Асимптотические регуляторы в задачах оптимального экономического развития (Asymptotic stabilizers in problems of optimal economic development)*

А. М. Тарасьев (A. M. Tarasyev)[а,б], **А. А. Усова (A. A. Usova)**[а]

[а]*Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия*

[б]*Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия*

tam@imm.uran.ru, anastasy.ousova@gmail.com

Общая постановка задачи управления на основе моделей экономического роста. В работе рассматриваются задачи оптимального управления, основанные на моделях экономического роста. Модели роста используются при описании динамических процессов в таких приложениях, как экономика, экология, демография, а также в исследовании процессов технологического развития.

В общем виде модель и соответствующая задача управления могут быть описаны следующим образом. Пусть компоненты x_i ($x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$) вектора x суть производственные факторы, влияющие на объем выпуска y согласно функции (*производственной функции*) $y = f(x)$. Предполагается, что производственная функция обладает свойствами строгого монотонного роста по каждой переменной и является строго вогнутой функцией своих переменных.

Динамика производственных факторов предполагается аффинной по управлению и нелинейной по фазовому вектору x:

$$\dot{x}(t) = F(x(t))u(t) + G(x(t)) = \Phi(x(t), u(t)), \qquad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где матрицу $F(\cdot) = \{f_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^{n,m}$ и вектор $G(\cdot) = \{g_i(\cdot)\}_{i=1}^{n}$ составляют дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Символ $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_m(\cdot))$ задает вектор параметров управления, которые в экономической интерпретации можно определить как инвестиции в производственные факторы.

В рамках предположения о замкнутости экономической системы справедливо уравнение баланса $y(t) = c(t) + \sum_{i=1}^{m} (u_i(t) + w_i(x(t)))y(t)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-01-00264а.

Иными словами, агрегированный выпуск $y(t)$ распределяется между инвестициями $(u_i(t)+w_i(x(t)))y(t)$, $u_i(t) \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, в производственные факторы с целью увеличения их производительности и потреблением $c(t)$. Согласно уравнению баланса управления u_j ограничены:

$$0 < \sum_{j=1}^{m} u_j(t) < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \bar{u}_j \in (0,1)\colon\ u_j(t) \in [0, \bar{u}_j],\ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

а текущий уровень потребления $c(t)$ может быть найден из соотношения

$$c(t) = \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \big(u_i(t) + w_i(x(t))\big)\right) y(t) \approx \prod_{i=1}^{m} \big(1 - u_i(t) - w_i(x(t))\big) y(t).$$

Качество процесса управления оценивается интегральным индексом потребления, дисконтированным на бесконечном промежутке времени:

$$J(\cdot) = \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \ln c(t)\, dt. \tag{3}$$

Задача 1. Требуется построить управляемый процесс $(x^0(t), u^0(t))$, который максимизирует функцию полезности (3) вдоль траекторий динамической системы (1) при ограничениях (2) на управления $u(\cdot)$.

Исследование задачи осуществляется в рамках принципа максимума Понтрягина (ПМП) для задач на бесконечном промежутке времени [2, 1].

Стационарный гамильтониан задачи 1

$$H(\cdot) = \sum_{i=1}^{m} \ln(1 - u_i - w_i(x)) + \ln f(x) + \psi^T \Phi(x, u)$$

обладает свойством строгой вогнутости по переменной управления u. Максимум гамильтониана по переменным управления достигается при $u = u^0(x, \psi)$, где

$$u_j^0 = \begin{cases} 0, & (x,\psi) \in \Delta_j^1 = \{w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \geq 1\}, \\ 1 - w_j(x) - \Gamma(x,\psi), & (x,\psi) \in \Delta_j^2 = \{1 - \bar{u}_j \leq w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \leq 1\}, \\ \bar{u}_j, & (x,\psi) \in \Delta_j^3 = \{w_j(x) + \Gamma(x,\psi) \leq 1 - \bar{u}_j\}, \end{cases}$$

$$\Gamma(x,\psi) = (\psi^T F_j(x))^{-1}.$$

Из свойств правых частей динамики (1) производственных факторов и гамильтониана $H(x, \psi, u)$ следует, что максимизированный гамильтониан $H_0(x, \psi) = H(x, \psi, u^0)$ есть гладкая функция переменных x и ψ.

