

С. П. Суетин

**Полиномы Эрмита–Паде и аналитическое  
продолжение: новый подход и некоторые результаты**

Обсуждается новый подход к реализации известной программы Вейерштрасса об эффективном продолжении аналитического элемента в предположении, что этот элемент соответствует многозначной аналитической функции с конечным числом точек ветвления. Предлагаемый подход основан на использовании полиномов Эрмита–Паде.

Библиография: [51] наименований.

21.06.2018

**Ключевые слова:** аналитическое продолжение, вейерштрассов подход, полиномы Эрмита–Паде, распределение нулей, риманова поверхность

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |    |
|--|----|
| <b>СОДЕРЖАНИЕ</b> .....                        | 1  |
| <b>1. Введение и постановка задачи</b> .....   | 1  |
| <b>2. Вещественный случай</b> .....            | 5  |
| <b>3. Комплексный случай</b> .....             | 13 |
| <b>4. Заключительные замечания</b> .....       | 22 |
| <b>5. Некоторые возможные приложения</b> ..... | 28 |
| <b>Список литературы</b> .....                 | 48 |

**§ 1. Введение и постановка задачи**

**1.1.** Задача об аналитическом продолжении степенного ряда за пределы круга его сходимости является хорошо известной задачей комплексного анализа, имеющей, кроме, того важное прикладное значение. В настоящей работе мы обсудим эту задачу с точки зрения вейерштрассова подход к понятию аналитической функции, который основан на локальном представлении аналитической функции в виде степенного ряда с центром в некоторой точке римановой сферы  $\overline{\mathbb{C}}$ . Подробнее об этом подходе см. прежде всего монографию [10], а также [11], [34], [28; глава 8], [7], [8], [9].

Цель настоящей работы – представить и кратко обсудить новый подход к эффективному решению задачи об аналитическом продолжении степенного ряда, который основан на использовании полиномов Эрмита–Паде и некоторых их обобщений. Мы приведем здесь (§ 2 и § 3) формулировки некоторых новых теоретических результатов в этом направлении, которые нам удалось получить к настоящему времени, и обсудим (§ 5) кратко те возможные применения полученных теоретических результатов для исследовании прикладных

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-01-00764).

задач, которые нам представляются наиболее очевидными. В частности, в § 5 мы проиллюстрируем наш подход и полученные теоретические результаты на некоторых численных примерах, относящихся к модельному классу многозначных аналитических функций, рассматриваемому в настоящей работе (см. ниже п. 1.2).

Доказательству сформулированных в настоящей работе теоретических результатов предполагается посвятить отдельные работы [49] и [?]. Более детально анализу возможных приложений предлагаемого здесь метода к решению прикладных задач, связанных с аналитическим продолжением степенных рядов, планируется посвятить еще одну работу.

Предлагаемый здесь новый подход к эффективному решению задачи об аналитическом продолжении степенного ряда за пределы круга его сходимости мы продемонстрируем (как в теоретическом плане, так и в численном отношении) на примере некоторого “модельного” класса многозначных аналитических функций, основанного на использовании обратной функции Жуковского (см. ниже представление (1)). Впервые этот класс был введен в рассмотрение в работе [45] (см. также [46], [48]), где для него было использовано обозначение  $\mathcal{Z}$ . Здесь мы также будем пользоваться этим обозначением, при необходимости уточняя параметры, используемые в представлении (1).

**1.2.** Пусть  $\Delta_1 := [-1, 1]$ ,  $\varphi(z) := z + (z^2 - 1)^{1/2}$ ,  $z \notin \Delta_1$ , – обратная функция Жуковского; здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что выбрана такая ветвь корня, что  $(z^2 - 1)^{1/2}/z \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ . Функция  $\varphi(z)$  – мероморфная функция в области  $D_1 := \mathbb{C} \setminus \Delta_1$  ( $\varphi$  отображает  $D_1$  конформно и однолистно на внешность  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  единичного круга  $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ ). В области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 1\}$  функция  $\varphi$  уже является многозначной (точнее, двузначной) аналитической функцией.

Пусть  $A_j \in \mathbb{C}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , – произвольные попарно различные комплексные числа такие, что  $|A_j| > 1$ . Рассмотрим функцию  $f$  вида

$$f(z) := \prod_{j=1}^m \left( A_j - \frac{1}{\varphi(z)} \right)^{\alpha_j}, \quad z \in D_1, \quad (1)$$

где  $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$  (отметим, что при заданной ранее ветви корня имеем  $1/\varphi(z) = z - (z^2 - 1)^{1/2}$ ). Поскольку при заданных условиях на величины  $A_j$  и выборе ветви корня при  $z \in D_1$  выполняется соотношение  $(A_j - 1/\varphi(z)) \neq 0$ , то функция  $f$  допускает выделение в области  $D_1$  голоморфной (т.е. однозначной аналитической) ветви,  $f \in \mathcal{H}(D_1)$ . В области  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 1\}$  аналитическая функция  $f$  уже не является однозначной. Кроме ветвлений второго порядка в точках  $z = \pm 1$  эта функция имеет ветвления в точках  $a_j = (A_j + 1/A_j)/2 \in \mathbb{C} \setminus \Delta_1$ ,  $j = 1, \dots, m$ , вообще говоря бесконечного порядка (если  $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  для соответствующего  $A_j$ ). Таким образом, полное множество точек ветвления функции  $f$  вида (1) есть  $\Sigma = \Sigma(f) = \{\pm 1, a_j, j = 1, \dots, m\}$ .

