \Psi\|_\diamond,$$

где $\quad \omega = \Phi^{\otimes(k-1)} \otimes \mathrm{Id}_{A_k} \otimes \Psi^{\otimes(n-k)}(\rho), \quad R = A^n \setminus A_k$

[D.Leung, G.Smith// Commun. Math. Phys., V.292, 201-215 (2009).]

Топология (сходимость), порождаемая нормой полной ограниченности на множестве бесконечномерных квантовых каналов, является слишком сильной для описания физических возмущений таких каналов.

Пример 1. Пусть Φ - канал из A в B, $\{P_n\}$ – последовательность проекторов в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$, сильно сходящаяся к I_B, и

$$\Phi_n(\rho) = P_n\Phi(\rho)P_n + [\mathrm{Tr}(I_B - P_n)\Phi(\rho)]\sigma \quad \forall n,$$

где σ - заданное состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Тогда $\|\Phi_n - \Phi\|_\diamond \nrightarrow 0$.

Пример 2. (A.Winter) Квантовый аттенюатор

$$\Phi_k(|\eta\rangle\langle\eta|) = |k\eta\rangle\langle k\eta|, \quad k \in (0,1),$$

где $|\eta\rangle$ – когерентные состояния квантового осциллятора.

$$\|\Phi_k - \Phi_{k'}\|_\diamond = 2 \text{ для всех } k \neq k'!$$

Сильная сходимость квантовых каналов

Топология сильной сходимости на множестве $\mathfrak{F}(A,B)$ квантовых каналов из A в B порождается семейством полунорм $\Phi \mapsto \|\Phi(\rho)\|_1$, $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$. Сходимость последовательности $\{\Phi_n\}$ каналов к каналу Φ_0 в данной топологии означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(\rho) = \Phi_0(\rho) \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A). \tag{3}$$

Из сепарабельности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ следует, что топология сильной сходимости на $\mathfrak{F}(A,B)$ метризуема.

$$(3) \quad \Leftrightarrow \quad w.o.\text{-}\lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(B) = \Phi_0^*(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$$

Проблема: как доказывать непрерывность пропускных способностей квантовых каналов относительно сильной сходимости?

Нормы полной ограниченности с энергетическим ограничением

Пусть H – положительный оператор в $\mathcal{H}_A$ с плотной областью определения. На $\mathfrak{L}(A,B)$ рассмотрим семейство норм

$$\|\Phi\|_{\diamond}^{E} \doteq \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_{AR}),\,\mathrm{Tr} H\rho_A\leq E} \|\Phi\otimes \mathrm{Id}_R(\rho)\|_1, \qquad E>E_0=\inf \mathrm{sp} H.$$

- функция $E\mapsto \|\Phi\|_{\diamond}^{E}$ вогнута на $[E_0,+\infty)$;
- $\|\Phi\|_{\diamond}^{E}\to\|\Phi\|_{\diamond}$ при $E\to+\infty$;
- $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Phi_n-\Phi_0\|_{\diamond}^{E}=0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(\rho)=\Phi_0(\rho)\;\;\forall\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$.

[M.E.Shirokov//arXiv:1706.00361, A.Winter//arXiv:1712.10267]

Если H имеет дискретный спектр $\{E_k\}_{k\geq 0}$ конечной кратности, такой что $E_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, и $E > E_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Phi_0\|_\diamond^E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \Phi_n(\rho) = \Phi_0(\rho) \quad \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A).$$

т.е. топология на множестве $\mathfrak{F}(A, B)$, порожденная любой из норм $\|\cdot\|_\diamond^E$, совпадает с топологией сильной сходимости.

С помощью нормы $\|\cdot\|_\diamond^E$ и метода Леунг-Смита доказана равномерная непрерывность основных пропускных способностей бесконечномерных квантовых каналов с энергетическим ограничении на входе на множестве всех каналов с ограниченным коэффициентов усиления энергии относительно топологии сильной сходимости. Получены явные оценки модуля непрерывности.

