Построение управления первого игрока в одной нелинейной дифференциальной игре (Constructing the control of the first player in a nonlinear differential game)*

Н. Л. Григоренко (N. L. Grigorenko), И. А. Какоткин (I. A. Kakotkin), А. Е. Румянцев (A. E. Rumyantsev)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

grigor@cs.msu.su, kakootkin@bk.ru, rumiantcev@yandex.ru

Рассматривается задача сближения нелинейного объекта с движущейся точкой [1–3]. Координаты точки становятся известными в текущий момент времени. Предложены условия на параметры игры, при которых существует управление, гарантирующее окончание игры за конечное время. Приведены результаты численного расчета управления и траектории игры для тестовых параметров задачи.

Постановка задачи сближения нелинейного объекта с движущейся точкой. Динамика движения нелинейного объекта P описывается уравнениями

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\sin\theta u_1, \quad \ddot{y} = \cos\theta\sin\varphi u_1, \quad \ddot{z} = \cos\theta\cos\varphi u_1 - 1, \\ \ddot{\theta} = u_2, \quad \ddot{\varphi} = u_3, \end{cases} \tag{1}$$

где $x, y, z, \theta, \varphi, u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^1$, u_i, $i = 1, 2, 3$, — параметры управления. Начальное положение P: x_0, y_0, z_0, $\theta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\varphi_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Траектория движения целевой точки E: $x_e(t), y_e(t), z_e(t)$, $t \in \in [0, T]$; $x_e(t)$, $y_e(t)$, $z_e(t)$ — функции с абсолютно непрерывными производными, $\|\dot{w}_e(t)\| \le \sigma_1 + \sigma_2 t$, $t \ge 0$, где $w_e = (x_e, y_e, z_e)$. В момент t игрок P располагает информацией о траектория движения E: $x_e(s), y_e(s), z_e(s)$, $s \in [0, t]$, ее первых и вторых производных. Ограничения на управления P: $\|u_1\| \le \rho_1$, $\|u_2\| \le \rho_2$, $\|u_3\| \le \rho_3$. Условие окончания процесса сближения:

$$h(t, w_e(t)) = (x(t) - x_e(t))^2 + (y(t) - y_e(t))^2 + (z(t) - z_e(t))^2 \le \ell.$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

В момент t первый игрок P располагает информацией о системе (1), ограничениях на управления, начальных положениях P и E, $w_e(s)$, $s \in$ $\in [0, t]$.

Задача сближения. Для фиксированного T и допустимого $x_e(t)$, $y_e(t)$, $z_e(t)$, $t \in [0, T]$, найти $u(\cdot)$, для которого $h(T) \le \ell$.

Вспомогательная задача. Рассмотрим в качестве вспомогательной управляемой системы систему

$$\ddot{w} = r, \tag{2}$$

где $w, r \in \mathbb{R}^3$. Положим $w = (w_1, w_2, w_3) = (x, y, z)$.

Выберем позиционное управление $r(t)$ в следующем виде:

$$r(t) = \frac{2}{\Delta T^2}\big[w_c(t, T, \Delta T) - w(t)\big] - \frac{2}{\Delta T}\dot{w}(t), \tag{3}$$

$$w_c(t, T, \Delta T) = w_0 + (t + \Delta T)\dot{w}_0 + \left[\frac{2}{T^2}[w_e(t) - w_0] - \frac{2}{T}\dot{w}_0\right]\frac{(t + \Delta T)^2}{2}, \tag{4}$$

где ΔT, T — числовые параметры, $0 < \Delta T \ll T$, $w_e(t)$ — положение целевой точки.

Лемма 1. *При соотношениях* (1)–(4) *для фазовых переменных системы* (1) *и любой дифференцируемой вектор функции* $w_e(t)$ *с ограниченной производной,* $\|\dot{w}_e(t)\| \le \sigma_1 + \sigma_2 t$, $t \in [0, T]$, *при заданном* $T < \infty$ *выполнено соотношение* $h(T, w_e(T)) \le \ell$,

$$\ell \le \left(\Delta T\Big(T^4 + 2T^2\Delta T^2 - 2T\Delta T^3 + T^5\big(1 - e^{-2T/\Delta T}\big)\Big) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{\sigma_1^2}{T^3} + \frac{\sigma_1\sigma_2}{T^2} + \frac{\sigma_2^2}{3T}\right)\right)^{1/2} + \varepsilon.$$

Замечание 1. При фиксированном T и выборе достаточно малого параметра ΔT оценка для ℓ мала.

Разрешимость функционального уравнения. При известных значениях $r_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, параметры $u_1(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$ найдем как решение функциональных уравнений

$$\begin{cases} -\sin\theta u_1 = r_1, \\ \cos\theta\sin\varphi u_1 = r_2, \\ \cos\theta\cos\varphi u_1 - 1 = r_3. \end{cases} \tag{5}$$

Обозначим левую часть системы (5) через $\Phi(q)$, где $q = (u_1, \theta, \varphi)$. В предположении отличия от нуля детерминанта $\det(\partial\Phi/\partial q) = -u_1^2 \cos\theta$ имеем

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q}\right)^{-1} \dot{r} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ -\cos\theta/u_1 & -\sin\theta\sin\varphi/u_1 & -\sin\theta\cos\varphi/u_1 \\ 0 & \cos\varphi/(u_1\cos\theta) & -\sin\varphi/(u_1\cos\theta) \end{pmatrix} \dot{r}, \quad (6)$$

$q(0) = (u_1(0), \theta_0, \varphi_0)$.