Всюду в дальнейшем для произвольного  $n \in \mathbb{N}$  через  $\mathbb{P}_n := \mathbb{C}[z]$  мы обозначаем пространство всех алгебраических полиномов степени  $\leq n$ ,  $\mathbb{P}_n^* := \mathbb{P}_n \setminus \{0\}$ .

Для произвольного полинома  $Q \in \mathbb{C}[z]$ ,  $Q \not\equiv 0$ , через

$$\chi(Q) := \sum_{\zeta: Q(\zeta)=0} \delta_\zeta$$

мы будем обозначать меру, считающую нули полинома  $Q$  (с учетом их кратностей).

Слабую сходимость в пространстве мер мы будем обозначать через “ $\xrightarrow{*}$ ”.

Для произвольной (положительной борелевской) меры  $\mu$ ,  $\text{supp } \mu \subset \mathbb{C}$ , через  $V^\mu$  обозначим логарифмический потенциал этой меры  $\mu$ :

$$V^\mu(z) := \int \log \frac{1}{|z - \zeta|} d\mu(\zeta).$$

Под “ $\xrightarrow{\text{cap}}$ ” мы будем понимать сходимость по (логарифмической) емкости на компактных подмножествах некоторой области.

Под “ $\sqrt{\cdot}$ ” мы будем понимать арифметическое значение квадратного корня из неотрицательного вещественного числа,  $\sqrt{a^2} = |a|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Зафиксируем некоторый росток<sup>1</sup>  $f_\infty$ ,

$$f_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},$$

функции  $f \in \mathcal{H}(D_1)$ , голоморфный в точке  $z = \infty$ ,  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$ .

Для зафиксированного ростка  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  и произвольного  $n \in \mathbb{N}$  через  $P_n$  и  $Q_n$ ,  $P_n, Q_n \in \mathbb{P}_n := \mathbb{C}[z]$ ,  $Q_n \not\equiv 0$ , обозначим полиномы, определяемые (неоднозначно) из соотношения

$$(Q_n f_\infty - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Рациональная функция  $[n/n]_{f_\infty} := P_n/Q_n$  определяется уже однозначно и называется *диагональной аппроксимацией Паде* (далее “диагональная АП” или просто “АП”) ростка  $f_\infty$  в точке  $z = \infty$ .

Из теории Шталя (см. [42], [43], а также [4] и [44]) вытекают следующие факты (3)–(5):

$$\frac{1}{n} \chi(P_n), \frac{1}{n} \chi(Q_n) \xrightarrow{*} \tau_{\Delta_1}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где  $\tau_{\Delta_1} = \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  – единичная робеновская мера отрезка  $\Delta_1$ , т.е.  $V^{\tau_{\Delta_1}}(x) \equiv \text{const} = \gamma_{\Delta_1}$ ,  $\gamma_{\Delta_1}$  – постоянная Робена для отрезка  $\Delta_1$ ;

$$[n/n]_{f_\infty}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z) \in \mathcal{H}(D_1), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in D_1; \quad (4)$$

сходимость в (4) характеризуется следующим соотношением:

$$|f(z) - [n/n]_{f_\infty}(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2g_{\Delta_1}(z, \infty)} < 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in D_1, \quad (5)$$

<sup>1</sup>Здесь и в дальнейшем мы используем термины “росток”, “аналитический элемент” и “степенной ряд” для обозначения одного и того же объекта: сходящего степенного ряда с центром в некоторой точке расширенной комплексной плоскости  $\overline{\mathbb{C}}$  и ненулевым радиусом сходимости.

где  $g_{\Delta_1}(z, \infty)$  – функция Грина области  $D_1$  с особенностью в бесконечно удаленной точке  $z = \infty$ . Соотношение (5) означает, что АП  $[n/n]_{f_\infty}$  сходятся к функции  $f \in \mathcal{H}(D_1)$  со скоростью геометрической прогрессии с показателем  $\delta(z) := e^{-2g_{\Delta_1}(z, \infty)} < 1$ .

Таким образом, из (3)–(5) вытекает, что диагональные АП, которые строятся только по *локальным* данным – ростку  $f_\infty$  функции  $f$  в точке  $z = \infty$  – восстанавливают функцию  $f$  во всей области  $D_1$ . С точки зрения теории Шталя область  $D_1 = D_{\max}(f_\infty)$  – “максимальная” область, в которой имеет место сходимост (по емкости) диагональных АП. “Максимальность”  $D_1$  понимается в том смысле, что граница  $\partial D_1 = \Delta_1$  имеет минимальную емкость среди границ всех допустимых областей  $G$  для ростка  $f_\infty$ , т.е.

$$\text{cap}(\partial D_1) = \min\{\text{cap}(\partial G) : G \ni \infty, f_\infty \in \mathcal{H}(G)\}.$$

Из (3) вытекает, что “почти все” нули и полюсы<sup>2</sup> диагональных АП  $[n/n]_{f_\infty}$  накапливаются к отрезку  $\Delta_1 = \partial D_1$ . В контексте сказанного выше, мы будем здесь называть отрезок  $\Delta_1$  *компактом Шталя*, а область  $D_1$  – *областью Шталя*. Разумеется, в общей теории Шталя, справедливой для произвольной многозначной аналитической функции с конечным числом точек ветвления, эти два понятия оказываются гораздо более содержательными, чем в рассматриваемом здесь весьма частном случае.

