

Асимптотический анализ процессов гауссовского хаоса

Жданов Александр Иванович

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра теории вероятностей

Научный руководитель: д. ф.-м. н., проф. Питербург В.И.

г. Москва, 21 марта 2018

Содержание

- ▶ Общая постановка задачи
- ▶ Введение
 - ▶ Мотивация работы
 - ▶ Основные методы
 - ▶ Теорема Пикандса
 - ▶ Гауссовский хаос
- ▶ Глава 1. Произведение двух гауссовских стационарных центрированных процессов
- ▶ Глава 2. Квадратичная форма от гауссовского стационарного центрированного векторного процесса
- ▶ Глава 3. Общий случай гауссовского хаоса для стационарного центрированного векторного процесса

Общая постановка задачи

Рассмотрим $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_d(t))^T$, $d \geq 2$, $t \in \mathbb{R}_+$ - гауссовский стационарный центрированный векторный процесс с п.н. непрерывными траекториями.

Пусть $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ - однородная функция положительного порядка $\beta > 0$, то есть для всех $a > 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ верно $g(a\mathbf{x}) = a^\beta g(\mathbf{x})$. Предположим, что функция $g(\cdot)$ является $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)|\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измеримой.

Процессом гауссовского хаоса назовем случайный процесс $g(\xi(t))$. В настоящей работе изучается поведение вероятности

$$P_\xi(u, p) := \mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right), \quad p > 0,$$

для больших u , то есть, $u \rightarrow \infty$.

Введение: мотивация работы

До начала исследований вид функций g , для которых была решена поставленная задача, был весьма ограничен:

- ▶ J. Pickands III [1]: линейная функция;
- ▶ В. И. Питербарг [2], [3] и В. И. Питербарг, С. Стаматович [4]: процессы типа хи-квадрат (g – положительно-определенная квадратичная форма).

Параллельно с процессом исследования были получены следующие результаты:

- ▶ P. Albin, E. Hashorva, Lanpeng Ji, Chengxiu Ling [5]: разность двух независимых хи-квадрат процессов;
- ▶ В. И. Питербарг [6]: общий случай гауссовского хаоса в условии независимости компонент.

Введение: основные методы

Базовым методом исследования является *метод двойных сумм*, предложенный Джеймсом Пикандсом в [1] и впоследствии развитый В.И. Питербаргом в [8], [9].

Кроме этого в процессе доказательства используются следующие методы:

- ▶ метод оценки интегралов типа Лапласа;
- ▶ дискретная аппроксимация случайных процессов.

Введение: теорема Пикандса

Пусть $\xi(t)$ — гауссовский стационарный центрированный п.н. непрерывный процесс, ковариационная функция которого удовлетворяет условию Пикандса:

$$r(t) = 1 - |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2]. \quad (1)$$

Пусть $B_{\alpha/2}(t)$ — дробное броуновское движение с параметром Херста $\alpha/2$. Константами Пикандса называются величины

$$H_\alpha(T) = \mathbf{E} e^{\left(\max_{t \in [0, T]} \sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - t^\alpha\right)}, \quad H_\alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} H_\alpha(T)/T \in (0, \infty).$$

Теорема (J. Pickands III, 1969)

Пусть выполнено условие (1). Тогда для любого p , такого что $|r(t)| < 1$ для каждого $t \in (0, p]$ при $u \rightarrow \infty$

$$P\left(\max_{t \in [0, p]} \xi(t) > u\right) \sim \frac{p H_\alpha}{\sqrt{2\pi}} u^{2/\alpha-1} e^{-u^2/2}.$$

Введение: гауссовский хаос

Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)^\top$, $d \geq 2$ - стандартный гауссовский случайный вектор. Случайную величину $g(\xi)$ назовём *гауссовским хаосом*. Поставим задачу изучения следующей вероятности при $u \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(g(\xi) > u).$$

Введем сферические координаты $\mathbf{v} = (r, \varphi)^\top$, где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) \in \Pi_{d-1} = [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$ – угловые координаты вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ и $r = |\mathbf{x}|$. Будем писать $g(\varphi) = g(\mathbf{x}/|\mathbf{x}|)$. Обозначим

$$g := \max_{\varphi \in \Pi_{d-1}} g(\varphi), \quad \mathcal{M}_g := \{\varphi \in \Pi_{d-1} : g(\varphi) = g\}.$$

Введение: гауссовский хаос

Рассматривается два типа структуры множества $\mathcal{M}_\varphi$:

- ▶ $\mathcal{M}_\varphi$ состоит из конечного числа точек;
- ▶ $\mathcal{M}_\varphi$ - гладкое m -мерное многообразие, $1 \leq m \leq d - 1$.

