3. *Аввакумов С.Н., Киселёв Ю.Н.* Задача Фуллера: прямое вычисление константы регулятора и функции Беллмана // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. VI конф., 2000. С. 3.
4. *Киселёв Ю.Н.* Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Матер. науч. сем., Планерное, Моск. обл. М.: Макс Пресс, 2003. С. 57–67.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.

Критерий корректности в параболической обратной задаче (Correctness criterion in an inverse parabolic problem)*

А. Б. Костин (A. B. Kostin)

НИЯУ МИФИ, Москва, Россия

abkostin@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ рассматривается задача нахождения пары функций $\{u(x,t); f(x)\}$ из условий

$$u_t(x,t) - Lu(x,t) = h(x,t)f(x), \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{B}\,u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x,t)\,d\mu(t) = \chi(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

где функции h, μ, χ заданы, причем $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$, $\mathcal{B}\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, а L — равномерно эллиптический оператор вида

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы ПКС НИЯУ МИФИ, проект 02.a03.21.0005 (27.08.2013).

с коэффициентами $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $c \in L_\infty(\Omega)$, $c(x) \le 0$, $c(x) \not\equiv 0$ в Ω; скалярная функция $\mu(t)$ принадлежит $\mathrm{BV}[0,T]$, $\mu(0) = \mu(0+)$. Оператор краевых условий $\mathcal{B}$ либо первого, либо третьего (второго) рода.

Определение 1. *Обобщенным решением* обратной задачи называется пара функций $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q)$ и $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Определение 2. Обратная задача (1)–(3) называется *корректной*, если для любой функции $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ такой, что $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, существует единственная функция $f(x) \in L_2(\Omega)$, для которой решение $u(x,t;f)$ прямой задачи (1), (2) удовлетворяет условию (3) и при этом справедлива оценка устойчивости

$$\|f\|_{2,\Omega} \le C\,\|L\chi\|_{2,\Omega}.$$

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-L\,v(x) = \lambda\,v(x), \quad x \in \Omega, \qquad \mathcal{B}\,v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

обозначим через $\{e_k(x)\}$ и $\{\lambda_k\}$, занумеровав λ_k в порядке возрастания модуля (с учетом кратности) и считая, что $\|e_k\|_{2,\Omega} = 1$. Введем в рассмотрение следующую систему функций ($k = 1, 2, \dots$):

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_k\,(t-\tau)}\,h(x,\tau)\,d\tau \right) d\mu(t)\,e_k(x) \equiv \beta_k(x)\,e_k(x). \quad (4)$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все приведенные выше условия. Обратная задача* (1)–(3) *корректна только тогда, когда система функций* $\{\psi_k(x)\}$ *образует базис Рисса в пространстве* $L_2(\Omega)$.

Замечание. Обратная задача (1)–(3) может трактоваться как задача управления. Например, в случае функции $\mu(t)$, равной единичному скачку при $t = t_1 \in (0,T]$, условие (3) приобретает вид $u(x,t_1) = \chi(x)$. Тогда задача (1)–(3) состоит в нахождении источника $f \in L_2(\Omega)$ (управления), переводящего систему из начального состояния (2) в финальное состояние (3) за время t_1. В этом случае система $\{\psi_k(x)\}$ приобретает вид

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int_0^T e^{-\lambda_k(T-\tau)}\,h(x,\tau)\,d\tau\,e_k(x).$$

В работе [3] получено следующее достаточное условие корректности задачи (1)–(3).

Теорема 2. *Пусть* $\mu(t) \nearrow$ *на* $[0,T]$, *выполнены неравенства*

$$|l(h)(x)| \geq \delta > 0, \quad x \in \Omega, \qquad h(x,t)l(h)^{-1}(x) \geq 0, \quad (x,t) \in Q,$$

и хотя бы одно из условий

(i) $h_t(x,t)l(h)^{-1}(x) \geq 0$;

(ii) $d\mu(t) = \omega(t)\,dt$ *с функцией* $\omega \in W_1^1(0,T)$ *такой, что справедливо неравенство* $\omega'(t) + c(x)\,\omega(t) \leq 0$ *в* Q.

Тогда существует и притом единственное решение обратной задачи (1)–(3) $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ *и справедлива оценка устойчивости*

$$\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq C\,\|L\chi\|_{2,\Omega}.$$

В работе [4] близкие результаты получены в обратных задачах для уравнений в гильбертовом пространстве. В качестве следствия приведенных результатов получены достаточные условия базисности Рисса широкого класса систем функций вида (4).

Список литературы

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
2. *Костин А.Б.* Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника // Диф. уравнения. 2008. Т. 44, № 2. С. 246–256.
3. *Костин А.Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 10. С. 3–46.
4. *Костин А.Б.* Критерии единственности решения и корректности в обратной задаче об источнике // Функциональный анализ. М.: ВИНИТИ, 2017. С. 81–119. (Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Темат. обзоры; Т. 133).