Таким образом, на примере этого частного класса  $\mathcal{Z}$  видно, что диагональные АП, построенные только по локальным данным, решают следующие задачи:

- 1) посредством предельного распределения своих нулей и полюсов восстанавливают компакт Шталя, а тем самым – и область Шталя  $D_1 = \mathbb{C} \setminus \Delta_1$ , в которой  $f_\infty \in \mathcal{H}(D_1)$ ;
- 2) реализуют эффективное (однозначное) аналитическое продолжение заданного ростка  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  в область  $D_1$  как голоморфную функцию  $f(z)$ ,  $z \in D_1$ .

Из сказанного вытекает, что для всех функций  $f$  из класса  $\mathcal{Z}$  компакт Шталя  $S(f_\infty) = \Delta_1$ , т.е. не зависит<sup>3</sup> от функции  $f \in \mathcal{Z}$ , а так называемые “активные” точки ветвления ростка  $f_\infty$  – это точки  $z = \pm 1$  (по поводу понятия активных точек ветвления см. [43]). Отметим, что при  $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  риманова поверхность (далее “рп”)  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(f)$  функции  $f \in \mathcal{Z}$  является бесконечнолистной. Область Шталя  $D_1$  можно трактовать как “первый” лист этой рп  $\mathfrak{R}(f)$ . Таким образом, результат применения теории Шталя к ростку  $f_\infty$  функции  $f \in \mathcal{Z}$  можно трактовать следующим образом. Диагональные АП  $[n/n]_{f_\infty}$ , построенные по ростку  $f_\infty$ , восстанавливают функцию  $f$  только на первом листе рп  $\mathfrak{R}(f)$ , а все неактивные точки ветвления  $\{a_j, j = 1, \dots, m\}$  функции  $f$  лежат на “других” листах этой рп  $\mathfrak{R}(f)$ . Тем самым, в отличие от точек  $z = \pm 1$  остальные точки ветвления  $\{a_j, j = 1, \dots, m\}$  оказываются недоступными для их нахождения с помощью нулей и полюсов диагональных АП.

В связи с вышесказанным возникает следующие вполне естественные вопросы:

<sup>2</sup>Точнее, все кроме не более, чем  $o(n)$  нулей и полюсов.

<sup>3</sup>При ранее выбранной ветви обратной функции Жуковского  $\varphi(z)$ .

1) возможно ли по заданному ростку  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  многозначной аналитической функции  $f$  (в частности, из класса  $\mathcal{Z}$ ) восстановить другие точки ветвления  $f$ , неактивные для ростка  $f_\infty$  в рамках теории Шталя?

2) возможно ли по заданному ростку  $f_\infty$  восстановить функцию  $f$  на “других листах” ее рп  $\mathfrak{R}(f)$ , а не только на первом листе, как это происходит в теории Шталя?

Отметим, что поставленные вопросы вполне укладываются в русло общей программы Вейерштрасса (см. [7], [8], [9] и имеющиеся там ссылки), которая ставит своей целью извлечь все свойства так называемой *полной* аналитической функции непосредственно в терминах ее конкретного ростка (т.е. фактически – в терминах соответствующих тейлоровских коэффициентов степенного ряда).

В настоящей работе мы рассматриваем весьма специальный класс многозначных аналитических функций, а именно – аналитические функции, задаваемые явным представлением (1). Тем не менее этот класс является весьма показательным с точки зрения демонстрации того, какие именно преимущества предоставляет использование рациональных аппроксимаций, основанных на полиномах Эрмита–Паде, по сравнению с диагональными аппроксимациями Паде. А именно, здесь мы сформулируем некоторые теоретические результаты, из которых вытекает, что по-крайней мере в классе  $\mathcal{Z}$  ответы на оба поставленных выше вопроса 1)–2) являются положительными.

## § 2. Вещественный случай

**2.1.** Пусть в (1)  $m = 2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = -1/2$ ,  $A_1, A_2$  – вещественные числа такие, что  $1 < A_1 < A_2$ . В дальнейшем нам удобно положить  $A_1 = A$ ,  $A_2 = B$ . Тем самым,  $1 < A < B$ ,

$$f(z) = \left[ \left( A - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \left( B - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \right]^{-1/2}, \quad z \in D_1, \quad (6)$$

$\Sigma(f) = \{\pm 1, a, b\}$ , где  $a = (A + 1/A)/2$ ,  $b = (B + 1/B)/2$ ,  $1 < a < b$ . Положим  $\Delta_2 = [a, b]$ .