В первом случае предположим невырожденность гессиана $g''(\varphi)$ на $\mathcal{M}_\varphi$, то есть $|\det g''(\varphi)| > 0$ на $\mathcal{M}_\varphi$. Во втором случае предположим, что ранг гессиана $g''(\varphi)$ равен $d - 1 - m$ для каждой точки из $\mathcal{M}_\varphi$ (свойство *регулярности*).

Теорема (D.A. Korshunov, V.I. Piterbarg, E. Hashorva, 2015)

Пусть $g(\varphi) \in C^2(\Pi_{d-1})$. Тогда при $u \rightarrow \infty$:

$$p_{g(\xi)}(u) = \frac{h_0}{\beta g} (u/g)^{\frac{m+1}{\beta}-1} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}} (1 + o(1))$$

$$P(g(\xi) > u) = h_0 (u/g)^{\frac{m-1}{\beta}} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}} (1 + o(1)),$$

где h_0 - константа, зависящая от β , g , d и структуры $\mathcal{M}_\varphi$.

Введение: гауссовский хаос

Отметим простое следствие данного результата, применимое к рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} |\xi(t)|^2 > (u/g)^{2/\beta}\right) &= \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g|\xi(t)|^\beta > u\right) \\ &\geq \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right) \geq \mathbf{P}(g(\xi(0)) > u). \end{aligned}$$

В предположении независимости и одинаковой распределённости гауссовских стационарных центрированных процессов $\xi_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, ковариационная функция которых удовлетворяет условию Пикандса (1), используя предыдущую теорему и полученные ранее результаты для вероятностей высоких выбросов траекторий процессов типа хи-квадрат, нетрудно получить, что при $u \rightarrow \infty$

$$\ln \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right) \sim -\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}.$$

Глава 1: произведение двух гауссовских процессов

Пусть $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))^T$, $t \in \mathbb{R}_+$ - гауссовский стационарный центрированный п.н. непрерывный векторный процесс, ковариационные функции компонент которого удовлетворяют условиям Пикандса

$$r_i(t) = 1 - c_i |t|^{\alpha_i} + o(|t|^{\alpha_i}), \quad t \rightarrow 0, \quad c_i > 0, \quad \alpha_i \in (0, 2]. \quad (2)$$

Предположим, что $|r_i(t)| < 1$, $i = 1, 2$ для всех $t \in (0, p]$.

Пусть для $r(t-s) := \mathbf{E} \xi_1(t) \xi_2(s)$, некоторых действительных c , $r \in (-1, 1)$ и $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ справедливо соотношение:

$$r(t) = r - c |t|^\alpha + o(|t|^\alpha), \quad t \rightarrow 0. \quad (3)$$

Нетрудно доказать, что условия (2), (3) влекут тот факт, что $c = 0$ в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и $c^2 \leq c_1 c_2$ в случае $\alpha_1 = \alpha_2$.

Глава 1: основной результат

Теорема

При сформулированных выше условиях (2), (3) при $u \rightarrow \infty$ имеют место следующие соотношения:

1. если $\alpha_1 < \alpha_2$, то

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \xi_1(t) \xi_2(t) > u\right) \sim \frac{c_1^{1/\alpha} p H_\alpha}{\sqrt{2\pi}(1+r)^{2/\alpha-1}} u^{1/\alpha-1/2} e^{-\frac{u}{1+r}}.$$

2. если $\alpha_1 = \alpha_2$, то в случае $c_1 + c_2 + 2c > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \xi_1(t) \xi_2(t) > u\right) \sim \frac{(c_1 + c_2 + 2c)^{1/\alpha} p H_\alpha}{\sqrt{2\pi}(1+r)^{2/\alpha-1}} u^{1/\alpha-1/2} e^{-\frac{u}{1+r}}.$$

При $\alpha_1 \leq \alpha_2$ и независимости процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ имеем:

