References

1. *Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S.* On the solvability of problems of guaranteeing control for partially observable linear dynamical systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2012. V. 277. P. 144–159.
2. *Kryazhimskiy A.V., Strelkovskii N.V.* An open-loop criterion for the solvability of a closed-loop guidance problem with incomplete information. Linear control systems // Trudy IMM UrO RAN. 2014. V. 20. N 3. P. 132–147.
3. *Gabasov R.F., Kirillova F.M.* Linear systems optimisation. Functional analysis methods. Minsk: Izd. BGU. 1973. 248 p.
4. *Gindes V.B.* Singular control in optimal systems // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1967. N 7. P. 34–42.

Сопряженные переменные в задачах динамической реконструкции (Adjoint variables in dynamic reconstruction problems)*

Н. Н. Субботина (N. N. Subbotina)[a], Т. Б. Токманцев (T. B. Tokmantsev)[б]

[a]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

[б]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

subb@uran.ru, tokmancev@mail.ru

Введение. В работе предложенный ранее авторами метод решения задач реконструкции траекторий и управлений динамической системы по апостериорной зашумленной информации о реализованной фазовой траектории распространен на решение задач динамической реконструкции. Рассматриваемые модели управляемых динамических систем используются при описании динамических процессов в таких приложениях, как инженерия [4, 1, 2, 5], экономика, биология, медицина, а также в исследовании процессов технологического развития.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 18-01-00264а и 17-01-00074а.

Предлагаемый метод близок к подходу, развитому Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [3], основу которого составляет экстремальное прицеливание на движение модели-поводыря, динамика которой копирует динамику исходной управляемой системы.

Основу предлагаемого авторами метода [6, 7] составляет введение подсистемы сопряженных переменных, движение которой организовано так, что полная система осциллирует вокруг получаемых в режиме онлайн замеров реализующейся фазовой переменной.

Постановка задачи динамической реконструкции. В общем виде модель и соответствующая задача динамической реконструкции могут быть описаны следующим образом:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + G(t, x(t))u(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовые переменные, параметры $u \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, — управления, стесненные ограничениями

$$u \in U = \big\{u_i \in [a_i^-, a_i^+],\ a_i^- < a_i^+,\ i = 1, 2, \ldots, m\big\}. \tag{2}$$

Наблюдатель получает информацию о неаккуратных замерах фазовых переменных $x(t)$ реального (базового) движения системы, т.е. решения $x^*(t)$ задачи (1), (2) в дискретные моменты времени t_i, $t_0 = 0 <$ $< t_1 < \ldots < t_N = T$, причем справедливы соотношения

$$|x(t) - x^*(t)| \leq \delta, \tag{3}$$

где $\delta \in (0, \delta_0]$ — известные оценки погрешностей измерений.

Пусть $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i = 1, \ldots, N$, $\Delta t > 0$.

CRP. После получения в текущий момент $t \geq t_2$ информации о непрерывной интерполяции измерений $y^\delta(\cdot)\colon [0, t] \to \mathbb{R}^n$ нужно реконструировать управление $u^\delta(\cdot)\colon [0, t - \Delta t] \to U$ и порождаемую им траекторию $x^\delta(\cdot)\colon [0, t - \Delta t] \to \mathbb{R}^n$ системы (1), (2) такие, что выполняются соотношения

$$\|x^\delta(\cdot) - x^*(\cdot)\|_C = \max_{\tau \in [0, T - \Delta t]} \|x^\delta(\tau) - x^*(\tau)\| \to 0, \tag{4}$$

$$\|u^\delta(\cdot) - u^*(\cdot)\|_{L_2} = \int_0^{T - \Delta t} \|u^\delta(\tau) - u^*(\tau)\|^2 \, d\tau \to 0, \tag{5}$$

когда $\delta \to 0$, $\Delta t \to 0$.

Решение задачи динамической реконструкции. Чтобы решить задачу реконструкции CRP (4), (5), мы вводим вспомогательную задачу вариационного исчисления (CVP).