Риманова поверхность  $\mathfrak{R}(f)$  функции  $f$ , заданной представлением (6), может быть представлена как разветвленное<sup>4</sup> в точках  $z = \pm 1, a, b$  четырехлистное накрытие римановой сферы  $\overline{\mathbb{C}}$ . Пусть  $\pi_4: \mathfrak{R}_4 \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{R}_4 = \mathfrak{R}_4(f)$  – соответствующая каноническая проекция. Будем считать, что рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  реализована следующим образом. Первый (открытый) лист<sup>5</sup>  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  – это риманова сфера с разрезом по отрезку  $\Delta_1$ . Второй  $\mathfrak{R}_4^{(2)}$  и третий  $\mathfrak{R}_4^{(3)}$  листы – это римановы сферы, обе с разрезами по отрезкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Наконец, четвертый лист  $\mathfrak{R}_4^{(4)}$  – это риманова сфера с разрезом по отрезку  $\Delta_2$ . Стандартным образом предполагается, что каждый разрез, проведенный по соответствующему отрезку, имеет два “берега” – верхний и нижний. “Склейка” четырех листов в поверхность происходит надлежащим отождествлением верхнего и нижнего берегов соответствующих разрезов разных листов по стандартному правилу “крест-на-крест”. По этому правилу первый лист склеивается со вторым по

<sup>4</sup>Отметим, что все ветвления этого накрытия – второго порядка.

<sup>5</sup>Здесь и всюду в дальнейшем под листами рп мы понимаем открытые листы.

разрезу, соответствующему отрезку  $\Delta_1$ , затем второй склеивается с третьим листом по разрезу, соответствующему отрезку  $\Delta_2$ , и наконец, третий лист склеивается с четвертым листом по разрезу, соответствующему отрезку  $\Delta_1$ . Отметим, что род полученной в результате такой процедуры рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  равен нулю. Тем самым, эта рп топологически эквивалентна римановой сфере  $\overline{\mathbb{C}}$  (см. рис. 1).

Точки полученной рп, расположенные на листах  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$ ,  $\mathfrak{R}_4^{(2)}$ ,  $\mathfrak{R}_4^{(3)}$  и  $\mathfrak{R}_4^{(4)}$  будем обозначать через  $z^{(1)}$ ,  $z^{(2)}$ ,  $z^{(3)}$  и  $z^{(4)}$  соответственно. Положим  $\Gamma^{(1,2)} = \partial\mathfrak{R}_4^{(1)} \cap \partial\mathfrak{R}_4^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(2,3)} = \partial\mathfrak{R}_4^{(2)} \cap \partial\mathfrak{R}_4^{(3)}$ ,  $\Gamma^{(3,4)} = \partial\mathfrak{R}_4^{(3)} \cap \partial\mathfrak{R}_4^{(4)}$ . Для функции  $f \in \mathcal{Z}$  вида (6) имеем:  $\pi_4(z^{(j)}) = z \in D_1 \setminus \Delta_2$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $\pi_4(\Gamma^{(1,2)}) = \pi_4(\Gamma^{(3,4)}) = \Delta_1$ ,  $\pi_4(\Gamma^{(2,3)}) = \Delta_2$ .

С учетом сделанных обозначений результаты теории Шталя, приведенные выше (см. (4)–(5)), для функции  $f \in \mathcal{Z}$  вида (6) можно трактовать следующим образом: при  $n \rightarrow \infty$

$$[n/n]_{f_\infty}(z) \rightarrow f(z^{(1)}), \quad z \in D_1, \quad (7)$$

$$|f(z^{(1)}) - [n/n]_{f_\infty}(z)|^{1/n} \rightarrow e^{-2g_{\Delta_1}(z, \infty)}, \quad z \in D_1; \quad (8)$$

сходимость в (7) и (8) – равномерная внутри (т.е. на компактных подмножествах) области  $D_1$ . Отметим, что в (7) и (8) вместо сходимости по емкости можно утверждать равномерную сходимость, поскольку как нетрудно увидеть, функция  $f$  вида (6) является марковской функцией, т.е. допускает следующее представление:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{AB}} + \widehat{\sigma}(z),$$

где

$$\widehat{\sigma}(z) := \int_{-1}^1 \frac{d\sigma(x)}{z - x}$$

– преобразование Коши меры  $\sigma$  с носителем на отрезке  $\Delta_1$ .

Таким образом, максимальная область Шталя  $D_1$  соответствует первому листу  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , которая, как было отмечено выше, топологически эквивалентна римановой сфере  $\overline{\mathbb{C}}$ . На этой римановой сфере область, соответствующая первому листу, занимает в определенном смысле лишь четвертую часть. Следовательно, максимальность области Шталя следует понимать как максимальность, связанную только с диагональными АП: эти рациональные аппроксимации не могут сходиться ни в какой большей области. Вопрос об эффективном аналитическом продолжении заданного ростка  $f_\infty$  на последующие листы рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  решается с помощью рациональных аппроксимаций, основанных на полиномах Эрмита–Паде.

Всюду до конца этого параграфа предполагается, что функция  $f \in \mathcal{Z}$  задана представлением (6),  $f \in \mathcal{H}(D_1)$ ,  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  – соответствующий росток, заданный в точке  $z = \infty$ .