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \xi_1^2(t) - \xi_2^2(t) > u\right) \sim \frac{c_1^{1/\alpha_1} p H_{\alpha_1}}{\sqrt{\pi}} u^{1/\alpha_1-1/2} e^{-\frac{u}{2}}.$$

Глава 2: общие условия на векторный процесс

Предположим, что для гауссовского стационарного центрированного п.н. непрерывного векторного процесса $\xi(t)$:

- ▶ существуют симметричные положительно определенные $d \times d$ матрицы R и C , такие что ковариационная матрица $R(t) := E\xi(t)\xi(0)^T$ удовлетворяет условию типа Пикандса:

$$R(t) = R - |t|^\alpha C + |t|^\alpha o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2], \quad (4)$$

где $o(1)$ это $d \times d$ матрица, компоненты которой стремятся к нулю при $t \rightarrow 0$;

- ▶ $R(t) \prec R$ и $R(t) \succ -R$ для всех $t \in (0, p]$ в матричном смысле, то есть для всех $t \in (0, p]$ и ненулевых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\langle \mathbf{x}, (R + R(t)) \mathbf{x} \rangle > 0 \text{ и } \langle \mathbf{x}, (R - R(t)) \mathbf{x} \rangle > 0. \quad (5)$$

Глава 2: квадратичная форма

Рассмотрим симметричную $d \times d$ матрицу A . Поставим задачу изучения следующей вероятности при $u \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \langle \xi(t), A\xi(t) \rangle > u\right).$$

Пусть Q - ортогональная матрица, приводящая симметричную матрицу $R^{1/2}AR^{1/2}$ к диагональному виду $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ с $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d$. Определим $\eta(t) = Q^\top R^{-1/2}\xi(t)$. Тогда

$$R_\eta(t) := E\eta(t)\eta(0)^\top = I_d - |t|^\alpha \tilde{C} + |t|^\alpha o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2],$$

где матрицы $\tilde{C} = Q^\top R^{-1/2}CR^{-1/2}Q$ и $I_d \pm R_\eta(t)$ для всех $t \in (0, p]$ положительно определены и

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \langle \xi(t), A\xi(t) \rangle > u\right) = \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \sum_{i=1}^d \lambda_i \eta_i^2(t) > u\right).$$

Глава 2: основной результат

Теорема

Предположим, что $\lambda_d > 0$ и имеет кратность 1. Тогда при выполнении условий (4), (5) при $u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} \langle \xi(t), A\xi(t) \rangle > u\right) \\ & \sim \sqrt{\frac{2\lambda_d}{\pi}} \left(\frac{\tilde{c}_{d,d}}{\lambda_d}\right)^{1/\alpha} \frac{pH_\alpha}{\prod_{j=1}^{d-1} \sqrt{1 - \lambda_j/\lambda_d}} u^{1/\alpha - 1/2} e^{-\frac{u}{2\lambda_d}}, \end{aligned}$$

где $\tilde{C} = (\tilde{c}_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$.

В соответствии с определениями выше для рассматриваемой однородной функции $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i x_i^2$ имеем:

$$\beta = 2, \quad g = \lambda_d, \quad \mathcal{M}_\varphi = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right\}.$$

Глава 3: общий случай гауссовского хаоса

Пусть Q - ортогональная матрица, т.ч. $Q^T R^{-1/2} C R^{-1/2} Q = \tilde{C}$, $\tilde{C}$ - диагональная матрица. Определим $\eta(t) = Q^T R^{-1/2} \xi(t)$. Тогда для однородной функции $\tilde{g}(x) = g(R^{1/2} Q x)$ порядка β

$$E\eta(t)\eta(0)^T = I_d - |t|^\alpha \tilde{C} + |t|^\alpha o(1), \quad t \rightarrow 0, \quad \alpha \in (0, 2],$$

$$P\left(\max_{t \in [0, \rho]} g(\xi(t)) > u\right) = P\left(\max_{t \in [0, \rho]} \tilde{g}(\eta(t)) > u\right).$$

Таким образом считаем, что $\xi(t)$ удовлетворяет (4), (5) с $R = I_d$ и диагональной положительно определённой матрицей C . Предполагая регулярность $\mathcal{M}_\varphi$, введём

$$j(\varphi) = \frac{J(1, \varphi) |\det g''(\varphi)_{d-1-m}|^{-1/2}}{\int_{\mathcal{M}_\varphi} J(1, \varphi) |\det g''(\varphi)_{d-1-m}|^{-1/2} dV_\varphi}.$$

где dV_φ - элементарный объем в $\mathcal{M}_\varphi$. Здесь и в дальнейшем, если $m = 0$ интеграл по $\mathcal{M}_\varphi$ понимается как (конечная) сумма по всем точкам $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$.

