

Relativistic singular vortex and implicit differential equations

Alexander P. Chupakhin Arseny A. Yanchenko

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics

Novosibirsk State University

An exact solution of the Euler equations governing the flow of a compressible fluid in relativistic hydrodynamics is found and studied. It is a relativistic analogue of the Ovsyannikov vortex (special vortex) investigated earlier for classical gas dynamics. Solutions are partially invariant of Defect 1 and Rank 2 with respect to the rotation group. A theorem on the representation of the factor-system in the form of a union of a non-invariant subsystem for the function determining the deviation of the velocity vector from the meridian, and invariant subsystem for determination of thermodynamic parameters, the Lorentz factor and the radial velocity component is proved. Compatibility conditions for the overdetermined non-invariant subsystem are obtained. A stationary solution of this type is studied in detail. It is proved that its invariant subsystem reduces to an implicit differential equation. For this equation, the manifold of branching of solutions is investigated, and a set of singular points is found. A physical interpretation of the solutions is given.

Уравнения релятивистской гидродинамики (газовой динамики) сжимаемой жидкости имеют вид

$$\begin{aligned}(\Gamma \rho)_t + \nabla \cdot (\Gamma \rho \vec{u}) &= 0, \\(\Gamma^2 \rho w \vec{u})_t + \nabla \cdot (\Gamma^2 \rho w \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p &= 0, \\(\Gamma^2 \rho w - p)_t + \nabla \cdot (\Gamma^2 \rho w \vec{u}) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

В (1) вектор $\vec{u}$ — скорость газа в лабораторной системе отсчета, ρ, p — плотность и давление, $w = 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p/\rho$ — энтальпия, $\Gamma = (1 - |\vec{u}|^2)^{-1/2}$ — фактор Лоренца являются функциями независимых переменных — времени t и пространственных координат $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$.
Выбрана система единиц в которой скорость света $c = 1$, так что для скорости имеем неравенство $|\vec{u}| < 1$.

Уравнения (1) записаны в виде законов сохранения, что удобно для численного моделирования. Для анализа симметричных свойств и построения точного решения “особый вихрь” более удобна другая форма уравнений (1):

Лемма

Уравнения Эйлера релятивистской гидродинамики сжимаемой жидкости могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} bD\vec{u} + p_t\vec{u} + \nabla p &= 0, \\ Da + a\operatorname{div}\vec{u} &= 0, \\ aDd &= p_t. \end{aligned} \tag{2}$$

В (2) $a = \Gamma\rho$, $b = \Gamma^2\rho w$, $d = b/a = \Gamma w$,
 $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ — полная производная.

Особый вихрь

Определение

Особым вихрем (вихрем Овсянникова) называется решение дифференциальных уравнений, которое является частично инвариантным относительно группы вращений $SO(3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x}) \times \mathbb{R}^3(\vec{u})$.

В этом представлении группа $SO(3)$ имеет инварианты $r = |\vec{x}|^{1/2}$, $|\vec{u}|$ и $\vec{x} \cdot \vec{u}$. Поскольку инвариантов, зависящих от трех компонент скорости (u^1, u^2, u^3) только два, то в этом случае можно построить частично инвариантное решение.

Инвариантными независимыми переменными являются время t и радиус-вектор r .

Особый вихрь

Выбор не инвариантной функции менее очевиден.

Л. В. Овсянников предложил в качестве этой функции угол $\omega = \omega(t, r, \theta, \varphi)$ измеряющий отклонение вектора скорости $\vec{u}$ от меридиана сферы $r = \text{const}$.

Введем сферические координаты (r, θ, ϕ) и (U, V, W) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

так что $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

U, V, W — радиальная, широтная и долготная компоненты скорости.

Особый вихрь

Введем новые координаты для скоростей, в плоскости касательной к сфере $r = \text{const}$, полярные координаты для касательной компоненты $\vec{u}_\tau = (V, W)$ вектора скорости:

$$V = H \cos \omega, \quad W = H \sin \omega, \quad (3)$$

так что $H = \sqrt{V^2 + W^2}$, $\omega = \arctan W/V$.

