Решение задачи Фуллера на основе принципа максимума Понтрягина (Solution of Fuller's problem based on Pontryagin's maximum principle)

Ю. Н. Киселёв (Yu. N. Kiselev), М. В. Орлов (M. V. Orlov), С. М. Орлов (S. M. Orlov)

Факультет вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

kiselev@cs.msu.su, orlov@cs.msu.su, sergey.orlov@cs.msu.su

Рассмотрим классическую двумерную задачу Фуллера [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1, \quad x_2(0) = b, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^{+\infty} x_1^2(t)\,dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи (1) совпадает с оптимальным решением следующей задачи со свободным временем T:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, \quad |u| \le 1, \quad x_2(0) = b, \quad x_2(T) = 0, \\ J \equiv \displaystyle\int_0^{T} x_1^2(t)\,dt \to \min_{u(\cdot)}. \end{cases} \tag{2}$$

Напомним, что оптимальное решение задачи (2) обращает в нуль функцию Гамильтона $M(x,\psi)$ с некоторой функцией $\psi(\cdot)$, т.е.

$$M(x(t),\psi(t)) = K(x(t),\psi(t),u(t)) = 0 \qquad \forall t \in [0,T], \tag{3}$$

где $M(x,\psi) \equiv \max_{u\in[-1,1]} K(x,\psi,u)$, а функция Гамильтона–Понтрягина $K(x,\psi,u)$ для задачи (2) имеет вид

$$K(x,\psi,u) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

Для построения оптимального решения задачи (2) достаточно найти при некотором $T > 0$ решение краевой задачи принципа максимума специального вида, а именно

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = a, \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}(\psi_2), \quad x_2(0) = b, \\ \dot{\psi}_1 = x_1, \quad x_1(T) = \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad x_2(T) = \psi_2(T) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Лемма 1. *Любое решение краевой задачи* (4) *определяет оптимальную траекторию задачи Фуллера.*

Для построения решения краевой задачи (4) на фазовой плоскости x_1, x_2 строится линия переключения AOB, определяемая уравнением

$$x_1 = \varphi(x_2), \qquad \text{где} \quad \varphi(x_2) = \begin{cases} \varphi_{AO}(x_2), & x_2 \le 0, \\ \varphi_{BO}(x_2), & x_2 > 0, \end{cases}$$

$$\varphi_{AO}(x_2) = \lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad \varphi_{BO}(x_2) = -\lambda \frac{x_2^2}{2},$$

причем $\varphi_{BO}(x_2) = -\varphi_{AO}(-x_2)$, $x_2 \ge 0$. Положительный параметр $\lambda \in (0, 1)$ пока не определен. Часть AO линии переключения расположена в четвертой четверти и определяется уравнением

$$x_1 = \varphi_{AO}(x_2) \equiv \lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad x_2 \le 0. \tag{5}$$

Часть BO линии переключения расположена во второй четверти и определяется уравнением

$$x_1 = \varphi_{BO}(x_2) \equiv -\lambda \frac{x_2^2}{2}, \qquad x_2 > 0. \tag{6}$$

Линия переключения AOB обладает свойством центральной симметрии, причем

$$\varphi_{AO}(-\infty) = +\infty, \qquad \varphi_{BO}(+\infty) = -\infty,$$

Предположим, что начальная точка $x(0)$ находится на линии переключения AO: с учетом (5) имеем $x_2(0) = b < 0$, $x_1(0) \equiv a = \lambda b^2/2 > 0$,

$\psi_2(0) = 0$. Начальное условие для ψ_1 найдем, привлекая соотношение (3), взятое при $t = 0$:

$$M(x(0), \psi(0)) \equiv -\frac{1}{2} x_1^2(0) + \psi_1(0)\, x_2(0) + |\psi_2(0)| = 0,$$

откуда

$$\psi_1(0) = \frac{x_1^2(0)}{2x_2(0)} = \lambda^2 \frac{b^3}{8} < 0.$$

Получаем задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = \lambda \dfrac{b^2}{2} > 0, \\ \dot{x}_2 = \operatorname{sign}(\psi_2), \quad x_2(0) = b < 0, \\ \dot{\psi}_1 = x_1, \quad \psi_1(0) = \lambda^2 \dfrac{b^3}{8} < 0, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \psi_2(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Лемма 2. *Существует единственное $\lambda \in (0,1)$ такое, что решение задачи Коши (7) на отрезке $[0,\tau]$, где $\tau = -(1 + q(\lambda))\, b > 0$, $q(\lambda) = \sqrt{(1-\lambda)/(1+\lambda)} \in (0,1)$, удовлетворяет соотношениям*

$$x_2(\tau) = -q(\lambda)\, b > 0, \qquad x_1(\tau) = -\lambda \frac{x_2^2(\tau)}{2} = -q^2(\lambda)\, \lambda \frac{b^2}{2} < 0,$$

т.е. $x(\tau)$ принадлежит линии переключения ВО,

$$\psi_2(\tau) = 0, \qquad \psi_1(\tau) = \lambda^2 \frac{x_2^3(\tau)}{8} = -q^3(\lambda)\, \lambda^2 \frac{b^3}{8} > 0,$$

кроме того,

$$\psi_2(t) > 0 \qquad \forall t \in (0,\tau).$$

Список литературы

1. *Фуллер А.Т.* Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Тр. I Конгр. ИФАК (Москва, 1960). М., 1961. Т. 2. С. 584–605.
2. *Борисов В.Ф., Зеликин М.И., Манита Л.А.* Экстремали с накоплением переключений в бесконечномерном пространстве // Оптимальное управление. Тбилиси, 2008. С. 3–55. (Современная математика и ее приложения; Т. 58).

3. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф., 2000. С. 3.
4. *Киселёв Ю.Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Матер. науч. сем., Планерное, Моск. обл. М.: Макс Пресс, 2003. С. 57–67.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

Критерий корректности в параболической обратной задаче (Correctness criterion in an inverse parabolic problem)*

А. Б. Костин (A. B. Kostin)

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия

abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ рассматривается задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = h(x,t)f(x), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{B}\,u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\,d\mu(t) = \chi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где функции h, μ, χ заданы, причем $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\mathcal{B}\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, а L — равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы ПКС НИЯУ МИФИ, проект 02.a03.21.0005 (27.08.2013).