**2.2.** Для системы трех ростков  $f_\infty, f_\infty^2, f_\infty^3$  и произвольного  $n \in \mathbb{N}$  определим полиномы Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{3n}, P_{3n,1}, P_{3n,2}, P_{3n,3} \in \mathbb{P}_{3n}$ ,  $Q_{3n} \not\equiv 0$ , с

помощью следующих соотношений<sup>6</sup> (см. [33], [31]):

$$(Q_{3n}f_\infty - P_{3n,1})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$(Q_{3n}f_\infty^2 - P_{3n,2})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$(Q_{3n}f_\infty^3 - P_{3n,3})(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Нетрудно увидеть, что для функции  $f$  вида (6) система функций  $f, f^2, f^3$  является системой Никишина (по поводу этого понятия и свойств систем Никишина см. [30], [31], [16]). А именно, справедливы следующие представления (см. [49]):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{AB}} + \widehat{\sigma}(z), \quad f^2(z) = \frac{1}{AB} + \frac{1}{\sqrt{AB}}\widehat{\sigma}(z) - \widehat{s}_1(z), \\ f^3(z) &= \frac{1}{\sqrt{(AB)^3}} + \frac{1}{AB}\widehat{\sigma}(z) - \frac{1}{\sqrt{AB}}\widehat{s}_1(z) - \widehat{s}_2(z), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $s_1 := \langle \sigma, \sigma_2 \rangle$ ,  $s_2 := \langle \sigma, \sigma_2, \sigma \rangle$ ;

по поводу использованных в (12) обозначений см. [19]. Отсюда в силу свойства совершенности систем Никишина (см. [16]) вытекает, что  $\deg Q_{3n} = 3n$ ,  $\deg P_{3n,j} = 3n$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Следовательно, выбором нормировки полинома  $Q_{3n}$  эти четыре полиномы определяются уже однозначно.

Введем необходимые обозначения.

Через  $g_{\Delta_j}(z, \zeta)$  в дальнейшем обозначается функция Грина области  $D_j = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_j$ ,  $j = 1, 2$ , с особенностью в точке  $z = \zeta$ . Соответствующий гринов потенциал меры  $\mu$ ,  $\text{supp } \mu \subset \mathbb{C}$ , обозначается через  $G_{\Delta_j}^\mu(z)$ :

$$G_{\Delta_j}^\mu(z) := \int g_{\Delta_j}(\zeta, z) \mu(\zeta), \quad z \in D_j.$$

Через  $M_1(\Delta_j)$  обозначается пространство всех единичных (положительных борелевских) мер с носителем на  $\Delta_j$ ,  $j = 1, 2$ . Через  $\beta_{\Delta_j}(\mu)$  будем обозначать выметание произвольной меры  $\mu$  из области  $D_j$  на  $\Delta_j = \partial D_j$ .

**ЛЕММА 1.** *В классе  $M_1(\Delta_2)$  существует единственная мера  $\lambda$  такая, что на  $\Delta_2$  справедливо следующее соотношение:*

$$V^\lambda(x_2) + G_{\Delta_1}^\lambda(x_2) + g_{\Delta_1}(x_2, \infty) \equiv \text{const} = \gamma(\lambda), \quad x_2 \in \Delta_2, \quad (13)$$

с некоторой постоянной  $\gamma = \gamma(\lambda)$ .

Соотношение (13) будем называть соотношением *равновесия*,  $\lambda$  – *равновесной мерой*,  $\gamma(\lambda)$  – *постоянной равновесия*.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Подчеркнем, что соотношение равновесия (13) выполняется для смешанного гриново-логарифмического потенциала  $V^\mu(z) + G_{\Delta_1}^\mu(z)$  при наличии внешнего поля  $\psi(z) = g_{\Delta_1}(z, \infty)$ ; ср. [17], [18], [35], [13].

<sup>6</sup>Отметим, что в этой конструкции основным является полином  $Q_{3n}$ . По этому полиному остальные полиномы  $P_{3n,j}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , определяются уже однозначно.

Положим  $\lambda_1 := \beta_{\Delta_1}(\lambda) \in M_1(\Delta_1)$  – выметание меры  $\lambda$  из  $D_1$  на  $\Delta_1$ ,

$$\lambda_2 := \frac{1}{3}(2\tau_{\Delta_1} + \lambda_1) \in M_1(\Delta_1) \quad (14)$$

(напомним, что  $\tau_{\Delta_1}$  – робеновская мера отрезка  $\Delta_1$ ).

Справедлива

**ТЕОРЕМА 1.** *Степень полинома  $Q_{3n}$  равна  $3n$ , все нули полинома  $Q_{3n}$  простые и лежат в интервале  $\Delta_1^\circ := (-1, 1)$ . При  $n \rightarrow \infty$  имеют место следующие утверждения:*

$$\frac{1}{n}\chi(Q_{3n}) \xrightarrow{*} 3\lambda_2; \quad (15)$$

$$\frac{P_{3n,1}}{Q_{3n}}(z) \rightarrow f(z^{(1)}), \quad z \in D_1; \quad (16)$$

скорость сходимости в (16) характеризуется следующим соотношением:

$$\left| f(z^{(1)}) - \frac{P_{3n,1}}{Q_{3n}}(z) \right|^{1/n} \rightarrow \delta_1(z), \quad z \in D_1, \quad (17)$$

где

$$\delta_1(z) := e^{-(G_{\Delta_1}^\lambda(z) + 2g_{\Delta_1}(z, \infty))} < 1, \quad z \in D_1$$

(ср. (7) и (8)). Сходимость в (16) и (17) – равномерная внутри<sup>7</sup> области  $D_1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Отметим, что при  $n \rightarrow \infty$  справедливы также соотношения:

$$\frac{P_{3n,2}}{Q_{3n}}(z) \rightarrow f^2(z^{(1)}), \quad \frac{P_{3n,3}}{Q_{3n}}(z) \rightarrow f^3(z^{(1)}), \quad z \in D_1.$$

Однако они не дают нам никакой дополнительной информации о значениях функции  $f(z^{(1)})$  при  $z \in D_1$ .