Определение

Особый вихрь — это решение уравнений (2), в котором реализуется специальная зависимость функций от независимых переменных, а именно

$$\begin{aligned} U &= U(r, t), \quad \Gamma = \Gamma(r, t), \quad H = H(r, t), \\ p &= p(r, t), \quad \rho = \rho(r, t), \quad w = w(r, t), \\ \omega &= \omega(t, r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Особый вихрь

Согласно общей теории группового анализа дифференциальных уравнений следует, что после подстановки представления (4) в (2) получается композиция фактор-системы в виде объединения переопределенной системы дифференциальных уравнений для функции ω и системы уравнений для инвариантных функций U, Γ, H, p, ρ, w .

Лемма (2)

Уравнения особого вихря для релятивистской гидродинамики представляются в виде объединения инвариантной подсистемы

$$\begin{aligned} ad(D_0 U - \frac{1}{r} H^2) + p_t U + p_r &= 0, \\ D_0 H + \frac{U}{r} H + p_t H &= 0, \\ a D_0 d &= p_t, \end{aligned} \quad (5)$$

где $D_0 = \partial_t + U \partial_r$ — инвариантная часть полной производной, и переопределенной подсистемы для функции ω :

$$\begin{aligned} k \sin \theta D_0 \omega + \sin \theta \cos \omega \omega_\theta + \sin \omega \omega_\varphi + \cos \theta \sin \omega &= 0, \\ \sin \theta \sin \omega \omega_\theta - \cos \omega \omega_\varphi &= h \sin \theta + \cos \theta \cos \omega, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$k = r/H, \quad h = k(a^{-1} D_0 a + r^{-2} (r^2 U)_r). \quad (7)$$

Особый вихрь

Замечательно то, что (6) и (7) в точности совпадает с соответствующими уравнениями для классической газовой динамики. При этом функция h другая, она связана с другими физическими величинами. Этот факт подчеркивает исключительно удачный выбор переменных, сделанный Л. В. Овсянниковым. Следствием этого факта является

Лемма (условие совместности Овсянникова)

Условие совместности переопределенной системы (6) имеет вид

$$kD_0h = h^2 + 1. \quad (8)$$

Уравнение (8) дополняет инвариантную систему (5). Таким образом на особый вихрь для релятивистской газовой динамики переносятся все математические результаты, доказанные для особого вихря в классической газовой динамике.

Интегрирование переопределенной системы (Овсянников)

$$L(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

где L - гладкая произвольная функция своих аргументов

$$D_0 \xi = 0, \quad k D_0 \tau = 1, \quad h = \operatorname{tg} \tau,$$

$$\eta = \cos \tau \sin \theta \cos \omega - \sin \tau \cos \theta,$$

$$\sqrt{1 - \eta^2} \sin(\zeta + \phi) = \cos \tau \cos \theta \cos \omega + \sin \tau \sin \theta.$$

Сложная зависимость для $\omega = \omega(t, r, \theta, \phi)$ определяемая неявно.

Стационарный особый вихрь для релятивистской газовой динамики

Рассмотрим стационарный особый вихрь, т.е. решения частично инвариантные относительно группы $\langle \partial_t, SO(3) \rangle$. В представлении (4) и в уравнениях Леммы 2 необходимо исключить зависимость от времени, тогда $D_0 = U \frac{d}{dr}$. В дальнейшем рассмотрим случай одноатомного газа $\gamma = 5/3$, интересного для приложений.

Уравнения (5) частично интегрируются и имеет место следующая лемма

Стационарный особый вихрь для релятивистской газовой динамики

Лемма

Для стационарного особого вихря в релятивистской газовой динамике инвариантная подсистема (5) сводится к обыкновенному неявному дифференциальному уравнению

$$F(R, h, p; m_0, s_0) \equiv q^{3/2} - R^2 p \left(3m_0 + s_0 \frac{p^2}{1 + h^2} \right) q + \quad (9) \\ + 3m_0^2 R^4 p^2 q^{1/2} - m_0^3 R^6 p^3 = 0,$$

где $p = dh/dR$; $0 < s_0$, $0 < m_0 < 1$ — постоянные, характеризующие физику задачи, $R > 1$ — нормированное расстояние, $q = q(R, h, p)$ имеет вид

$$q(R, h, p) = R^2(R^2 - 1)p^2 - (1 + h^2)^2. \quad (10)$$

Лемма (продолжение)

Инвариантные функции имеют следующее представление через функцию h и ее производную h_R :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1 + h^2}{R^2 h_R}, \quad a = \frac{\varkappa_0}{a_0} \frac{h_R}{\sqrt{1 + h^2}}, \\ \Gamma &= \left[1 - \frac{1}{R^2} \left(1 + \left(\frac{1 + h^2}{R h_R} \right)^2 \right) \right]^{-1/2}, \\ d &= d_0, \quad H = \frac{1}{R}, \quad w = d_0 / \Gamma, \end{aligned} \quad (11)$$

где a_0 , $\varkappa_0$, d_0 — постоянные.