Теорема Кречмана-Шлингемана-Вернера

Для заданных каналов Φ и Ψ из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}\|\Phi-\Psi\|_\diamond \le \inf \|V_\Phi - V_\Psi\| \le \sqrt{\|\Phi-\Psi\|_\diamond}$$

где inf берется по всем представлениям Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^* \quad \text{и} \quad \Psi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Psi \rho V_\Psi^*.$$

Вывод: непрерывность $\Phi \mapsto V_\Phi$ относительно норм $\|\cdot\|_\diamond$ и $\|\cdot\|$.

[D.Kretschmann, D.Schlingemann, R.F.Werner // J. Funct. Anal. 255 (2008), N8, 1889-1904]

Операторные E-нормы

Пусть H – положительный оператор в $\mathcal{H}$ с плотной областью определения. На $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ рассмотрим семейство норм

$$\|A\|_E \doteq \sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}),\mathrm{Tr}H\rho\leq E}\sqrt{\mathrm{Tr}A\rho A^*},\qquad E > E_0 = \inf\mathrm{sp}H.$$

- функция $E \mapsto \|A\|_E$ вогнута на $[E_0, +\infty)$;
- $\|A\|_E \to \|A\|$ при $E \to +\infty$;
- $\|AB\|_E \leq \|A\|\|B\|_E$ для всех $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$;
- $\sup_{\rho\in\mathfrak{S}(\mathcal{H}),\mathrm{Tr}H\rho\leq E}|\mathrm{Tr}A\rho B^*| \leq \|A\|_E\|B\|_E$ для всех $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$;
- $\|A\varphi\| \leq K_\varphi\|A\|_E$ для любого вектора φ из $\mathcal{H}$, такого что $E_\varphi \doteq \langle\varphi|H|\varphi\rangle < +\infty$, где $K_\varphi = \max\left\{1, \sqrt{(E_\varphi - E_0)/(E - E_0)}\right\}$.

Если H имеет дискретный спектр $\{E_k\}_{k\geq 0}$ конечной кратности, такой что $E_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, и $E > E_0$, то топология на множестве $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, порожденная любой из норм $\|\cdot\|_E$, совпадает с сильной операторной топологией на ограниченных подмножествах $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

E-версия теоремы Кречмана-Шлингемана-Вернера: для заданых каналов Φ и Ψ из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_A)$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_B)$ имеет место нер-во

$$\frac{1}{2}\|\Phi - \Psi\|_\diamond^E \leq \inf \|V_\Phi - V_\Psi\|_E \leq \sqrt{\|\Phi - \Psi\|_\diamond^E}$$

где inf берется по всем представлениям Стайнспринга

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Phi \rho V_\Phi^* \quad \text{и} \quad \Psi(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_\Psi \rho V_\Psi^*.$$

Вывод: непрерывность $\Phi \mapsto V_\Phi$ отн-но норм $\|\cdot\|_\diamond^E$ и $\|\cdot\|_E$.

[M.E.Shirokov//arXiv:1712.03219]

Характеризация сильной сходимости

Пусть H – положительный неограниченный оператор с дискретным спектром конечной кратности и $E > E_0$.

A) Если последовательность изометрий $V_n : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{BE}$ сильно сходится к изометрии $V_0 : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{BE}$, то последовательность каналов $\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_n \rho V_n^*$ сильно сходится к каналу $\Phi_0(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_0 \rho V_0^*$ и $\frac{1}{2}\|\Phi_n - \Phi_0\|_\diamond^E \leq \|V_n - V_0\|_E$ для всех n.

B) Если последовательность каналов $\Phi_n : A \to B$ сильно сходится к каналу $\Phi_0 : A \to B$, то существует сепарабельное г.п. $\mathcal{H}_E$ и последовательность изометрий $V_n : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{BE}$, сильно сходящаяся к изометрии $V_0 : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{BE}$, такая что $\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_n \rho V_n^*$ для всех $n \geq 0$ и $\|V_n - V_0\|_E \leq \sqrt{\|\Phi_n - \Phi_0\|_\diamond^E}$.

