

Список литературы

1. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // *Am. J. Math.* 1957. V. 79, N 3. P. 497–516.
2. *Марков А.А.* Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // *Сообщ. Харьков. мат. о-ва. Сер. 2.* 1889. Т. 1, № 2. С. 250–276.
3. *Isaacs R.* Games of pursuit: Scientific report of the RAND Corporation, Santa Monica, 1951.
4. *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // *Изв. РАН. ТиСУ.* 2003. № 3. С. 8–16.
5. *Fedotov A., Patsko V., Turova V.* Reachable sets for simple models of car motion // *Recent advances in mobile robotics* / Ed. by A.V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172.
http://home.imm.uran.ru/kumkov/Intech_paper_2011
6. *Пацко В.С., Федотов А.А.* Множество достижимости для машины Дубинса с односторонним поворотом // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2018. Т. 24, № 1. С. 143–155.
7. *Choi H.* Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: PhD Dissertation. Univ. Michigan, 2014.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ (ON A PROBLEM OF GROUP PURSUIT WITH FRACTIONAL DERIVATIVES)*

Н. Н. Петров (N. N. Petrov)

Удмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

kma3@list.ru

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–3], причем,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

кроме углубления классических методов решения, активно ведется поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работе [4] рассматривалась задача преследования двух лиц, описываемая уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки.

В данной работе рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями участников и их движение описывается уравнениями с дробными производными. Предполагается, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего. Приведены достаточные условия многократной поимки заданного числа убегающих.

Определение 1 [5]. Пусть $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$ — абсолютно непрерывная функция, $\mu \in (0, 1)$. Производной по Капуто порядка μ функции f называется функция $D^{(\mu)}f$ вида

$$(D^{(\mu)}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\mu} ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geq 2$) рассматривается дифференциальная игра $n + m$ лиц: n преследователей $P_1, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, \dots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\mu)}x_i = ax_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \quad u_i \in V. \quad (1)$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\mu)}y_j = ay_j + v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \quad v_j \in V. \quad (2)$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, $i \in I = \{1, \dots, n\}$, $j \in J = \{1, \dots, m\}$, V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$, a — вещественное число. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j .

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее r преследователей ($r \geq 1$, $1 \leq q \leq m$) при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления и, кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geq rq$, $m \geq q$.

Многократная поимка убегающего в задаче простого преследования исследовалась в работе [6], а в примере Л.С. Понтрягина — в работе [7]. Проблема поимки заданного числа убегающих в задаче простого

преследования при условии, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [8], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л.С. Понтрягина получены в [9]. Задача преследования одного убегающего с фазовыми ограничениями и дробными производными порядка $\mu \in (0, 1)$ рассматривалась в [10].

Вместо систем (1), (2) рассмотрим систему

$$D^{(\mu)} z_{ij} = az_{ij} + u_i - v_j, \quad z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \quad u_i, v_j \in V.$$

Определение 2. В игре *происходит r -кратная поимка* (при $r = 1$ поимка) убегающего E_β , если существует $T > 0$, при котором для любых допустимых управлений $v_j(t)$, $j \in J$, $t \in [0, \infty)$, убегающих E_j , $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s))$, $s \in [0, \infty)$, $j \in J$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, моменты времени $\tau_1, \dots, \tau_r \in [0, T]$ и попарно различные натуральные числа $i_1, \dots, i_r \in I$ такие, что $z_{i_p \beta}(\tau_p) = 0$ для всех $p = 1, \dots, r$.

Определение 3. В игре *происходит r -кратная поимка* (при $r = 1$ поимка) не менее q убегающих, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, убегающих найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s))$, $s \in [0, \infty)$, $j \in J$ преследователей $P_1, \dots, P_n$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \quad |M| = q, \quad \{N_\alpha, \alpha \in M\}, \quad N_\alpha \subset I, \quad |N_\alpha| = r \quad \forall \alpha \in M,$$

$$N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta: \alpha \neq \beta,$$

такие, что группа преследователей $\{P_\alpha, \alpha \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r -кратную поимку убегающего E_β , причем если преследователь P_α ловит убегающего E_β , то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения: $\text{Int } A$, $\text{co } A$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества A ,

$$\lambda(z, v) = \sup\{\lambda \geq 0 \mid -\lambda z \in V - v\},$$

$$\Omega_N(p) = \{(i_1, \dots, i_p) \mid i_\alpha \in N \quad \forall \alpha = 1, \dots, p, \quad i_\alpha \neq i_\beta \text{ при } \alpha \neq \beta\},$$

$$\delta_N(\beta) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_{\alpha\beta}^0, v).$$

Теорема 1. Пусть $m = 1$, $a \leq 0$ и $\delta_I(1) > 0$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка.

Теорема 2. Пусть $a \leq 0$ и для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, найдется множество M , $|M| = q - p$, такое, что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Теорема 3. Пусть $a \leq 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого $p \in \{0, \dots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - pr$, существует множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, такое, что

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \text{Int co}\{z_{\alpha\beta}^0, \alpha \in \Lambda\}$$

для всех $\beta \in M$. Тогда в игре происходит r -кратная поимка не менее q убегающих.

Список литературы

1. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990.
2. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992.
3. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009.
4. Чикрий А.А., Матичин И.И. Игровые задачи для линейных систем дробного порядка // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 262–278.
5. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent. II // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1967. N 13. P. 529–539.
6. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. Моск. ун-та. Вычислительная математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
7. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // ПММ. 1997. Т. 61, № 5. С. 725–732.
8. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Диф. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 724–726.
9. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. С. 48–54.

10. Петров Н.Н. Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 1. С. 54–59.

ON NECESSARY CONDITIONS IN THE MAYER PROBLEM WITH DIFFERENTIAL INCLUSION*

Evgenii Polovinkin

*Moscow Institute of Physics and Technology (State University),
Moscow, Russia*

polovinkin.es@mipt.ru

The author developed a direct method for obtaining necessary optimality conditions for the solution of the Mayer problem, in which the differential inclusion is introduced as a constraint under the conditions of unboundedness and pseudo-Lipschitz property of the right-hand side of the differential inclusion. The necessary optimality conditions are obtained in the form of a differential inclusion of the Euler–Lagrange type and generalize the results from the works of F. Clarke and the author (see [1, 2]).

Statement of the problem and conditions. We consider the interval $T := [0, 1]$, closed sets $C_0, C_1 \subset \mathbb{R}^n$, a locally Lipschitz function $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ and a multivalued mapping $F: T \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, with the help of which we have the differential inclusion of the form

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{for a.e. } t \in T. \quad (1)$$

The symbol $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ denotes the (possibly empty) set of all trajectories $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0) \subset \text{AC}(T, \mathbb{R}^n)$ of the differential inclusion (1) with the initial condition $x(0) \in C_0$.

The *Mayer problem* is to find the minimum of the values $\varphi(x(1))$ over all end points $x(1) \in C_1$ of the trajectories $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$.

Let $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ be a trajectory that solves the Mayer problem; i.e., its end value $\hat{x}(1) \in C_1$ is such that $\varphi(\hat{x}(1))$ takes a minimum value for all

*Supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00259) and by the Russian Science Foundation (project no. 18-11-00073).