4. *Zelikin M.I., Lokutsievskiy L.V., Hildebrand R.* Typicality of chaotic fractal behavior of integral vortices in Hamiltonian systems with discontinuous right hand side // J. Math. Sci. 2017. V. 221, N 1. P. 1–136.
5. *Hartman Ph.* Ordinary differential equations. New York: J. Wiley & Sons, 1964.

Динамическая реконструкция входов диффузионной стохастической системы (Dynamical reconstruction of inputs in a stochastic diffusion system)*

В. Л. Розенберг (V. L. Rozenberg)

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

rozen@imm.uran.ru

Задачи реконструкции входов динамических систем на основе неточной и/или неполной информации о фазовом состоянии, возникающие во многих научных и прикладных исследованиях, как правило, являются некорректными и требуют применения регуляризующих процедур. Подход к решению, предложенный в работах А.В. Кряжимского и Ю.С. Осипова [1] изначально для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и получивший название метода динамического обращения, основан на сочетании принципов теории позиционного управления и идей теории некорректных задач. Задача восстановления сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью), при этом адаптация модельных управлений к результатам текущих наблюдений обеспечивает аппроксимацию неизвестных входных воздействий. Обзор алгоритмов динамического восстановления входов для систем ОДУ приведен в [2].

В докладе с позиций указанного подхода исследуется задача для системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с диффузией, зависящей от фазового состояния, в постановке, в которой

*Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы УрО РАН, проект 18-1-1-9 “Оценивание динамики нелинейных управляемых систем и маршрутная оптимизация”.

одновременная реконструкция неслучайных возмущений в детерминированной и стохастической частях системы проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций случайного процесса. Скалярный случай задачи был рассмотрен в [3].

Рассматривается система СДУ с диффузией, зависящей от фазового состояния:

$$\begin{gathered} dx(t,\omega) = (A(t)x(t,\omega) + B(t)u_1(t) + f(t))\,dt + U_2(t)x(t,\omega)\,d\xi(t,\omega), \\ x(0,\omega) = x_0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $t \in T = [0,\vartheta]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}$, x_0 — известная детерминированная или случайная (нормально распределенная) величина; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство; $\xi(t,\omega)$ — стандартный скалярный винеровский процесс (т.е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной t); $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times n$, $n \times r$ и $n \times 1$ соответственно. На систему действуют два внешних возмущения: вектор $u_1(t) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_2(t)\} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Полагаем, что векторы u_1 и u_2 принимают значения из заданных выпуклых компактов S_{u1} и S_{u2}, их элементы принадлежат пространству $L_2(T)$, а координаты вектора u_2 неотрицательны. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса, вектор u_2 регулирует амплитуду случайных помех.

Решение системы (1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. При сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [4].

В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0:l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(\tau_i)$. Полагаем, что $l = l(N)$ и существуют оценки m_i^N математического ожидания процесса $m(t) = Mx(t)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(t) = M(x(t)-m(t))(x(t)-m(t))'$ такие, что выполняется соотношение

$$P\Big(\max_{i\in[1:l(N)]}\big\{\|m_i^N - m(\tau_i)\|, \|D_i^N - D(\tau_i)\|\big\} \le h(N)\Big) = 1 - g(N), \tag{2}$$

причем $h(N), g(N) \to 0$ при $N \to \infty$.

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, определяющих случайный процесс $x(\cdot)$, по дискретной информации о его реализациях, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомых входов в метрике соответственно пространств $L_2(T;\mathbb{R}^r)$ и $L_2(T;\mathbb{R}^n)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временно́й дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$. Такую обратную задачу можно трактовать как восстановление входа СДУ в условиях, когда возможны одновременные измерения достаточно большого количества траекторий (например, движения однотипных частиц).

Специфика системы (1) допускает сведение (в соответствии с методом моментов [5]) задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Полученная совокупная система нелинейна по фазовым переменным. Для создания конечношаговой программно-ориентированной процедуры восстановления входов $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ фактически применяется разрешающий алгоритм из [1], при этом доказывается конструктивное согласование его параметров с количеством доступных измерению реализаций исходного случайного процесса.

Приведем основные результаты работы.

Лемма. *Стандартные статистические оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N $(N > 1)$ реализациям случайных величин $x(\tau_i)$, допускают модификации, обеспечивающие выполнение* (2). *Зависимости $l(N)$, $h(N)$ и $g(N)$ выписываются явно.*

Теорема. *При согласовании параметров алгоритма реконструкции и величин N, $\delta(N)$, $h(N)$ и $g(N)$ имеет место сходимость его выхода $(v_1^N(\cdot), v_2^N(\cdot))$ к реальным воздействиям $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))$ в среднеквадратичной метрике. В предположении об ограниченности вариации реальных входов справедлива следующая оценка точности алгоритма относительно количества реализаций процесса, доступных измерению*:

$$P\left(\max\left\{\|v_1^N(\cdot) - u_1^*(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^r)}, \|v_2^N(\cdot) - u_2^*(\cdot)\|_{L_2(T;\mathbb{R}^n)}\right\} \le C_1\left(\frac{1}{N}\right)^{2/13}\right) =$$

$$= 1 - C_2\left(\frac{1}{N}\right)^{2/13}, \qquad (3)$$

где $u_1^*(\cdot)$ и $u_2^*(\cdot)$ — минимальные по норме входы, порождающие наблюдаемую пару $(m(\cdot), D(\cdot))$, C_1 и C_2 — некоторые константы, не зависящие от оцениваемых величин.

Отметим, что возможны различные модификации оценки (3).

В докладе приводится пример, иллюстрирующий основные конструкции алгоритма.

Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 51–60.
2. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №1. С. 129–161.
3. *Розенберг В.Л.* Динамическая реконструкция возмущений в квазилинейном стохастическом дифференциальном уравнении // Тихоновские чтения 2017: Тез. докл. науч. конф. М.: МГУ, 2017. С. 87–88.
4. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003.
5. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.

Численное решение задачи оптимального управления с интегральным функционалом качества (Numerical solution of an optimal control problem with integral cost functional)

С. П. Самсонов (S. P. Samsonov)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

samsonov@cs.msu.su

Работа посвящена рассмотрению численных методов решения линейных задач оптимального управления с интегральным функционалом качества. Использование линейности управляемой системы позволяет