Лемма 2. *Существуют $u_1(0)$, T, при которых решение системы (6) существует и нелокально продолжимо для рассматриваемых краевых условий.*

Замечание 2. При доказательстве леммы 2 используется следующее свойство функции $r(t)$ (3), (4): $\max_{t\in[0,T]} \|r(t)\|_{T\to\infty} \to 0$.

Оценка снизу параметра T при ограниченной норме вектора (r_1, r_2, r_3) для системы (2). Пусть $\|r(t)\| \le \rho$. Если целевая точка $w_e(t)$ неподвижна, то $T \ge (\|\dot{w}_0\| + \sqrt{\|\dot{w}_0\|^2 + 4\rho\|w_e(0) - w_0\|})/(2\rho)$. В противном случае при $\|w_e(T)\| \le \|w_e(0)\| + T\sigma_1 + T^2\sigma_2/2$ имеем

$$2\rho T \ge \|\dot{w}_0\| + \sqrt{\|\dot{w}_0\|^2 + 4\rho\|w_e(0) - w_0\|},$$

$$\left(\rho - \frac{\sigma_2}{2}\right)T^2 - T(\|\dot{w}_0\| + \sigma_1) - \|w_e(0) - w_0\| \ge 0.$$

Таким образом, если $\rho > \sigma_2/2$, то $T \ge T_2$, а если $\rho < \sigma_2/2$, то $T_1 \le T \le T_2$, где

$$T_{1,2} = \frac{\|\dot{w}_0 + \sigma_1\| \mp \sqrt{\|\dot{w}_0 + \sigma_1\|^2 + 4(\rho - \sigma_2/2)\|w_e(0) - w_0\|}}{2(\rho - \sigma_2/2)}.$$

Пример. В качестве траектории игрока E рассмотрим траекторию системы (1) при $x_e(0) = -1$, $x'_e(0) = -0.3$, $y_e(0) = 1$, $y'_e(0) = 0.2$, $z_e(0) = 30$, $z'_e(0) = 0$, $x_e(T) = 7$, $y_e(T) = 8$, $z_e(T) = 6$, $T = 10$. Управление, реализующее такую траекторию, может быть найдено по формулам (3), (4) при фиксированной конечной точке. Для игрока P начальные значения первых трех компонент фазового вектора суть $x_p(0) = -5$, $x'_p(0) = -0.7$, $y_p(0) = 3$, $y'_p(0) = 0.2$, $z_p(0) = 3$, $z'_p(0) = 0$. На рис. 1 приведены графики компонент траекторий P $(x(t), y(t), z(t))$ и E $(x_e(t), y_e(t), z_e(t))$ при начальных значениях $x_p(0)$, $x'_p(0)$, $y_p(0)$, $y'_p(0)$, $z_p(0)$, $z'_p(0)$ для P. В этом случае параметры управления P суть $T = 10$, $\Delta T = 0.1$. На рис. 2–4 приведены графики управления $u_1(t)$ и компонент траектории $\theta(t)$, $\varphi(t)$.

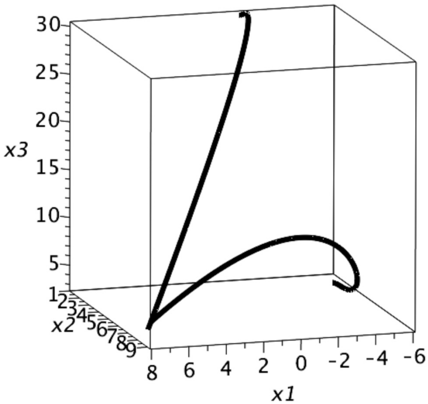

Рис. 1. $(x(t), y(t), z(t))$

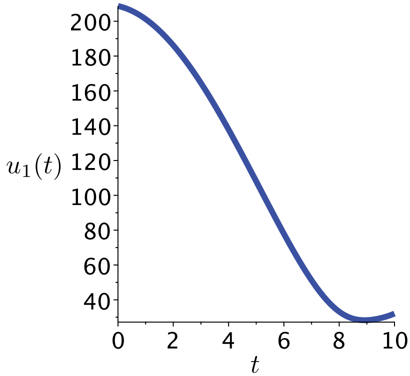

Рис. 2. $u_1(t)$

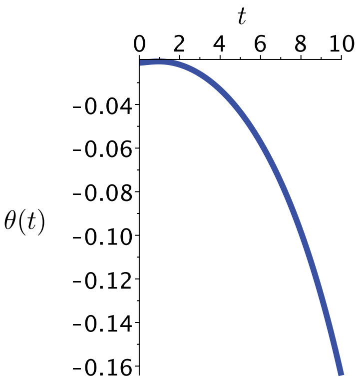

Рис. 3. $\theta(t)$

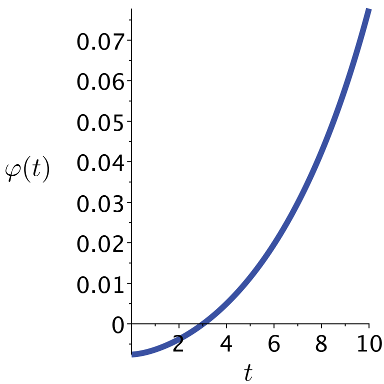

Рис. 4. $\varphi(t)$

Список литературы

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. *Батенко А.П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. М.: Сов. радио, 1977.
3. *Гурьянов А.Е.* Моделирование управления квадрокоптером // Инженерный вестник. 2014. № 08. С. 522–534.