Глава 3: основной результат

Введем функцию $\mathbf{v}(\varphi)$ на Π_{d-1} соотношением $g(\mathbf{v}(\varphi)) = 1$, если $g(\varphi) > 0$ и $\mathbf{v}(\varphi) = 0$, если $g(\varphi) \leq 0$. Обозначим

$$H_\alpha(T; \mathcal{M}_\varphi) = \int_{\mathcal{M}_\varphi} j(\varphi) H_\alpha(T \langle \mathbf{v}(\varphi), C\mathbf{v}(\varphi) \rangle^{1/\alpha}) dV_\varphi,$$

$$H_\alpha(\mathcal{M}_\varphi) = \lim_{T \rightarrow \infty} H_\alpha(T; \mathcal{M}_\varphi)/T \in (0, \infty).$$

Теорема

Пусть ковариационная функция гауссовского центрированного стационарного векторного процесса $\xi(t)$ удовлетворяет условиям (4), (5). Пусть $g(\varphi) \in C^2(\Pi_{d-1})$, и каждая точка $\varphi \in \mathcal{M}_\varphi$ регулярна. Тогда для определённой выше константы h_0 при $u \rightarrow \infty$

$$P_\xi(u, p) \sim p h_0 H_\alpha(\mathcal{M}_\varphi) g^{-(m-1)/\beta} u^{\frac{m-1+2/\alpha}{\beta}} e^{-\frac{1}{2}(u/g)^{2/\beta}}.$$

Глава 3: схема доказательства

Определим $N_p := \lfloor \frac{p}{Tu^{-\frac{2}{\alpha\beta}}} + 1 \rfloor$ и $\Delta_k := [k, k+1]Tu^{-2/\alpha\beta}$.

Используя стационарность и неравенство Бонферрони, имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right) \leq N_p \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_0} g(\xi(t)) > u\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\max_{t \in [0, p]} g(\xi(t)) > u\right) \geq (N_p - 1) \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_0} g(\xi(t)) > u\right)$$

$$- 2 \sum_{k=1}^{N_p-1} (N_p - k) \mathbf{P}\left(\max_{t \in \Delta_0} g(\xi(t)) > u, \max_{s \in \Delta_k} g(\xi(s)) > u\right).$$

Асимптотика первой вероятности в правой части находится с помощью (4), а также точной асимптотики для хвостов случайных величин типа $g(\xi(t))$ (локальная лемма).

Глава 3: локальная лемма

А именно:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\max_{t \in \Delta_0} g(\xi(t)) > u) = \mathbf{P}(g(\xi(0)) > u) \\ & + \mathbf{P}(\max_{t \in [0, T]} g(\xi(tu^{-2/\alpha\beta})) > u, g(\xi(0)) < u - u\gamma(u)) \\ & + \int_{u-u\gamma(u)}^u \mathbf{P}(\max_{t \in [0, T]} g(\xi(tu^{-2/\alpha\beta})) > u \mid g(\xi(0)) = x) p_{g(\xi(0))}(x) dx. \end{aligned}$$

Положительная функция $\gamma(u)$ подбирается таким образом, чтобы $u^{2/\beta}\gamma(u) \rightarrow \infty$, $\gamma(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, и второе слагаемое оказывалось бесконечно малым по отношению к оставшимся двум (при $u \rightarrow \infty$). Исследование интеграла проводится с использованием асимптотического разложения для плотности гауссовского хаоса $g(\xi(0))$ в окрестности u .

Глава 3: дискретная аппроксимация

Оценка двойной суммы проводится с помощью метода дискретной аппроксимации на решетке

$$\mathcal{R}(u, \delta) = \{k\delta u^{-2/\alpha\beta}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

А именно:

- ▶ Доказываются локальная лемма при $t \in \mathcal{R}(u, \delta) \cap \Delta_0$.
- ▶ Оцениваются двойные суммы при соответствующей решетке $t \in \mathcal{R}(u, \delta) \cap \Delta_0$ и $s \in \mathcal{R}(u, \delta) \cap \Delta_k$ при $k = 1, \dots, N_p - 1$.
- ▶ С помощью неравенства Бонферрони доказывается основная теорема в дискретном времени на решетке $\mathcal{R}(u, \delta)$.
- ▶ Доказывается аппроксимационная лемма, позволяющая произвести переход от дискретного времени к непрерывному.