**2.3.** Для набора ростков  $[1, f_\infty, f_\infty^2, f_\infty^3]$  и произвольного  $n \in \mathbb{N}$  полиномы Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{n,j} \in \mathbb{P}_n$ ,  $Q_{n,j} \not\equiv 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , определяются (неоднозначно) соотношением<sup>8</sup>

$$R_n(z) := (Q_{n,0} + Q_{n,1}f_\infty + Q_{n,2}f_\infty^2 + Q_{n,3}f_\infty^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+3}}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (18)$$

(подробнее см. [33], [31]).

Справедлива

**ТЕОРЕМА 2.** *При всех  $n \in \mathbb{N}$   $\deg Q_{n,j} = n$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ . Все нули полиномов  $Q_{n,j}$  простые и принадлежат интервалу  $\Delta_1^\circ$ . При  $n \rightarrow \infty$  имеют место следующие утверждения:*

$$\frac{1}{n}\chi(Q_{n,j}) \xrightarrow{*} \lambda_1 \in M(\Delta_1), \quad j = 0, 1, 2, 3; \quad (19)$$

$$\frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \rightarrow -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)}) + f(z^{(3)})], \quad z \in D_1; \quad (20)$$

<sup>7</sup>Т.е. на компактных подмножествах области; см. [28].

<sup>8</sup>Отметим, что в этой конструкции основными являются полиномы  $Q_{n,1}, Q_{n,2}, Q_{n,3}$ . По этим полиномам полином  $Q_{n,0}$  определяется уже однозначно.



скорость сходимости в (20) характеризуется соотношением:

$$\left| [f(z^{(1)}) + f(z^{(2)}) + f(z^{(3)})] + \frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \right|^{1/n} \rightarrow \delta_3(z), \quad z \in D_1, \quad (21)$$

где

$$\delta_3(z) := e^{-2G_{\Delta_1}^\lambda(z)} < 1, \quad z \in D_1$$

(ср. (7) и (8)). Сходимость в (20) и (21) – равномерная внутри области  $D_1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Отметим, что сходимость (20) вытекает непосредственно из более общих результатов, полученных в работе [25]. Описание мер  $\lambda_2$  и  $\lambda_1$ , характеризующих предельное распределение нулей полиномов  $Q_{3n}$  и  $Q_{n,j}$ , в терминах скалярной задачи равновесия (13) является по-видимому новым. Обычно такое описание дается в терминах векторной задачи равновесия (см. прежде всего [17], [19], а также [3; § 5]). Это же замечание относится и к утверждению (15) теоремы 1 о предельном распределении нулей полиномов Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{3n}$ . А именно, как уже говорилось выше, система функций  $f, f^2, f^3$  образует систему Никишина. В этом случае традиционно для описания предельного распределения нулей полиномов Эрмита–Паде 2-го типа используется векторная задача равновесия с матрицей взаимодействия Никишина (см. прежде всего [30], а также [31], [19], [3; § 5]). Для системы трех функций  $f, f^2, f^3$  такая матрица является  $3 \times 3$ -матрицей. В отличие от традиционного векторного подхода нам удалось полностью охарактеризовать предельное распределение нулей полинома Эрмита–Паде как 1-го, так и 2-го типов в терминах скалярной задачи равновесия (13). Вполне вероятно, что и для произвольной системы Никишина, состоящей из любого числа функций, описание предельного распределения нулей соответствующих полиномов Эрмита–Паде может быть дано в терминах надлежащей скалярной задачи равновесия. Это предположение относится, разумеется, только к диагональному случаю. Недиagonalный случай имеет свою специфику (см., например, [26] и приведенную там библиографию).

**2.4.** В соотношении (18) предполагалось, что  $\deg Q_{n,j} \leq n$  для всех  $j = 0, 1, 2, 3$ . Стандартным образом (см. [33], [31]) введем теперь трехмерные мультииндексы  $\mathbf{n}_1 := (n, n-1, n-1)$  и  $\mathbf{n}_2 := (n, n, n-1)$  и соответствующие этим мультииндексам полиномы Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{\mathbf{n}_1,j}$  и  $Q_{\mathbf{n}_2,j}$ .