Таким образом, отыскание особого вихря для релятивистской газовой динамики сводится к решению уравнения (9) и переопределенной системы (6).

Исследование особых точек уравнения (9)

Неявное уравнение (9) может быть разрешено относительно производной p во всех точках $\mathbb{R}^3(R, h, p)$, кроме точек многообразия

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0. \quad (12)$$

Кривая (12) называется кривинантой уравнения (9), она является многообразием ветвления интегральных кривых. Эта кривая состоит из особых точек уравнения (9), называемых регулярными особыми точками. Кроме того, для уравнения общего положения (9) на этой кривой могут встречаться изолированные нерегулярные особые точки двух типов:

- собранные особые точки
- сложенные особые точки

Исследование особых точек

Сложенные особые точки находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} F(R, h, p) &= 0, & F_p(R, h, p) &= 0, \\ F_R(R, h, p) + pF_h(R, h, p) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Собранные особые точки находятся из системы уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0, \quad F_{pp}(R, h, p) = 0. \quad (14)$$

Определение

Проекция кривинантной кривой на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ называется дискриминантной кривой.

Поднятие уравнения до векторного поля

Суть геометрического подхода к исследованию неявных уравнений, предложенного Пуанкаре, состоит в поднятии неявного уравнения $F = 0$ до векторного поля

$$R_\tau = F_p, \quad h_\tau = pF_p, \quad p_\tau = -(F_R + pF_h), \quad (15)$$

в пространстве (R, h, p) , где τ — новый параметр вдоль интегральной кривой. При такой трактовке интегральные кривые уравнения (9) расположены на различных листах поверхности $F = 0$, которые могут проектироваться на плоскость $\mathbb{R}^2(h, R)$ с наложением друг на друга. При этом решение определено на интервале для которого интегральная кривая не доходит до дискриминантной кривой.

Поднятие уравнения до векторного поля

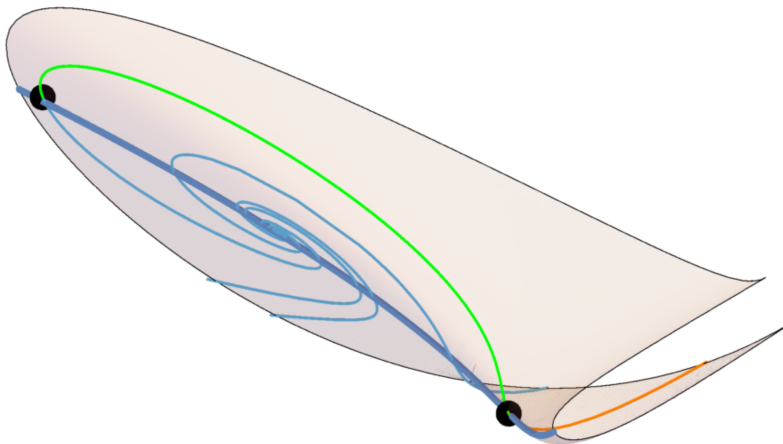


Рис. 1: Поверхность $F = 0$ и интегральные кривые системы уравнений (15).

Символьные и численные вычисления

Исследование особых точек уравнения (9) связано с большими вычислительными трудностями. Решение систем уравнений (13) и (14), определяемое результатами соответствующих многочленов, может быть получено при помощи систем символьных и численных вычислений.

Даже при использовании таких систем время расчета является большим (до сотен часов на Intel Core i7-4770 CPU @ 3.40 GHz, 32.0 GB RAM).

В дальнейшем все утверждения обоснованы при помощи символьных и численных вычислений.

Дискриминантная кривая

Дискриминантная кривая определяется следующей системой уравнений

$$F(R, h, p) = 0, \quad F_p(R, h, p) = 0. \quad (16)$$

Для решения этой и подобных систем мы используем следующую технику. Поскольку уравнения системы (16) являются полиномами по p , можно исключить p с помощью построения результата этих двух полиномов. Пусть

$$R_{12}(R, h) = \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_2). \quad (17)$$

Далее, на (R, h) -плоскости, алгебраическое уравнение $R_{12}(R, h) = 0$ численно решается относительно h .

