Список литературы

1. *Васин А.А., Дивцова А.Г.* Теоретико-игровая модель соглашения об ограничении загрязнения атмосферы // Математическая теория игр и приложения. 2017. Т. 9, № 1. С. 27–44.
2. *Kleimenov A.F., Kryazhimskiy A.V.* Minimum-noncooperative trajectories in repeated games // Complex dynamical systems with incomplete information / Ed. by E. Reithmeier, G. Leitmann. 1999. V. 1. P. 94–107.
3. *Hardin G.* The tragedy of the commons // Science, New Series. 1968. V. 162, N 3859.
4. *Sacco A., Zaccour G.* Impact of social externalities on the formation of an international environmental agreement: An exploratory analysis. 2016.

О снижении зашумленности при моделировании параметров методом динамической регуляризации (On the reduction of noisiness in the modeling of parameters by the method of dynamic regularization)

А. Ю. Вдовин (A. Yu. Vdovin), С. С. Рублева (S. S. Rubleva)

Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург, Россия

vdovin@usfeu.ru, rublevas@mail.ru

Рассматривается обратная задача для динамической системы, которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{gathered}\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t)) = f_1(t, x(t), v(t)) + f_2(t, x(t), v(t))v(t),\\ t \in [t_0, \vartheta] = T, \qquad x(t_0) = x_0.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ — непрерывные отображения $T\times\mathbb{R}^m$ в пространство $\mathbb{R}^m$ с евклидовой нормой $|\cdot|$ и в пространство $\mathbb{R}^{m\times q}$ матриц со спектральной нормой. Решение $x(\cdot)$ по Каратеодори задачи (1) станем называть движением, а измеримую по Лебегу функцию $v(\cdot)\colon T \to Q \subset \mathbb{R}^q$ (Q — выпуклый компакт) — воздействием, порождающим это движение. Пусть

$t_0 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = \vartheta$, $t_{i+1} - t_i = \Delta$, — разбиение временно́го промежутка T, а значение φ_i — значение функции $\varphi(\cdot)$ в узле разбиения t_i. По неточной информации о движении в узлах разбиения $|\xi_i^h - x_i| \le h$ требуется построить устойчивое приближение некоторого воздействия, порождающего движение $x(\cdot)$. Эта задача является некорректной. Из множества подходов к решению рассматриваемой проблемы остановимся на динамической процедуре, предложенной Ю.С. Осиповым и А.В. Кряжимским [1]. Построение приближения искомого воздействия рассматривалось как процесс позиционного управления специальной системой с помощью приема экстремального прицеливания из позиционных дифференциальных игр [2]. Эта операция проводилась пошагово на отрезках разбиения T, при этом осуществлялась ее регуляризация с использованием метода сглаживающего функционала [3]. Если $w_0^{h,\Delta,\alpha} = \xi_0$, то при $t \in (t_i, t_{i+1}]$ дискретная модель имела вид

$$w_{i+1}^{h,\Delta,\alpha} = w_i^{h,\Delta,\alpha} + f\big(t_i, \xi_i^h, u_i^h\big)\Delta(h), \tag{2}$$

а значение функции $u^h(t) = u_i^h$ равно проекции на Q векторы

$$f_2^T(t_i, \xi_i^h)\frac{\xi_i^h - w_i^{h,\Delta,\alpha}}{\alpha(h)}. \tag{3}$$

Величины $\alpha(h)$ и $\Delta(h)$ (величина шага разбиения) являются параметрами метода. Пусть h, $\alpha(h)$, $(h + \Delta(h))/\alpha(h)$ стремятся к нулю справа одновременно. В [1] установлено, что при выбранном согласовании параметров функция $w^{h,\Delta,\alpha}(\cdot)$ моделирует на T наблюдаемое движение, а $u^h(\cdot)$ — воздействие, обладающее в $L_2(T, \mathbb{R}^q)$ минимальной нормой среди всех допустимых воздействий, порождающих $x(\cdot)$. Известно, что на множестве всех измеримых воздействий со значениями из Q получить оценки точности регуляризованных приближений без дополнительной априорной информации невозможно. В [4] для функции $f(\cdot)$, липшицевой по первым двум переменным, матрицы $f_2(t, x(t))$ с постоянным рангом и нормального воздействия с ограниченной на T вариацией получены верхние оценки точности. Для этого рассматривалась непрерывная модель с точной информацией

$$\dot{w}^{0,\alpha}(t) = f(t, x(t), u^0), \qquad w^{0,\alpha}(t_0) = x_0. \tag{4}$$