Для мультииндекса  $\mathbf{n}_1$  полиномы  $Q_{\mathbf{n}_1,0}, Q_{\mathbf{n}_1,1} \in \mathbb{P}_n^*$ , полиномы  $Q_{\mathbf{n}_1,2}, Q_{\mathbf{n}_1,3} \in \mathbb{P}_{n-1}^*$  и справедливо соотношение

$$R_{\mathbf{n}_1}(z) := (Q_{\mathbf{n}_1,0} + Q_{\mathbf{n}_1,1}f_\infty + Q_{\mathbf{n}_1,2}f_\infty^2 + Q_{\mathbf{n}_1,3}f_\infty^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (22)$$

$\deg Q_{\mathbf{n}_1,0} = \deg Q_{\mathbf{n}_1,1} = n$ ,  $\deg Q_{\mathbf{n}_1,2} = \deg Q_{\mathbf{n}_1,3} = n-1$ , все нули полиномов  $Q_{\mathbf{n}_1,j}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , простые и лежат в интервале  $\Delta_1^\circ$ .

Для мультииндекса  $\mathbf{n}_2$  полиномы  $Q_{\mathbf{n}_2,0}, Q_{\mathbf{n}_2,1}, Q_{\mathbf{n}_2,2} \in \mathbb{P}_n^*$ , полином  $Q_{\mathbf{n}_2,3} \in \mathbb{P}_{n-1}^*$  и справедливо соотношение

$$R_{\mathbf{n}_2}(z) := (Q_{\mathbf{n}_2,0} + Q_{\mathbf{n}_2,1}f_\infty + Q_{\mathbf{n}_2,2}f_\infty^2 + Q_{\mathbf{n}_2,3}f_\infty^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+2}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \quad (23)$$

$\deg Q_{\mathbf{n}_2,0} = \deg Q_{\mathbf{n}_2,1} = \deg Q_{\mathbf{n}_2,2} = n$ ,  $\deg Q_{\mathbf{n}_2,3} = n - 1$ , все нули полиномов  $Q_{\mathbf{n}_2,j}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , простые и лежат в интервале  $\Delta_1^\circ$ .

Положим теперь

$$\begin{aligned} S_{2n,1}(z) &:= \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_1,1}(z) & Q_{\mathbf{n}_1,3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_2,1}(z) & Q_{\mathbf{n}_2,3}(z) \end{vmatrix} = (Q_{\mathbf{n}_1,1}Q_{\mathbf{n}_2,3} - Q_{\mathbf{n}_1,3}Q_{\mathbf{n}_2,1})(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}, \\ S_{2n,2}(z) &:= \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}_1,2}(z) & Q_{\mathbf{n}_1,3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}_2,2}(z) & Q_{\mathbf{n}_2,3}(z) \end{vmatrix} = (Q_{\mathbf{n}_1,2}Q_{\mathbf{n}_2,3} - Q_{\mathbf{n}_1,3}Q_{\mathbf{n}_2,2})(z) \in \mathbb{P}_{2n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Справедлива

**ТЕОРЕМА 3.** *При  $n \rightarrow \infty$  все нули полиномов  $S_{2n,j}$ ,  $j = 1, 2$ , притягиваются к отрезку  $\Delta_2$  и имеют место следующие утверждения:*

$$\frac{1}{2n} \chi(S_{2n,j}) \xrightarrow{*} \lambda \in M_1(\Delta_2); \quad (25)$$

$$\frac{S_{2n,1}}{S_{2n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})], \quad z \in D_2 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_2; \quad (26)$$

скорость сходимости в (26) характеризуется следующим соотношением:

$$\left| [f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})] + \frac{S_{2n,1}}{S_{2n,2}}(z) \right|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \delta_2(z), \quad z \in D_2, \quad (27)$$

где

$$\delta_2(z) := e^{2(V^\lambda(z) + G_{\Delta_1}^\lambda(z) + g_{\Delta_1}(z, \infty) - \gamma(\lambda))} < 1, \quad z \in D_2.$$

В (26)–(27) утверждается сходимость по емкости, а не равномерная сходимость, как в (16)–(17) и (20)–(21). Подчеркнем, что это связано только с используемым нами методом доказательства теоремы 3, а не существом дела. Трудность состоит в том, что хотя хорошо известны различные обобщения полиномов Эрмита–Паде (см. [40], [15]) полиномы  $S_{2n,j}$  по-видимому ранее не рассматривались и их свойства не исследовались. Соотношения (24) – это явные представления полиномов  $S_{2n,j}$  через полиномы Эрмита–Паде 1-го типа, соответствующие двум соседним мультииндексам. Существует естественное формальное определение этих полиномов, вполне вполне аналогичное формальным определениям (9)–(11) и (18) полиномов Эрмита–Паде 1-го и 2-го типов соответственно. Такое определение будет дано в работе [49]. Из этого определения и сформулированной выше теоремы 3 вытекает, что полиномы  $S_{2n,j}$  занимают промежуточное положение между полиномами Эрмита–Паде 1-го типа и полиномами Эрмита–Паде 2-го типа.

Для содержательного задания полиномов  $S_{2n,1}$  и  $S_{2n,2}$  посредством определителей (24), элементами которых являются полиномы Эрмита–Паде 1-го типа, необходимо, чтобы эти определители не обращались в нуль тождественно. Для выполнения этого требования, мультииндексы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  должны удовлетворять условию, более ограничительному, чем условие нормальности для обычных АП. В случае (6) (т.е. при вещественных  $A$  и  $B$ ) это условие выполняется. Однако в более общем случае при комплексных величинах  $A$  и  $B$  оно уже может нарушаться (см. ниже § 3).

В этой связи напомним следующий хорошо известный факт (см. [33], [31]).