О разрывности унитарной дилатации

Для любого канала $\Phi : A \to B$ найдутся системы D и E', такие что

$$\Phi(\rho) = \mathrm{Tr}_{E'}\widehat{\Phi}(\rho \otimes \sigma_0), \quad \rho \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_A), \quad \widehat{\Phi}(\omega) = U\omega U^*, \qquad (4)$$

где σ_0 - состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$, а U – унитарный оператор из $\mathcal{H}_{AD}$ в $\mathcal{H}_{BE'}$. Вопрос: если $\Phi_n \xrightarrow{s} \Phi_0$, то $\exists\, \widehat{\Phi}_n \xrightarrow{s} \widehat{\Phi}_0$?

Предложение. Пусть $\{U_n\}$ – последовательность унитарных операторов из $\mathcal{H}_{AD}$ в $\mathcal{H}_{BE}$, сильно сходящаяся к унитарному оператору U_0, $\{\sigma_n\}$ – последовательность из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$, сходящаяся к состоянию σ_0, и $\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E U_n \rho \otimes \sigma_n U_n^*$. Тогда

$$s.o.\text{-}\lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(B) = \Phi_0^*(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B).$$

Пример. Пусть $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B$ – с.г.п. и $\mathcal{H}_0$ - бесконечномерное подпространство в $\mathcal{H}_A$. Пусть $\{\tau_i\}$ - базис в $\mathcal{H}_0$ и ψ – единичный вектор в $\mathcal{H}_0^{\perp}$. При каждом n оператор

$$V_n = \sum_{i \neq n} |\tau_i\rangle\langle\tau_i| + |\psi\rangle\langle\tau_n|$$

является частичной изометрией и $V_n^* V_n = P_0$ – проектор на $\mathcal{H}_0$. Поскольку $V_n \xrightarrow{s.o.} P_0$, то

$$\Phi_n(\rho) = V_n \rho V_n^* + \bar{P}_0 \rho \bar{P}_0 \quad \to \quad \Phi_0(\rho) = P_0 \rho P_0 + \bar{P}_0 \rho \bar{P}_0,$$

где $\bar{P}_0 = I - P_0$. Последовательность $\Phi_n^*(|\psi\rangle\langle\tau_1|)$ не сходится к $\Phi_0^*(|\psi\rangle\langle\tau_1|) = 0$ в сильной операторной топологии.

Следствие. Существуют сильно сходящиеся последовательности каналов, которые не представимы в виде редукции сильно сходящихся последовательностей унитарных каналов.

О непрерывности унитарной дилатации относительно равномерных сходимостей

Следствие теоремы Кречмана-Шлингемана-Вернера. Для любой последовательности $\{\Phi_n\}$ квантовых каналов из A в B, равномерно сходящейся к каналу Φ_0, существует последовательность $\{U_n\}$ унитарных операторов из $\mathcal{H}_{AD}$ в $\mathcal{H}_{BE}$, сходящаяся по норме к унитарному оператору U_0, и чистое состояние σ_0 в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$, такие что

$$\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E U_n \rho \otimes \sigma_0 U_n^* \quad \text{для всех} \quad n \geq 0.$$

Теорема. Пусть $\{\Phi_n\}_{n\geq 0}$ – последовательность квантовых каналов из A в B. Свойства (i) - (iii) равносильны:

(i) существуют последовательности унитарных операторов U_n из $\mathcal{H}_{AD}$ в $\mathcal{H}_{BE}$ и состояний σ_n из $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_D)$, такие что

$$\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E U_n\, \rho \otimes \sigma_n\, U_n^* \quad \forall n \geq 0, \qquad U_n \xrightarrow{s.o.} U_0 \quad \text{и} \quad \sigma_n \to \sigma_0$$

(ii) существует последовательность изометрий V_n из $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_{BE}$, такая что

$$\Phi_n(\rho) = \mathrm{Tr}_E V_n \rho V_n^* \quad \forall n \geq 0, \qquad V_n \xrightarrow{s.o.} V_0 \quad \text{и} \quad V_n^* \xrightarrow{s.o.} V_0^*;$$

(iii) $\Phi_n^*(B) \xrightarrow{s.o.} \Phi_0^*(B)$ для всех $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$.

