Прямое вычисление константы оптимального регулятора и функции Беллмана в задаче Фуллера с привлечением возможностей среды Maple (Direct calculation of the optimal regulator's constant and Bellman function in the Fuller problem using the Maple system possibilities)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), С. Н. Аввакумов (S. N. Avvakumov)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, asn@cs.msu.su

В *задаче Фуллера* (см. [1–5]) наблюдается известный теоретический эффект — четтеринг — сгущение точек переключения оптимального управления в окрестности некоторого конечного момента времени T_*, зависящего от начального состояния управляемого объекта. Напомним постановку задачи Фуллера:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \quad x(0) = a, \quad x(\infty) = 0, \\ \dot{y} = u, \quad y(0) = b, \quad y(\infty) = 0, \quad |u| \le 1, \\ J[u] = \displaystyle\int_0^\infty x^2\, dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

В задаче (1) оптимальный регулятор имеет вид

$$u(x,y;m) = \operatorname{sign}(-x - my|y|) = \begin{cases} -1, & (x,u) \in I_-, \\ +1, & (x,u) \in I_+, \end{cases} \tag{2}$$

причем константа регулятора определяется равенством

$$m = m_* = \frac{1}{12}\sqrt{6\left(\sqrt{33}-1\right)} = 0.44\ldots \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

Для начальной точки $(a,b)\in I_-$ оптимальная программа имеет вид

$$u(t)=\begin{cases}-1, & t\in(0,t_1),\\ +1, & t\in(t_1,t_2),\\ -1, & t\in(t_2,t_3),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0, & t\in(T_*,+\infty),\end{cases}\qquad \lim_{k\to+\infty} t_k=T_*=T_*(a,b)\in(0,+\infty).$$

Рассматривается следующая задача: найти параметр $m\in(0,1/2)$ из условия

$$F(a,b;m)\equiv J(u)|_{u=u(\cdot,\cdot;m)}\to\min_{m\in(0,\,1/2)}$$

для данного начального состояния (a,b). Показано, что минимизатор в этой задаче

$$m_*=\operatorname*{arg\,min}_{m\in(0,\,1/2)} F(a,b;m),\qquad m_*\approx 0.44,$$

не зависит от начального состояния (a,b) и имеет вид (3). Эти вычисления выполнены в среде Maple. Вводится вспомогательная переменная

$$q=\sqrt{\frac{1-2m}{1+2m}}\in(0,1)\qquad\Leftrightarrow\qquad m=m(q)\equiv\frac{1-q^2}{2(1+q^2)}\in\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

Вводится функция

$$G(a,b;q)=F(a,b;m)|_{m=m(q)},$$

которая после ряда аналитических вычислений в среде Maple представляется в виде

$$\begin{aligned}&G(a,b;q)=\frac{b}{15}(2b^4+10ab^2+15a^2)+\frac{\sqrt{2}\,g(q)}{240}(2a+b^2)^{5/2}, && (a,b)\in I_-,\\ &G(a,b;q)=G(-a,-b;q), && (a,b)\in I_+,\end{aligned}$$

где

$$g(q)=\sqrt{1+q^2}\,\frac{23q^4-14q^2+23}{1-q^5}.$$

Минимизатор последней функции

$$q_*=\operatorname*{arg\,min}_{q\in(0,1)} G(a,b;q)=\operatorname*{arg\,min}_{q\in(0,1)} g(q)\in(0,1)$$

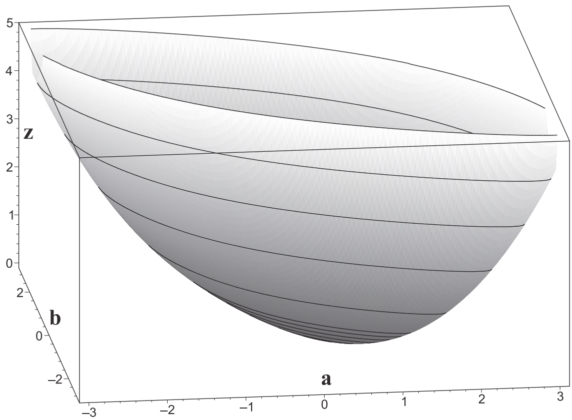

Рис. 1. Характер зависимости оптимального значения функционала от начальной точки (a, b) в задаче (1): поверхность $z = W(a, b)$

не зависит от начальной точки (a, b), вычисляется, и по нему находится оптимальный параметр регулятора

$$m_* = \frac{1 - q_*^2}{2(1 + q_*^2)} = \sqrt{\frac{\sqrt{33} - 1}{24}} \approx 0.44462\ldots,$$

$$q_* = \sqrt{\frac{1 - 2m_*}{1 + 2m_*}} \approx 0.24212\ldots.$$

Минимальное значение функции G определяет функцию Беллмана

$$W(a, b) = \frac{b}{15}(2b^4 + 10ab^2 + 15a^2) + w_* \cdot (2a + b^2)^{5/2}, \quad (a, b) \in I_-,$$

$$W(a, b) = W(-a, -b), \qquad (a, b) \in I_+,$$

где константа $w_* = \sqrt{2}\, g(q_*)/240 = 0.135\ldots$, а $W(0, 0) = 0$.

Функция $W(a, b)$ — гладкое решение уравнения Беллмана

$$a^2 + W'_a(a, b) \cdot b + W'_b(a, b) \cdot (\mp 1) = 0, \qquad (a, b) \in I_\mp.$$

Для линии переключения имеет место условие $W'_b(a, b) = 0$. Оптимальность регулятора (2), (3) для задачи (1) вытекает из теории динамического программирования для непрерывных управляемых систем.

Настоящие тезисы являются расширенной версией публикаций [5, 6].

Список литературы

1. *Фуллер А.Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I Конгр. ИФАК, 1960. М. Т. 2. С. 584–605.
2. *Wonham W.M., Johnson C.D.* Optimal bang–bang control with quadratic perfomance index: Preprint. Joint Automatic Control Conference, Univ. Minnesota, 1963.
3. *MacFarlane A.* Tom Fuller: a memoir (obitary) // Int. J. Control. 2000. V. 73, N 6. P. 457–463.
4. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Оптимальное управление. Тбилиси, 2008. С. 3–55. (Современная математика и ее приложения; Т. 58).
5. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф. М., 2000. С. 3.
6. *Киселёв Ю.Н., Аввакумов С.Н.* Прямое вычисление константы оптимального регулятора и функции Беллмана в задаче Фуллера с привлечением возможностей среды Maple // Ломоносовские чтения: Науч. конф., Москва, фак. ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–26 апр. 2018 г.: Тез. докл. М., 2018. С. 66–66.