

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ  
И КАЛИБРОВКИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ  
ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ  
(PARALLEL ALGORITHM FOR SOLVING AND CALIBRATING  
DYNAMIC GENERAL EQUILIBRIUM MODELS)\*

А. П. Груздев (A. P. Gruzdev)<sup>a</sup>,  
Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)<sup>a</sup>,  
М. Г. Дальтон (M. G. Dalton)<sup>b</sup>,  
М. Витсель (M. Weitzel)<sup>c</sup>, Б. Ч. О'Нилл (B. C. O'Neill)<sup>2</sup>

<sup>a</sup>Факультет вычислительной математики и кибернетики,  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
Москва, Россия

<sup>b</sup>Национальное управление океанических и атмосферных  
исследований, Сизтл, США

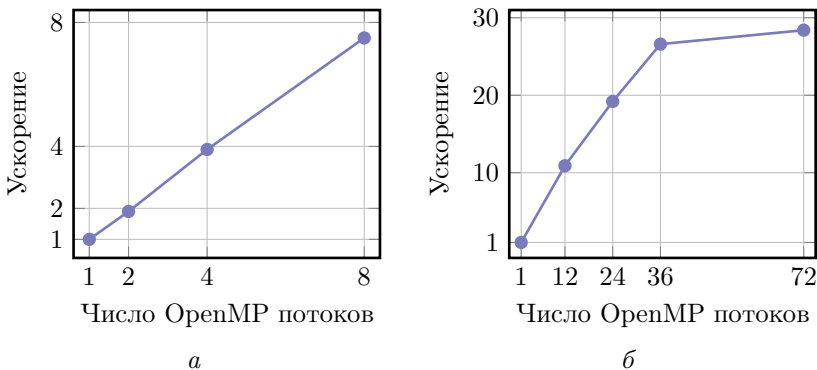
<sup>c</sup>Объединенный исследовательский центр европейской комиссии,  
Севилья, Испания

<sup>2</sup>Национальный центр атмосферных исследований, Боулдер, США  
gruzdev@cs.msu.ru, melnikov@cs.msu.ru

В динамических моделях общего экономического равновесия (ОЭР) методы параллельного программирования используются сравнительно редко. В [1] был использован параллельный метод Якоби. Распараллеливание по регионам было реализовано для систем с общей памятью. При этом количество регионов, рассмотренное в статье, было относительно невелико, как и количество используемых процессоров. В [2] был предложен новый параллельный метод для динамической модели ОЭР, основанный на приведении матрицы Якоби к блочно-диагональной форме специального вида. Однако производительность параллельного метода была протестирована лишь на сети персональных компьютеров. Существует также ряд работ, использующих параллелизм по данным (см., например, [3, 4]).

---

\*Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова и Национального центра атмосферных исследований (Боулдер, США).



**Рис. 1.** Ускорение в параллельной реализации модели iPETS: *a* — суперкомпьютер Ломоносов [9]; *б* — суперкомпьютер Шайенн [10]

Наиболее распространенным подходом для решения нелинейных систем в динамических моделях ОЭР является применение методов Ньютона–Крылова (см., например, [5]). Этот класс алгоритмов использует один из методов Крылова для решения линейной системы на каждом шаге метода Ньютона. В динамических моделях ОЭР методы Ньютона–Крылова используются для решения нелинейной системы уравнений на всем отрезке времени. Методы Крылова учитывают разреженность матрицы Якоби, но не используют структуру задачи.

Альтернативный подход состоит в применении методов, использующих блочную структуру матрицы Якоби в моделях ОЭР. Одним из наиболее часто используемых методов такого рода является метод Фей–Тейлора [6]. Каждая итерация метода состоит из двух шагов. Сначала решается задача динамической оптимизации, которая сводится к краевой задаче. На этом шаге определяются динамические переменные (спрос потребителей и пр.), а для их вычисления используются цены с предыдущей итерации. На втором шаге метода вычисляется новая итерация цен с использованием обновленных динамических переменных. При этом цены находятся из статической задачи минимизации затрат и могут быть вычислены независимо для каждого момента времени.

В этой работе нами реализован параллельный метод Фей–Тейлора с использованием технологии OpenMP для последней версии модели iPETS [7]. Кроме того, нами реализован параллельный алгоритм калибровки модели iPETS. Задача калибровки сформулирована как нелинейная система уравнений, для решения которой используется метод

Ньютона. Столбцы матрицы Якоби в методе Ньютона вычисляются параллельно. Алгоритм калибровки реализован для параллельных систем с распределенной памятью на основе технологии MPI. Такой подход позволил реализовать гибридный (OpenMP+MPI)-алгоритм калибровки, который использует параллельный метод Фея–Тейлора для решения модели на каждом шаге калибровки [8]. Полученное ускорение параллельного метода Фея–Тейлора (рис. 1) дает возможность применять гибридный (OpenMP+MPI)-алгоритм калибровки даже в тех случаях, когда параллельный MPI-алгоритм калибровки (без распараллеливания самой модели) занимает слишком много времени.

### Список литературы

1. *Faust J., Tryon R.* A distributed block approach to solving near-block-diagonal systems with an application to a large macroeconomic model // *Computational economics: Models, methods and econometrics* / Ed. by M. Gilli. Boston: Kluwer, 1995. (Adv. Comput. Econ.).
2. *Van Pham H., Kompas T.* Solving intertemporal CGE models in parallel using a singly bordered block diagonal ordering technique // *Econ. Model.* 2016. V. 52. P. 3–12.
3. *Swann C.A.* Maximum likelihood estimation using parallel computing: An introduction to MPI // *Comput. Econ.* 2002. V. 19. P. 145–178.
4. *Creel M., Goffe W. L.* Multi-core CPUs, clusters, and grid computing: a tutorial // *Comput. Econ.* 2008. V. 32. P. 343–352.
5. *Gilli, M., Pauletto, G.* Krylov methods for solving models with forward-looking variables // *J. Econ. Dyn. Control.* 1998. V. 22. P. 1275–1289.
6. *Fair R., Taylor J.* Solution and maximum likelihood estimation of dynamic nonlinear rational expectations models // *Econometrica.* 1983. V. 51. P. 1169–1185.
7. *Ren X. et al.* Avoided economic impacts of climate change on agriculture: integrating a land surface model (CLM) with a global economic model (iPETS) // *Clim. Change.* 2016. V. 146. P. 517–531.
8. *Gruzdev A.P. et al.* Parallel solution and calibration algorithms in dynamic general equilibrium models // *Comput. Econ.* 2018. Submitted.
9. *Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V.* “Lomonosov”: Supercomputing at Moscow State University // *Contemporary high performance computing: From petascale toward exascale.* Boca Raton: CRC, 2013.
10. Computational and Information Systems Laboratory. 2017. Cheyenne: HPE/SGI ICE XA System (NCAR Community Computing). Boulder, CO: National Center for Atmospheric Research. doi:10.5065/D6RX99HX.