Оптимизация долговременной динамики в управляемой модели бизнес-цикла Калдора (Optimization of asymptotic dynamics in the controlled Kaldor business cycle model)

А. С. Асеев (A. S. Aseev)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

anton.ser.as@gmail.com

Рассмотрим следующую управляемую версию известной модели бизнес-цикла Калдора (см. [2–4]):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \alpha\big[I(Y(t),K(t)) - (1-u(t))S(Y(t))\big], \\ \dot{K}(t) &= I(Y(t),K(t)) - \delta K(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ — величины национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ — поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ — норма амортизации основных фондов, $I(Y,K)$ — функция инвестиций, $S(Y)$ — функция сбережений. Предполагается, что функции $I(Y,K)$ и $S(Y)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y,K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при} \quad K \leq \dfrac{I(Y)}{\beta}, \\ 0 & \text{при} \quad K > \dfrac{I(Y)}{\beta}, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y. \tag{2}$$

Здесь $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I\colon [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ логистическая, т.е. $I(Y)$ — такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y\to\infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $\widehat{Y} > 0$, что $I''(Y) > 0$ при $Y < \widehat{Y}$ и $I''(Y) < 0$ при $Y > \widehat{Y}$.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать все измеримые по Лебегу функции $u\colon [0,\infty) \mapsto [0,1]$. Если заданы начальное состояние (Y_0, K_0), $Y_0 \geq 0$, $K_0 \geq 0$, и допустимое управление $u(t)$, то соответствующая допустимая траектория $(Y(t), K(t))$ есть абсолютно непрерывное решение системы (1), определенное на всем интервале $[0,\infty)$ и удовлетворяющее начальным условиям $Y(0)=Y_0$, $K(0)=K_0$. Для любого начального состояния (Y_0,K_0), $Y_0 \geq 0$, $K_0 \geq 0$, и произвольного допустимого управления $u(t)$ соответствующая допустимая траектория $(Y(t),K(t))$ системы системы (1) существует и единственна.

В некоторых случаях неуправляемая динамика системы (1) (т.е. динамика, соответствующая управлению $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$) может быть неудовлетворительной с экономической точки зрения, например, если система (1) имеет предельный цикл, что соответствует периодическому наступлению кризисов. В этом случае естественно возникает задача оптимизации динамики системы (1) при помощи выбора отличного от нуля управления $u(t)$, $t \geq 0$ (т.е. посредством стимулирования спроса). Заметим, что характер стационарных состояний системы (1) часто полностью определяет ее долговременную динамику. В частности, если при некотором постоянном управлении $u(t) \equiv \tilde{u}$, $t \geq 0$, система (1) имеет единственное асимптотически устойчивое состояние равновесия, то с экономической точки зрения это может оказаться предпочтительнее неуправляемых циклических движений.

Рассмотрим вопросы существования, устойчивости и оптимальности состояний равновесия системы (1) при постоянных управлениях, а также возникающую задачу об оптимальном по быстродействию переходе в заданное состояние равновесия.

В силу равенств (2) для того, чтобы система (1) имела состояние равновесия $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}))$ при постоянном управлении $\tilde{u}(t) \equiv u(\widetilde{Y}) \in [0,1]$, $t \geq 0$, необходимо и достаточно выполнение равенств

$$u(\widetilde{Y}) = 1 - \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}\frac{I(\widetilde{Y})}{\widetilde{Y}}, \qquad K(\widetilde{Y}) = \frac{I(\widetilde{Y})}{\beta+\delta} \tag{3}$$

и неравенства

$$\widetilde{Y} \geq \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma} I(\widetilde{Y}). \tag{4}$$

В дальнейшем любую такую тройку $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}),u(\widetilde{Y}))$ будем называть *стационарным режимом* системы (1).

