Определение функции управления для динамических систем нецелого порядка (Determination of a control function for dynamic systems of non-integer order)

Е. А. Постнова (E. A. Postnova)

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

postnova@ipu.ru

Интегро-дифференциальное исчисление нецелого (дробного) порядка сравнительно недавно применяют для описания динамических систем с управлением, поскольку с его появлением стало возможным учитывать наличие как пространственных, так и временны́х нелокальных зависимостей [1]. В данной работе этот математический аппарат использовался для исследования задач оптимального управления линейной динамической системой нецелого порядка, когда начальные и конечные условия имеют параметрический вид, т.е. являются некоторыми функциями, зависящими от временно́го параметра T. Главный акцент был поставлен на отыскании функции управления с минимальной нормой. Дополнительно к этому проанализированы зависимости нормы управления от значений показателей дробного дифференцирования и времени управления.

В работе рассматривались два типа линейных систем дробного порядка: одномерная система общего вида и двумерная система частного вида — двойной интегратор. Первая из них описывается уравнением следующего вида:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} q(t) = aq(t) + bu(t), $$

где $q(t)$ — фазовая координата системы; D_t^{α} — оператор дробного дифференцирования, понимается в смысле Капуто; $u(t)$ — искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; a, b — некоторые константы.

Вторая линейная система нецелого порядка — двойной интегратор представляется в виде системы двух уравнений

$$ \begin{cases} {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} q_1(t) = q_2(t), \\ {}_{t_0}^{C}D_t^{\beta} q_2(t) = u(t), \end{cases} $$

где $q_1(t)$ и $q_2(t)$ — фазовые координаты системы, зависящие от времени $t \in [t_0, T]$; $u(t)$ — искомая функция управления, заданная в пространстве $L_\infty[t_0, T]$; α и β — показатели дробного дифференцирования, принимают значения на интервале $(0, 1]$; D_t^α и D_t^β — операторы дробного дифференцирования. Случай, когда $u(t) \in L_2[t_0, T]$, был рассмотрен в [2].

Начальные и конечные условия имели параметрический вид, определяемый законами движения системы. Рассмотрены четыре различных случая, которые при $\alpha = 1$ соответствуют переводу систем из состояния покоя в равномерное, равноускоренное и периодическое движения, а также из равномерного движения в равноускоренное. Например, в последнем случае были выбраны параметрические зависимости следующего вида:

$$\begin{cases} q_1^0 = t_0, \\ q_2^0 = 1, \\ q_1^T = (T - t_0)^2 + (T - t_0) + 1, \\ q_2^T = 2(T - t_0) + 1. \end{cases}$$

При решении поставленных задач для определения функции управления применялся метод моментов [3], позволяющий в том числе работать с разрывными управлениями и рассматривать явные ограничения на норму управления. На этапе поиска минимального значения функции только в системах второго типа при $u(t) \in L_\infty[t_0, T]$ возникает трансцендентное уравнение, корни которого были найдены графическим способом.

В результате проведенных исследований были получены следующие результаты. Построено решение поставленной задачи оптимального управления движением, получены явные формулы для управления, и вычислена его норма. Исследовано поведение нормы и времени оптимального управления в зависимости от показателей дробного дифференцирования и продемонстрировано, что во всех случаях перевода систем из состояния равномерного движения в равноускоренное норма управления имеет экстремум на малых временах ($T < 1$). Физически это может означать, что существуют такие параметры, при которых внешнее управляющее воздействие достигает минимального значения. Сравнение норм управлений для неклассического и классического случаев ($\alpha = 1$, $\beta = 1$) выявило резкое отличие в поведении систем на малых временах и аналогичное — на больших.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при расчетах управления для систем нецелого порядка. Практическое применение результатов может привести к экономии энергетических затрат на управление всей системы в целом.

Список литературы

1. *Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.* Theory and applications of fractional differential equations. Elsevier, 2006.
2. *Постнова Е.А.* Оптимальное управление движением системы, моделируемой двойным интегратором нецелого порядка // Проблемы управления. 2018. № 2 (в печати).
3. *Кубышкин В.А., Постнов С.С.* Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.

Задачи оптимального управления и обратные задачи для уравнений первого порядка в банаховых пространствах (Optimal control and inverse problems for first-order equations in Banach spaces)

А. И. Прилепко (A. I. Prilepko)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

prilepko.ai@yandex.ru

Пусть заданы: число $T > 0$, равномерно выпуклые банаховы пространства E, E_1, $U = V(O,T;E_1)$ и их сопряженные пространства E^*, E_1^*, $U^* = V^*(O,T;E_1^*)$, операторы $B(t)$, $B^*(t)$ такие, что $B(t)u(t) \in \in V(O,T;E)$, $B^*(t)u^*(t) \in V^*(O,T;E^*)$. Пусть $\mathcal{A}(t)$ — семейство линейных операторов, а $S_{\mathcal{A}}(t,\tau)$ — эволюционный оператор соответствующей задачи Коши.

Задача управления. Для данного элемента $e \in E$ найти пару $u(t) \in U$ и $y(t)$ из условий

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)y(t) + B(t)u(t), \quad 0 < t < T, \qquad y(0) = 0, \quad y(T) = e. \qquad (1)$$