Об оценивании множества достижимости для некоторых классов управляемых объектов (Estimation of the attainable set for some classes of control objects)

М. С. Никольский (M. S. Nikolskii)

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

mni@mi.ras.ru

Проблемам изучения и оценивания множеств достижимости управляемых объектов посвящено довольно много работ (см., например, [1–4] и др.). Мы будем заниматься оцениванием сверху множеств достижимости квазилинейных управляемых объектов вида

$$\dot{x} = A(u)x, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^r$, $r \geq 1$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$, $A(u)$ — квадратная матрица порядка n, зависящая от $u \in U$ непрерывным образом. Фиксировано начальное состояние управляемого объекта (1) $x(0) = x_0$, причем вектор x_0 является ненулевым и все его координаты неотрицательны. Рассматриваются всевозможные измеримые по Лебегу управления $u(t) \in U$ при $t \in [0, T]$, где $T > 0$ — фиксированное число. Нас будет интересовать множество достижимости $D(x_0, T)$ управляемого объекта (1).

Для приложений представляет интерес получение оценок сверху для $D(x_0, T)$ в виде просто устроенных компактных множеств. Такими множествами могут быть, например, шары, эллипсоиды, параллелепипеды и т.д. Мы в качестве оценивающих сверху множеств будем рассматривать параллелепипеды со сторонами, параллельными осям координат. Построение оценивающего сверху параллелепипеда производится с помощью построения вершинных точек искомого параллелепипеда.

Предполагается выполненным следующее

Условие S. При любом $u \in U$ все элементы $a_{ij}(u)$ матрицы $A(u)$, где $i \neq j$, неотрицательны.

Введем в рассмотрение две квадратные матрицы B и C порядка n с элементами $b_{ij} = \max_{u \in U} a_{ij}$, $c_{ij} = \min_{u \in U} a_{ij}$. Рассмотрим также матричные экспоненты $\exp(tB)$, $\exp(tC)$, где $t \in \mathbb{R}^1$. Для произвольных векторов ξ, η из $\mathbb{R}^n$ условимся писать $\xi \le \eta$ тогда и только тогда, когда при всех $i = 1, \ldots, n$ выполняются неравенства $\xi_i \le \eta_i$.

В работе обосновываются следующие векторные неравенства:

$$\exp(TC)x_0 \le z \le \exp(TB)x_0 \tag{2}$$

для произвольного вектора $z \in D(x_0, T)$. Отметим, что существуют надежные методы для приближенного вычисления левой и правой частей векторного неравенства (2) с любой заданной точностью. Поэтому векторные неравенства (2) являются конструктивными. Векторные неравенства (2), расписанные в покоординатной форме, определяют некоторый параллелепипед P, причем согласно (2)

$$D(x_0, T) \subset P.$$

Отметим, что если $B = A(u^1)$, $C = A(u^2)$ при некоторых векторах u^1, u^2 из U, то полученная оценка является неулучшаемой по объему оценивающего сверху параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат. Это обстоятельство имеет место, например, если все элементы, кроме одного, матрицы $A(u)$ являются не зависящими от $u \in U$. Заметим также, что при сделанных предположениях можно обосновать, что все элементы матриц $\exp(tB)$ и $\exp(tC)$ являются неотрицательными величинами при $t \ge 0$.

Пример. В качестве примера полученных результатов рассмотрим двумерную билинейную управляемую систему вида

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + ux_2, \qquad \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \tag{3}$$

где константы a_{11}, a_{22} отрицательны, а константа a_{21} положительна, управление $u \in U = [p, q]$, причем $0 < p < q$. Эту систему можно рассматривать как управляемый вариант известной в политологии модели Ричардсона вооружения двух государств. Тогда величины x_1, x_2 интерпретируются как расходы двух государств на вооружение, причем в динамике расходов первого государства коэффициент при x_2 является управляемым и его можно изменять измеримым по Лебегу образом. В этом примере согласно нашим результатам нужно вычислить только элементы b_{12}, c_{12}, так как остальные элементы b_{ij}, c_{ij} совпадают с элементами a_{ij} матрицы $A(u)$. Нетрудно видеть, что $b_{12} = q$, $c_{12} = p$. Отметим, что в этом примере оценочный прямоугольник P, возникающий с помощью векторных неравенств (2), обладает свойством минимальности площади среди всех прямоугольников, содержащих множество достижимости $D(x_0, T)$, со сторонами, параллельными осям координат.

Заметим, что в этом примере матричные экспоненты $\exp(tB)$, $\exp(tC)$ могут быть вычислены в аналитической форме.

Используя результаты этих вычислений, можно проследить поведение прямоугольника P как функции параметров a_{11}, a_{21}, a_{22}, p, q и времени $T > 0$. Используя это обстоятельство, можно оценить в грубой форме динамические возможности управляемого объекта (3) при меняющемся $T > 0$, что представляет интерес для приложений.

В заключение рассмотрим управляемые объекты более общего вида, нежели управляемые объекта вида (1):

$$\dot{x} = A(u)x + h(t), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$, U — компакт из $\mathbb{R}^r$, $x(0) = x_0$, причем все его компоненты неотрицательны, $A(u)$ — непрерывная на U квадратная матрица порядка n, $h(t)$ — непрерывная n-мерная векторная функция на $[0, T]$. На управляемый объект (4), помимо условия S на функцию $A(u)$, наложим еще условие неотрицательности всех скалярных компонент $h_i(t)$ векторной функции $h(t)$ для $t \in [0, T]$. При сделанных предположениях для точек $z \in D(x_0, T)$ в докладе обосновываются следующие векторные неравенства:

$$\eta(T, x_0) \le z \le \xi(T, x_0), \tag{5}$$

где функции $\xi(t, x_0)$, $\eta(t, x_0)$ являются соответственно решениями с начальным вектором x_0 следующих уравнений:

$$\dot{\xi} = B\xi + h(t), \qquad \dot{\eta} = C\eta + h(t)$$

(определение матриц B, C см. выше). Отметим, что решения $\xi(t, x_0)$, $\eta(t, x_0)$ с использованием матричных экспонент $\exp(tB)$, $\exp(tC)$ могут быть явно выписаны по известной формуле Коши. Это обстоятельство делает неравенства (5) конструктивными. Расписывая векторные неравенства (5) в покоординатной форме, мы получим некоторый параллелепипед Q и включение $D(x_0, T) \subset Q$.

Список литературы

1. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
2. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal calculus for estimation and control. Birkhäuser, 1997.

3. *Зайцев В.В.* Покоординатные оценки множества достижимости динамической системы // Диф. уравнения. 1993. Т. 29, №4. С. 575–584.
4. *Гусев М.И.* О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 60–69.

Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом (Reachable set for a Dubins car with one-sided turn)

В. С. Пацко (V. S. Patsko), А. А. Федотов (A. A. Fedotov)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

patsko@imm.uran.ru, andreyfedotov@mail.ru

Работа посвящена исследованию множества достижимости в момент для “машины Дубинса” — одной из самых популярных в задачах математической теории управления и прикладных работах моделей управляемого движения на плоскости. Динамика движения с постоянной по величине линейной скоростью и с оговоренным диапазоном возможных значений угловой скорости задается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка. Две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение объекта на плоскости, третья переменная — угол направления вектора скорости. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего параметра принадлежат замкнутому отрезку.

В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал статью [1] (относящуюся скорее к теории функций), из которой для указанной динамики с симметричным относительно нуля ограничением на управление вытекает решение задачи быстродействия. Было установлено, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно постоянного управления с не более чем двумя переключениями. Были выделены