Задача управления для системы второго порядка при наличии возмущений (Control problem for a second-order system in the presence of perturbations)*

Л. Н. Лукьянова (L. N. Luk'yanova)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

lln@cs.msu.su

Рассматривается задача терминального управления для линейной системы второго порядка, содержащей управляемые параметры и параметры возмущений. В текущий момент времени доступна информация о предыстории поведения возмущения. Будущее поведение параметра возмущения неизвестно. Известно множество, его ограничивающее. В работах [1–5] получены теоремы существования решений дифференциальных игр с нефиксированным моментом окончания. В настоящей работе приводится теорема существования решения игры с нефиксированным временем окончания для инерционного объекта второго порядка. Предложена конструкция управления, использующая знание возмущения в текущий момент времени, позволяющая при неэкстремальном параметре возмущения закончить процесс приведения в конечное положение раньше гарантированного времени окончания.

1. Постановка задачи. Пусть фазовые координаты объекта $z \in E^n$ изменяются со временем по закону

$$z'' + \alpha z'(t) = \varphi(u, v), \qquad z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0, \tag{1}$$

где $u(t)$ — вектор управления, $v(t)$ — вектор возмущения. Векторы $u(t)$ и $v(t)$ являются измеримыми функциями, значения которых лежат в компактных множествах $U \in E^r, V \in E^s$. При выборе управления $u(t)$ в момент t возможно использовать лишь знание начального положения z_0 и возмущения $v(t)$. Здесь $\alpha \in E^1$, $\alpha > 0$. Относительно функции $\varphi\colon E^r \times E^s \to E^n$ предположим, что она непрерывна по своим аргументам и множество

$$\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v)\colon\ u \in U\}$$

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

выпукло при каждом $v \in V$. Вектор возмущения $v(t)$ порождает также движение вектора $y(t) \in E^n$, подчиняющееся уравнению

$$y''(t) + \beta y'(t) = v(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

На движение вектора $y(t)$ наложено ограничение: он не может покидать область C, определенную неравенствами

$$(\psi_k, y(t)) < w_k, \qquad k = 1, \ldots, \ell.$$

Задача состоит в таком выборе управления $u(t)$ по вектору возмущения $v(t)$ согласно приведенным выше правилам, что $z(t) \in M$ в некоторый момент времени t, где M — выпуклое замкнутое множество, до того как вектор y покинет множество C. Множество M может иметь вид

$$M = a + M^0, \tag{2}$$

где M^0 — линейное подпространство.

2. Формулировка результата. Предположим, что справедливо включение

$$0 \in D = \bigcap_{v \in V} \varphi(U, v),$$

где D — телесное множество. Рассмотрим уравнение относительно λ, u и m при фиксированном $v \in V, z(T_1)$:

$$\varphi(u, v) = \lambda(m - z(T_1)), \qquad u \in U, \quad m \in M, \tag{3}$$

где

$$z(T_1) = z_0 + z_0'\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T_1}}{\alpha}\left(2 + \frac{1}{\alpha T_1}\right) + \frac{1}{\alpha^2 T_1}\right), \qquad T_1 > 0.$$

При этом ищется решение с $\lambda \geq 0$, если только M не имеет вида (2). В последнем случае знак λ произволен. Обозначим через $\lambda(v, s)$ максимальное λ, при котором система (3) совместна.

Допустим, что система (3) совместна при любом $v \in V$ и выбрано какое-либо измеримое управление $v(t) \in V$. Тогда согласно [3] каждому $v(t)$ можно поставить в соответствие решение системы (3) $u(t), m(t)$ так, что функции $u(t)$, $m(t)$, $\lambda(v(t))$ измеримы. Положим

$$\lambda_0(v, t, T_1 + T_2) = \frac{1 - e^{-\alpha(T_1 + T_2 - t)}}{\alpha} \lambda(v),$$

$$\lambda_k(v, t, T) = \frac{\left(\psi_k, \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta} v(t)\right)}{w_k - \left(\psi_k, y_0 + \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} y_0'\right)}.$$

Теорема. *Пусть определена функция* $\lambda_0(v)$, $v \in V$, *и для каждого* $T_1 > 0$ *существует такое число* $T_2 > T_1$, *что*

$$\min_{v(\cdot)} \max \Big\{ \int_{T_1}^{T_1+T_2} \lambda_0(v(t), t, T_1 + T_2)\, dt,$$

$$\int_0^{T_1+T_2} \lambda_1(v(t), t, T_1 + T_2)\, dt, \ldots, \int_0^{T_1+T_2} \lambda_\ell(v(t), t, T_1 + T_2)\, dt \Big\} \geq 1. \quad (4)$$

Тогда за счет выбора управлений $u(t)$ *из уравнения*

$$\varphi(u(t), v(t)) = \lambda(v(t))(m(t) - z(T_1))$$

найдется такой момент времени t^*, *что либо* $z(t^*) \in M$, $y(t^*) \in C$, $t^* \leq T_1 + T_2$, *либо* $y(t^*) \in \partial C$, $t^* \leq T_1 + T_2$.