Пусть $v_*(\cdot)$ — нормальное воздействие, порождающее $x(\cdot)$, а

$$u^0 = f_2^T(t, x(t))\frac{x(t) - w^{0,\alpha}(t)}{\alpha}.$$

Установлено, что при всех $k \in N$ и $\alpha/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$

$$\|v_*(\cdot) - u^0(\cdot)\|_{L_1(T,\mathbb{R}^q)} \le C_1 \left(\frac{4\alpha}{\lambda\delta}\right)^k (\vartheta - t_0) + \\ + \delta C_2 \operatorname{Var}(T, (f^+(\cdot))^T v_*(\cdot)) + C_3\alpha(\vartheta - t_0). \quad (5)$$

Рассматривая формулы (2), (3) как результат применения метода Эйлера к задаче (4), получаем оценку

$$\|u^0(\cdot) - u^h(\cdot)\|_{L_1(T,\mathbb{R}^q)} \le C_4 \frac{h}{\alpha(h)} + C_5 \frac{\Delta(h)}{\alpha(h)}. \quad (6)$$

Выбор оптимального согласования параметров в (5), (6) позволяет установить, что асимптотический порядок точности равен 1/2 и является оптимальным. Однако его практическая реализация показала высокую зашумленность $w^{h,\Delta,\alpha}(\cdot)$, $u^h(\cdot)$ относительно моделируемых ими объектов. Предпримем следующие шаги для борьбы с этим явлением. Первый — систему (1) рассмотрим в виде

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), v(t-\Delta)) + f_2(t, x(t), v(t-\Delta))\,(v(t) - v(t-\Delta)), \\ x(t_0) = x_0.$$

В ней за неизвестное воздействие примем $v(t) - v(t-\Delta)$.

Пусть $A(\cdot) = f_2(\cdot) f_2^T(\cdot)$, тогда непрерывная модель будет иметь вид

$$\dot{w}^{0,\alpha}(t) = f(t, x(t), u^0(t-\Delta)) + A(t, x(t)) \frac{x(t) - w^{0,\alpha}(t)}{\alpha}, \quad w^{0,\alpha} = x_0.$$

Это жесткое уравнение является сингулярно возмущенным. Теория рекомендует для его решения применять неявные численные методы.

Вторым из анонсированных выше шагов станет использование неявного метода Эйлера, обладающего внутренним регуляризующим эффектом. Результат его применения есть

$$w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta} = w_i^{0,\alpha,\Delta} + f\big(t_{i+1}, x_{i+1}, u_i^{0,\alpha,\Delta}\big)\Delta + \\ + A(t_{i+1}, x_{i+1})\big(x_{i+1} - w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta}\big)\frac{\Delta}{\alpha} \pm x_{i+1}, \quad w_{i+1}^{0,\alpha,\Delta} = x_0.$$

Пусть $v_b(\cdot)$ обладает наименьшей вариацией среди допустимых воздействий, порождающих $x(\cdot)$, и $u_0^{h,\alpha,\Delta}$ — его приближение, $w_0^{h,\alpha,\Delta} = \xi_0$.

Тогда с учетом неточной информации о движении алгоритм принимает вид

$$w_{i+1}^{h,\alpha,\Delta} = \xi_{i+1} + \left(\frac{\alpha(h)}{\Delta(h)} + A(t_{i+1}, \xi_{i+1}) \right)^{-1} \times$$
$$\times \alpha(h) \left[f(t_{i+1}, \xi_{i+1}, u_i^{h,\alpha,\Delta}) + \frac{\xi_{i+1} - w_i^{h,\alpha,\Delta}}{\Delta(h)} \right],$$
$$u_{i+1}^{h,\alpha,\Delta} = u_i^{h,\alpha,\Delta} + f_2\big(t_{i+1}, \xi_{i+1}\big) \frac{\xi_{i+1} - w_{i+1}^{h,\alpha,\Delta}}{\alpha(h)}.$$

Если h, $\Delta(h)$, $\alpha(h)/\Delta(h)$, $h/\Delta^2(h)$ стремятся к нулю справа, то последовательность кусочно постоянных приближений $u^{h,\alpha,\Delta}$, удовлетворяющих условию $u^{h,\alpha,\Delta}(t) = u_i^{h,\alpha,\Delta}$ при $t \in [t_i, t_{i+1})$, сходится в $L_1(T, \mathbb{R}^q)$ к воздействию с наименьшей вариацией, порождающему $x(\cdot)$, и имеет слабую зашумленность. Следуя [5], предложенный прием можно применить и в случае, когда задача (1) нелинейна по $v(\cdot)$.

Список литературы

1. *Кряжимский А.В., Осипов Ю.С..* О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. №2. С. 51–60.
2. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
3. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. 1963. Т. 151, №3. С. 501–504.
4. *Вдовин А.Ю., Рублева С.С.* О гарантированной точности процедуры динамического восстановления управления с ограниченной вариацией, зависящей от него линейно // Мат. заметки. 2010. Т. 87, №3. С. 337–358.
5. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.