Теорема 1. *Существует такое* $\bar{Y} > 0$, *что для любого* $\widetilde{Y} > \bar{Y}$ *постоянное управление* $u(t) \equiv u(\widetilde{Y})$, $t \geq 0$, *реализует стационарный режим* $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}),u(\widetilde{Y}))$ (*см.* (3), (4)) *системы* (1), *для которого стационарное состояние* $(\widetilde{Y},K(\widetilde{Y}))$ *единственно и асимптотически устойчиво.*

В каждый момент $t \geq 0$ стоимость реализации управления $u \in [0,1]$ будем моделировать при помощи квадратичной функции (см. [5]):

$$\varphi(Y,u) = \frac{\omega\gamma^2}{2}(uY)^2, \qquad \omega > 0.$$

В качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y,u)$ будем рассматривать величину национального дохода, взятого с учетом стоимости реализации стимулирующей политики, т.е. положим $\Phi(Y,u) = Y - \varphi(Y,u)$. Тогда, чтобы найти оптимальный стационарный режим $(Y_*, K_*, u(Y_*))$, необходимо решить следующую задачу (Q):

$$\Phi(Y,u(Y)) = Y - \varphi(Y,u(Y)) \to \max, \qquad Y \geq \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}.$$

Теорема 2. *Для любых значений параметров системы* (1) *в задаче* (Q) *существует решение* Y_* *и выполняется неравенство* $Y_* > Y_{\max}$, *где* $Y_{\max}$ — *максимальное стационарное состояние системы* (1) *в неуправляемом случае* (*т.е. при* $u(t) \equiv 0$). *Соответствующее оптимальное стационарное управление* $u_*(Y_*)$ *положительно. Если* $\widehat{Y} \leq Y_{\max}$, *то решение* Y_* *задачи* (Q) *единственно.*

Выберем некоторое состояние равновесия (Y_1, K_1), соответствующее постоянному управлению $u(t) \equiv u(Y_1)$, $t \geq 0$ (см. (3), (4)), и рассмотрим следующую задачу быстродействия (P):

$$\begin{aligned}
&\dot{Y}(t) = \alpha\big(I(Y(t),K(t)) - (1-u(t))S(Y(t))\big), \qquad u(t) \in [0,1],\\
&\dot{K}(t) = I(Y(t),K(t)) - \delta K(t),\\
&Y(0) = Y_0, \qquad K(0) = K_0, \qquad Y(T) = Y_1, \qquad K(T) = K_1,\\
&T \to \min .
\end{aligned}$$

Пусть $(Y_*(t), K_*(t), u_*(t))$ — оптимальный процесс и $T_* > 0$ — время быстродействия в (P). Предположим, что $K_*(t) < I(Y_*(t))/\beta$, $t \in [0, T_*]$. Тогда в силу принципа максимума Понтрягина [1] существуют такие не обращающиеся одновременно в нуль абсолютно непрерывные функции $\psi^1(t)$ и $\psi^2(t)$ на $[0, T_*]$, что выполняются условия

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi}^1(t) = -\alpha\big(I'(Y_*(t)) - (1-u_*(t))\gamma\big)\psi^1(t) - I'(Y_*(t))\psi^2(t),\\
&\dot{\psi}^2(t) = \alpha\beta\psi^1(t) + (\beta+\delta)\psi^2(t)
\end{aligned}$$

и выполняется условие максимума

$$u_*(t)\psi^1(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u\in[0,1]}\{u\psi^1(t)\}.$$

Можно показать, что особые режимы в задаче (P) отсутствуют. Данное обстоятельство позволяет свести решение задачи (P) к исследованию краевой задачи принципа максимума.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
2. *Chang W.W., Smyth D.J.* The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38, N 1. P. 37–44.
3. *Kaldor N.*, A model of trade cycle // Econ. J. 1940. V. 50, N 197. P. 78–92.
4. *Lorenz H.-W.* Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. New York: Springer, 1993.
5. *Weitzman M.J.* Income, wealth, and the maximum principle. London: Harvard Univ. Press, 2003.

An existence theorem for infinite-horizon optimal control problems and its application to a model of optimal exploitation of a renewable resource

Sergey M. Aseev

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria

aseev@mi.ras.ru

Consider the following problem (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$