Здесь и далее мы работаем с F^2 , т.е. $F := F^2$.

Дискриминантная кривая

Таким образом, для заданных m_0 , s_0 и R , можно вычислить дискриминантную кривую. В результате численных расчетов получено следующее утверждение

Утверждение (о дискриминантной кривой)

Дискриминантная кривая состоит из одной или двух компонент

Дискриминантная кривая всегда имеет “основную” компоненту, но для достаточно малых s_0 ($s_0 \approx 10^{-2}$ и меньше) возникает “дополнительная” компонента (Рис. 2).

Компоненты дискриминантной кривой

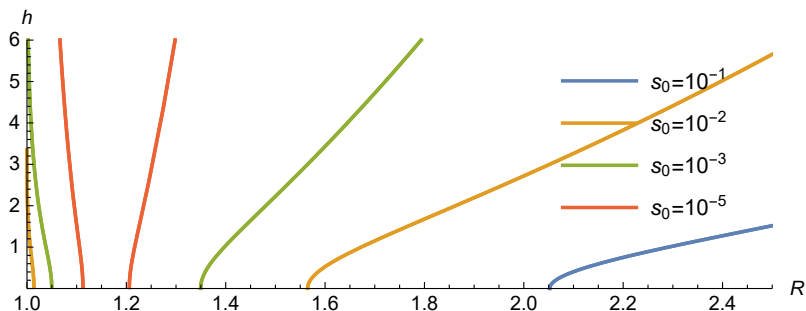


Рис. 2: Дискриминантная кривая для фиксированного $m_0 = 0.5$ и $s_0 = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}$.

Сложенные особые точки

Сложенные особые точки находятся из системы уравнений (13). Для решения этой системы применяется та же техника, что и для нахождения дискриминантной кривой (16). Обозначим $\Phi_1 = F$, $\Phi_2 = F_p$, $\Phi_3 = F_R + pF_h$.

Тогда для решения системы необходимо вычислить следующие результаты

$$\begin{aligned} R_{12}(R, h) &= \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_2), \\ R_{13}(R, h) &= \text{Resultant}(\Phi_1, \Phi_3). \end{aligned} \tag{18}$$

Пересечение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$ дает множество сложенных особых точек. После упрощения полином R_{12} имеет степень 60 по R и 180 по h , полином R_{13} — 64 по R и 170 по h .

Сложенные особые точки

В результате численных расчетов получен следующий результат

Утверждение (о существовании и единственности сложной особой точки)

Для любых значений параметров s_0 и m_0 существует единственная особая точка.

На Рис. 3 изображено стандартное взаиморасположение кривых $R_{12} = 0$ и $R_{13} = 0$.

Сложенные особые точки

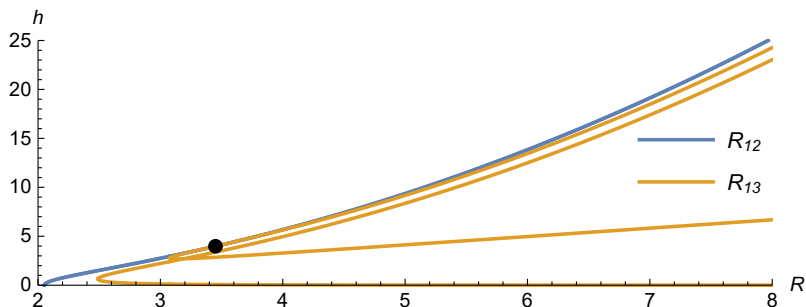


Рис. 3: Сложенная особая точка для $m_0 = 0.5$ и $s_0 = 0.1$.

Для нахождения $R_{12}(R, h)$ необходимо вычислить определитель порядка 19 ($11! = 39.916.800$ ненулевых слагаемых), для нахождения $R_{13}(R, h)$ — определитель порядка 20 ($15! = 1.307.674.368.000$ ненулевых слагаемых).

Интегральные кривые

Утверждение (о типе сложной особой точки)

Для любых параметров $s_0 > 0$ и $0 < m_0 < 1$ сложная особая точка является сложным фокусом.