Если (i) -(iii) выполнены, то в (i) можно взять $\sigma_n = \sigma_0$ $\forall n$.

Сильная* сходимость квантовых каналов

Определение. Последовательность Φ_n сильно* сходится к каналу Φ_0, если выполнены свойства (i)-(iii), в частности, если

$$s.o.\text{-}\lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(B) = \Phi_0^*(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$$

Сильная сходимость последовательности Φ_n к каналу Φ_0 означает

$$w.o.\text{-}\lim_{n\to\infty} \Phi_n^*(B) = \Phi_0^*(B) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$$

Пример. Пусть Φ - канал из A в B, $\{P_n\}$ – последовательность проекторов в $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$, сильно сходящаяся к I_B, и

$$\Phi_n(\rho) = P_n\Phi(\rho)P_n + [\mathrm{Tr}(I_B - P_n)\Phi(\rho)]\sigma \quad \forall n,$$

где σ - заданное состояние в $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_B)$. Тогда Φ_n сильно* сходится к каналу Φ.

Следствие 1. Если последовательности Φ_n и Ψ_n сильно* сходятся к каналам Φ_0 и Ψ_0, то последовательности $\Phi_n \otimes \Psi_n$, $\Phi_n \circ \Psi_n$ и $p\Phi_n + (1-p)\Psi_n$, $p \in (0,1)$, сильно* сходятся, соответственно, к каналам $\Phi_0 \otimes \Psi_0$, $\Phi_0 \circ \Psi_0$ и $p\Phi_0 + (1-p)\Psi_0$.

Следствие 2. Для бозонных гауссовских каналов сильная* сходимость равносильна сильной сходимости.

[M.E.Shirokov//arXiv:1802.05632]

О представлении сходящихся последовательностей

Представление Стайнспринга канала Φ_0 означает, что

$$\Phi_0(\rho) = \Theta(V_0\,\rho V_0^*), \quad \text{где} \quad \Theta(\rho) = \mathrm{Tr}_E\,\rho,$$

а V_0 – изометрическое вложение $\mathcal{H}_A$ в $\mathcal{H}_{BE}$. Пусть $\{W_n\}$ – последовательность частичных изометрий в $\mathcal{H}_{BE}$, таких что $W_n^* W_n = P_0$ для всех n, где P_0 – проектор на $V_0\mathcal{H}_A$. Пусть

$$\Phi_n(\rho) = \Theta(W_n V_0\,\rho V_0^* W_n^*), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_A), \tag{5}$$

канал из A в B для всех n. Тогда

- если $W_n \to P_0$ по норме, то $\Phi_n \to \Phi_0$ равномерно;
- если $W_n \to P_0$ сильно, то $\Phi_n \to \Phi_0$ сильно;
- если $W_n \to P_0$ сильно*, то $\Phi_n \to \Phi_0$ сильно*.

Предложение. Любая последовательность $\{\Phi_n\}$ каналов из A в B, сходящаяся к каналу Φ_0 равномерно (соответственно, сильно, сильно*) может быть представлена в виде (5) при некоторых изометрическом вложении $V_0 : \mathcal{H}_A \to \mathcal{H}_{BE}$ и последовательности $\{W_n\}$ частичных изометрий, сходящейся к проектору P_0 по норме (соответственно, сильно, сильно*).

Следствие. Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{H}_A)$ – множество квантовых ансамблей – вероятностных мер на $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_A)$ с топологией слабой сходимости. Для доказательства непрерывности (полунепрерывности снизу, ...) функции

$$(\Phi, \mu) \mapsto F(\Phi, \mu)$$

на $\mathfrak{F}(A, B) \times \mathcal{P}(\mathcal{H}_A)$ достаточно показать непрерывность (полунепрерывность снизу, ...) функции $\mu \mapsto F(\Theta, \mu)$ на $\mathcal{P}(\mathcal{H}_{BE})$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!