Мы рассматриваем интервал $[t_{i-2}, t_i]$, $i = 2, \ldots, N$, фиксированный параметр $\delta \in (0, \delta_0]$, непрерывную интерполяцию $y^\delta(\tau)$, $\tau \in [t_{i-2}, t_i]$, и вводим функционал интегральной невязки вида

$$I_{\tau_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_{i-2}}^{t_i} \left[-\frac{\|x(\tau) - y^\delta(\tau)\|^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\|v(\tau)\|^2 \right] d\tau, \qquad (6)$$

где $\alpha > 0$ — малый регуляризующий параметр, $(\tau_0 = t_{i-2}, x_0) \in D_0 \subset$ $\subset \Pi_T$. Измеримая функция $v(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot), v_{m+1}(\cdot), \ldots, v_n(\cdot))$: $[t_{i-2}, t_i] \to \mathbb{R}^n$ имеет частью $(u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot))$, т.е. сужение на отрезок $[t_{i-2}, t_i]$ допустимого измеримого ограниченного управления в системе (1), удовлетворяющего соотношениям (2). Функция $v(\cdot)$ означает вспомогательное управление для следующей модифицированной базовой динамической системы (1):

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = f(\tau, x(\tau)) + \hat{G}(\tau, x(\tau))v(\tau), \qquad \tau \in [t_{i-2}, t_i], \qquad (7)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовые переменные, управления $v \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют ограничениям

$$v \in V = \big\{ v_i \in [a_i^-, a_i^+],\ a_i^- < a_i^+,\ i = 1, 2, \ldots, m \big\}, \qquad (8)$$

$(n \times n)$-матрица $\hat{G}(\tau, x) = \{\hat{g}_{i,j}(\tau, x)\}$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, n}$, имеет следующую структуру:

$$\hat{g}_{i,j}(\tau, x) = \begin{cases} g_{i,j}(\tau, x), & i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, m}, \\ 0, & i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \\ 0, & i \in \overline{m+1, n}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \quad i \neq j, \\ 1, & i \in \overline{m+1, n}, \quad j \in \overline{m+1, n}, \quad i = j. \end{cases} \qquad (9)$$

Функция $x(\tau)$, $\tau \in [t_{i-2}, t_i]$, в выражении (6) функционала невязки означает решение системы (7), которое выработалось в системе под воздействием допустимого управления $v(\cdot)$ на интервале $[t_{i-2}, t_i]$, и $x(t_{i-2}) = x_0$.

Сейчас при фиксированных $\delta \in (0, \delta_0]$, $\alpha > 0$ мы решаем следующую задачу вариационного исчисления (CVP).

CVP. Минимизировать функционал невязки (6) на всех решениях $x(\cdot)$ системы (7), удовлетворяющих краевым условиям

$$x(t_{i-2}) = x_0 = y^\delta(t_{i-2}), \qquad \frac{dx(t_{i-2})}{dt} = \frac{dy^\delta(t_{i-2})}{dt}. \tag{10}$$

Основной результат. В работе получены достаточные условия на входные данные задачи динамической реконструкции и условия согласования параметров δ, $\alpha = \alpha(\delta)$ и Δt такие, что управления $u^\delta(\tau) = u^{\delta,\alpha(\delta)}(\tau) = u^0(\tau)$, полученные из необходимых условий оптимальности в задаче CVP, удовлетворяют условиям (4), (5), т.е. они решают задачу реконструкции CRP.

Список литературы

1. Optimization techniques: with applications to aerospace systems / Ed. by G. Leitmann. Academic Press, 1962. V. 5.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управления. М.: Наука, 1969.
3. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
5. *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.* Game-theoretical control problems. New York: Springer, 1988.
6. *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.* The method of characteristics in inverse problems of dynamics // Universal J. Control Autom. 2013. V. 1, N 3. P. 79–85.
7. *Subbotina N.N., Tokmantsev T.B.* Hamiltonian constructions in inverse problems of navigation. // IPACS J. Cybernetics and Physics. 2017. V. 6, N 4. P. 256–261.