Согласно ПМП [1, 2] гамильтонова система задачи 1 имеет вид

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial \psi}, \qquad \dot{\psi}(t) = \rho\psi - \frac{\partial H_0(x, \psi)}{\partial x}. \tag{4}$$

Предполагается, что гамильтонова система (4) обладает единственной стационарной точкой $P^* = (x^*, \psi^*)$, фазовые координаты которой положительны. Исследование асимптотического поведения решений гамильтоновой системы проводится при помощи построения нелинейного регулятора, условия существования и структура которого приводятся ниже.

Нелинейный регулятор конструируется при помощи построения устойчивого линейного многообразия Ω в окрестности O_δ^* положения равновесия P^*. Для поиска линейного подпространства Ω необходимо выписать якобиан гамильтоновой системы (4), вычисленный в стационарной точке P^*:

$$J^* = \begin{pmatrix} A & B \\ C & \rho\mathbb{E}_n - A^T \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\partial^2 H_0^*}{\partial\psi\,\partial x}, \quad B = \frac{\partial^2 H_0^*}{\partial\psi^2}, \quad C = -\frac{\partial^2 H_0^*}{\partial x^2}, \\ (x, \psi) = P^*. \tag{5}$$

Линеаризованная в окрестности положения равновесия O_δ^* гамильтонова система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = A\widetilde{x} + B\widetilde{\psi}, & \widetilde{x}(t) = x(t) - x^*, \\ \dot{\psi} = C\widetilde{x} + (\rho\mathbb{E}_n - A^T)\widetilde{\psi}, & \widetilde{\psi}(t) = \psi(t) - \psi^*. \end{cases} \tag{6}$$

Построение устойчивого многообразия Ω сводится к решению следующей задачи.

Задача 2. Найти такую матрицу $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, что линейное подпространство решений системы (6), удовлетворяющих соотношению

$$\widetilde{\psi}(t) = X\widetilde{x}(t), \tag{7}$$

непусто для любых начальных условий $\widetilde{x}_0 = x_0^* - x^*$, $(x_0^*, \psi^* + X\widetilde{x}_0) \in O_\delta^*$.

Теорема. *Пусть система* (6) *имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее равенству* (7). *Тогда устойчивое многообразие* Ω *строится по собственным векторам* $v_1, \ldots, v_n$ *гамильтоновой* *матрицы* $M = J^* - (\rho/2)\mathbb{E}_{2n}$, *отвечающим ее отрицательным собственным значениям, а искомая матрица* X *находится по формуле*

$$X = V_2 V_1^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (v_1, \ldots, v_n), \qquad V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{8}$$

Замечание. Любая гамильтонова матрица [3] обладает тем свойством, что ее собственные значения симметричны относительно мнимой оси, поэтому в предположении об отсутствии чисто мнимых собственных значений у матрицы M можно гарантировать существование стабильного линейного многообразия Ω.

Окончательно нелинейный регулятор в окрестности положения равновесия строится по формуле $\widehat{u}(x) = u^0(x, X(x-x^*)+\psi^*)$, а нелинейная стабилизированная система имеет вид $\dot{x} = \partial H_0(x, X(x-x^*)+\psi^*)/\partial\psi$.

Список литературы

1. *Асеев С.М., Кряжимский А.В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. М.: Наука, 2007. (Тр. МИАН; Т. 257).
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
3. *Paige C., Van Loan C.* A Schur decomposition for Hamiltonian matrices // Linear Algebra Appl. 1981. V. 41. P. 11–32.