Интегральные кривые

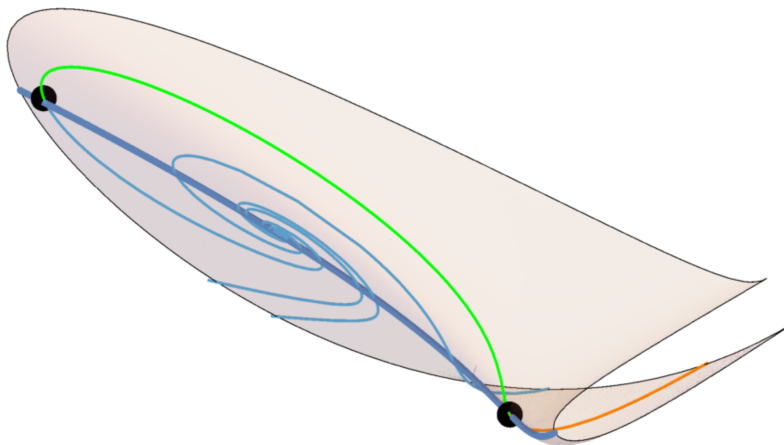


Рис. 4: Поведение интегральных кривых вблизи сложной особой точки, две ветви решения; $m_0 = 0.5$, $s_0 = 1$.

Интегральные кривые

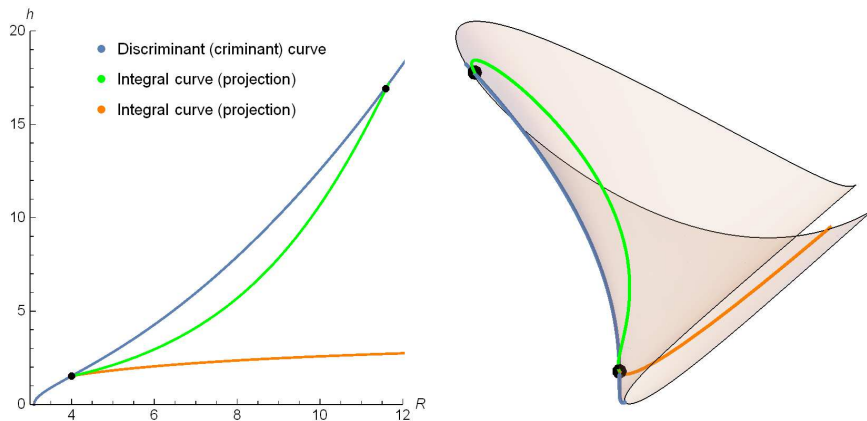


Рис. 5: Две ветви решения; $m_0 = 0.5$, $s_0 = 1$.

Изменение U вдоль интегральной кривой

Изменение U вдоль интегральной кривой

Изменение H вдоль интегральной кривой

Изменение H вдоль интегральной кривой

Изменение Γ вдоль интегральной кривой

Изменение Γ вдоль интегральной кривой

Изменение w вдоль интегральной кривой

Изменение w вдоль интегральной кривой

Изменение плотности вдоль интегральной кривой

Изменение плотности вдоль интегральной кривой

Изменение давления вдоль интегральной кривой

Изменение давления вдоль интегральной кривой

Литература



Landau L D, Lifshitz E M 1959 *Fluid Mechanics, Course in theoretical physics Vol. 6* (Pergamon press)



LeFloch P G, Ukai S A 2008 *ArXiv*



Godunov S K 2012 *J. Comput. Math. Math. Phys.* 52 5 916-929



Gourgoulhon E 2006 An introduction to relativistic hydrodynamics, Stellar Fluid Dynamics and Numerical Simulations *EAS Publ. Ser.* 21 43-79



Ovsyannikov L V 1995 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 36 3 45-52



Ovsyannikov L V 1982 *Group analysis of Differential Equations* (New York: Academic Press)



Borshch M S, Zhdanov V I 2007 *SIGMA* 3 116



Alexa C, Vrinceanu D 1996 *ArXiv*



Perucho M, Marti J M, Hanasz M 2005 *ArXiv*



Cherevko A A, Chupakhin A P 2005 *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS Preprint* N 1



Golovin S V 2005 *J. Phys. A Math. Gen* 38 4501-4516



Arnold V I 2006 Ordinary differential equations *Universitext, Springer-Verlag Berlin Heidelberg*



Remizov A O 2006 *Contemp. Math. Fundam. Direct.* 19 131-170



Davydov A A 1985 *Funct. Anal. Appl.* 19 2 1-10

Спасибо за внимание!