Публикации



Piterbarg V. I., Zhdanov A. On probability of high extremes for product of two independent Gaussian stationary processes. *Extremes*, 18(1), 99-108, 2015.



Жданов А.И., Вероятности высоких выбросов траекторий произведения гауссовских стационарных процессов. *Теория вероятностей и её применения*, 60(3), 605-613, 2015.



Alexander I. Zhdanov, High extrema of Gaussian chaos processes. *4-th International Workshop "Analysis, Geometry and Probability" , Book of Abstracts*, 72 p., 2016.



Жданов А.И., Питербарг В.И., Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени *Теория вероятностей и её применения*, 63(1), 3-28, 2018.



Жданов А.И., Вероятности высоких выбросов траекторий квадратичной формы от гауссовского стационарного векторного процесса. *Фундаментальная и прикладная математика, принята к печати*, 2018.

- ▶ Вероятности высоких выбросов произведения двух гауссовских стационарных процессов. *Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ*, 4 марта 2015
- ▶ Вероятности высоких выбросов траекторий процессов гауссовского хаоса в случае зависимых процессов. *XXIII Международная молодежная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов"*, апрель 2016
- ▶ High extrema of Gaussian chaos processes. *4-th International Workshop "Analysis, Geometry and Probability"*, сентябрь-октябрь 2016
- ▶ Большие выбросы процессов гауссовского хаоса. Аппроксимация в дискретном времени. *Научная конференция "Ломоносовские чтения"*, апрель 2017

Благодарность

Автор выражает благодарность В.И. Питербаргу за постановку задачи, полезные обсуждения, а также постоянную и всестороннюю поддержку в ходе работы.

Спасибо за внимание!

-  *J. Pickands, III.* Upcrossing probabilities for stationary Gaussian processes. — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 145, 51–73.
-  *Piterbarg V.I.* High excursions for nonstationary generalized chi-square processes. — Stoch. Process Appl., 1994, 51, 307–337.
-  *Piterbarg V.* High deviations for multidimensional stationary Gaussian process with independent components. — Problems of Stability of Stochastic Models. Moscow-Utreht, TVP-VSP, 1994, 197–230.
-  *В. И. Питербарг, С. Стаматович.* Предельная теорема для α -выходов траекторий χ^2 -процесса за высокий уровень. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, 48, 4, 811–818.
-  *Patrik Albin, Enkelejd Hashorva, Lanpeng Ji, Chengxiu Ling.* Extremes and Limit Theorems for Difference of Chi-type processes. <http://arxiv.org/abs/1508/02758>, 2015.
-  *Piterbarg Vladimir I.* High extrema of Gaussian chaos processes. *Extremes*, 19(2), 1–20, 2016.
-  *Korshunov D. A., Piterbarg V. I., Hashorva E.* On the Asymptotic Laplace Method and Its Application to Random Chaos. *Mat. Zametki*, 97(6), 878–891, 2015.

-  Piterbarg V. I. *Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields*. American Mathematical Society [Providence, R.I., etc.], United States, p. 206, 2012.
-  Vladimir I. Piterbarg, *Twenty Lectures About Gaussian Processes*. Atlantic Financial Press, London, 2015, pp. 192.
-  Федорюк, М.В., Метод перевала. — Москва, Наука, 1977.
-  Wiener N. The Homogeneous Chaos. — American Journal of Mathematics, Vol.60, No.4 (Oct., 1938), 897–936.
-  Hashorva E., Korshunov D., Piterbarg V. I. Asymptotic expansion of Gaussian chaos via probabilistic approach. — Extremes, 2015, 18, 3, 315–347.
-  В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. Том II. — Монодромия и асимптотики интегралов, Наука, 1984.
-  E. Combet. *Intégrales Exponentielles. Développements Asymptotiques, Propriétés Lagrangiennes*. — Berlin-New York Lecture Notes in Mathematics, 937, Springer-Verlag, 1982.
-  Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва, Наука, 1976.
-  Р. Беллман. Введение в теорию матриц, 1969.