3. Доказательство. Пусть $v(t) \in V$, $t \geq 0$, — произвольная измеримая функция. Опишем способ выбора управления $u(t)$ на отрезках времени $t \in [0, T_1]$ и $t \in [T_1, T_2]$, $0 \leq T_1 \leq T_2$. Для $t \in [0, T_1]$ положим

$$\varphi(u(t), v(t)) = -\frac{e^{-\alpha t}}{T_1} z_0' = d(t) \in D. \quad (5)$$

Отметим, что при увеличении T_1 величина вектора d может быть сделана малой. При таком выборе управления $u(t)$ для векторов $z(T_1)$, $z'(T_1)$ имеем соотношения

$$z(T_1) = z_0 + \frac{1 - e^{-\alpha T_1}}{\alpha} z_0' - \frac{e^{-\alpha T_1}\left(T_1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}}{\alpha T_1} z_0' =$$

$$= z_0 + z_0' \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha T_1}}{\alpha} \left(2 + \frac{1}{\alpha T_1} \right) + \frac{1}{\alpha^2 T_1} \right), \quad (6)$$

$$z'(T_1) = 0. \quad (7)$$

Для $t \in [T_1, T_2]$ положим

$$\varphi(u(t), v(t)) = \lambda(v(t))(m(t) - z(T_1)). \quad (8)$$

При таком выборе управления $u(t)$, $t \in [T_1, T_1 + T_2]$, для вектора $z(T_2)$ имеем соотношение

$$z(t) = z(T_1) + \int_{T_1}^{t} \frac{1 - e^{-\alpha(t-s)}}{\alpha} \lambda(v(s))(m(s) - z(T_1))\, ds =$$

$$= z(T_1)\left(1 - \int_{T_1}^{t} \frac{1 - e^{-\alpha(t+T_1-s)}}{\alpha}\lambda(v(s))\,ds\right) +$$

$$+ \int_{T_1}^{t} \frac{1 - e^{-\alpha(t+T_1-s)}}{\alpha}\lambda(v(s))m(s)\,ds. \qquad (9)$$

При выполнении условий теоремы в случае выполнения соотношения $\int_{T_1}^{T_1+T_2} \lambda_0(v(t), t, T_1 + T_2)\,dt = 1$ найдется момент $t^* \le T_1 + T_2$, для которого $z(t^*) = 0$. При этом $t^* = t^*(v(\cdot))$ зависит от управления $v(\tau)$, $\tau \in [T_1, t^*]$. □

4. Вспомогательное соотношение для нахождения T_2 из (4). Приведем достаточное условие, гарантирующее выполнение соотношения (4). Положим $f(t) = (1 - e^{-\alpha(T_1+T_2-t)})/\alpha > 0$, $t \ge 0$. Имеет место следующая цепочка соотношений:

$$\min_{v(t)\in V} \int_{T_1}^{T_2} f(t)\lambda(v(t))\,dt \ge \int_{T_1}^{T_2} f(t) \min_{v\in V} \lambda(v)\,dt = \min_{v\in V} \lambda(v) \int_{T_1}^{T_2} f(t)\,dt =$$

$$= \min_{v\in V} \lambda(v) \left(\frac{T_2 - T_1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\big(e^{-\alpha T_1} - e^{-\alpha T_2}\big)\right). \qquad (10)$$

Следовательно, если

$$\rho = \min_{v\in V} \lambda(v) > 0, \qquad (11)$$

то при достаточно больших T_2 соотношение (4) выполнено. При этом левая часть в (4) больше, чем $T\rho$, и поэтому для T справедлива оценка $T \le \rho^{-1}$.

Список литературы

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные труды. М.: Макс Пресс, 2004.
2. *Осипов Ю.С.* Избранные труды. М.: Изд-во МГУ, 2009.
3. *Пшеничный Б.Н. Остапенко В.В.* Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992.
4. *Никольский М.С.* Исследование обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, №2. С. 211–217.
5. *Григоренко Н.Л.* Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.