Введем мультииндексы  $\mathbf{n}'_1 = (n, n-1, n-1)$ ,  $\mathbf{n}'_2 = (n-1, n, n-1)$  и  $\mathbf{n}'_3 = (n-1, n-1, n)$  (мультииндекс  $\mathbf{n}'_1$  совпадает с мультииндексом  $\mathbf{n}_1$  введенным ранее). Пусть  $Q_{\mathbf{n}'_k, j}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – соответствующие полиномы Эрмита–Паде 1-го типа. Тогда имеют место следующие явные представления для полиномов Эрмита–Паде 2-го типа, определенных отношениями (9)–(11), при условии, что соответствующие определители не обращаются в нуль тождественно:

$$Q_{3n}(z) = \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}'_1, 1}(z) & Q_{\mathbf{n}'_1, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_1, 3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}'_2, 1}(z) & Q_{\mathbf{n}'_2, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_2, 3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}'_3, 1}(z) & Q_{\mathbf{n}'_3, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_3, 3}(z) \end{vmatrix}, \quad (28)$$

$$P_{3n, 1}(z) = - \begin{vmatrix} Q_{\mathbf{n}'_1, 0}(z) & Q_{\mathbf{n}'_1, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_1, 3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}'_2, 0}(z) & Q_{\mathbf{n}'_2, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_2, 3}(z) \\ Q_{\mathbf{n}'_3, 0}(z) & Q_{\mathbf{n}'_3, 2}(z) & Q_{\mathbf{n}'_3, 3}(z) \end{vmatrix}.$$

Аналогичные представления при таких же условиях невырожденности имеют место и для полиномов  $P_{3n, 2}$  и  $P_{3n, 3}$ .

Подчеркнем еще раз, что определение (9)–(11) полиномов Эрмита–Паде 2-го типа существенно более общее, чем явное представление (28). А именно, согласно (9)–(11) такие полиномы  $Q_{3n} \not\equiv 0$ ,  $P_{3n, j} \not\equiv 0$  всегда существуют, в то время как представление (28) справедливо не всегда. С вновь введенными полиномами  $S_{2n, j}$  ситуация обстоит вполне аналогично. Как уже говорилось выше, детально обсудить эти полиномы предполагается в следующей работе [49]. Тем не менее, все же отметим, что из вышесказанного вытекает, что именно полиномы Эрмита–Паде 1-го типа являются в определенном смысле основными при эффективном решении задачи об аналитическом продолжении заданного роста многозначной аналитической функции. Действительно, все используемые для этой процедуры рациональные аппроксимации могут быть в принципе вычислены через такие полиномы, соответствующие различным мультииндексам.

**2.5.** Итак, соотношения (16), (26) и (20) составляют в совокупности набор соотношений, которые позволяют на основе локальных данных – ростке  $f_\infty$  – последовательно восстанавливать значения многозначной функции  $f(z)$  на первом, втором и третьем листах рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Разумеется, речь идет о предельной процедуре, при которой число коэффициентов Лорана заданного роста  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$ , вовлеченных в построение надлежащих рациональных аппроксимаций, неограниченно растет, поскольку никаким конечным числом коэффициентов Лорана аналитическая функция определена быть не может. Отметим, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  число коэффициентов Лорана, вовлеченных в рассматриваемую конструкцию, состоящую из трех рациональных функций, не превосходит  $3n + 4$ .

Подчеркнем, что на последний четвертый лист  $\mathfrak{R}_4^{(4)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  с помощью указанной процедуры функцию  $f(z)$  продолжить уже невозможно. Это вполне согласуется с тем фактом, что диагональные АП продолжают росток  $w_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  гиперэллиптической функции  $w$ ,  $w^2 = P_{2\ell}(z) = z^{2\ell} + \dots \in \mathbb{P}_{2\ell}$ , только

на первый лист соответствующей двулистной гиперэллиптической поверхности. Это представляется вполне естественным, поскольку упрощенно говоря, значения гиперэллиптической функции  $w$  различаются на двух листах соответствующей рп только знаком.

Подчеркнем также следующий факт. Из вышесказанного может возникнуть впечатление, что на первом листе  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  функция  $f$  всегда может быть восстановлена по ростку  $f_\infty$  с помощью диагональных АП  $[n/n]_{f_\infty}$ . Но это не так. Дело в том, что говоря о разбиении рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на “листья” мы фактически подразумевали выше интуитивное (и никак не формализованное) представление о листах рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , которое опиралось на разрезы, проведенные по уже заранее заданным отрезкам  $\Delta_1 = [-1, 1]$  и  $\Delta_2 = [a, b]$ . Но в общем случае даже для простой функции вида (6) это уже не так и дело обстоит гораздо сложнее. А именно, стоит только хотя бы одной из двух точек  $a = (A + 1/A)/2$  или  $b = (B + 1/B)/2$  сдвинуться с вещественной прямой в комплексную плоскость, как ситуация кардинально изменится. Естественное для полиномов Эрмита–Паде разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листья будет происходить уже не по исходным отрезкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а по некоторым дугам  $\ell_1$  и  $\ell_2$ , соединяющим точки  $-1, 1$  и  $a, b$  соответственно. Более точно, речь идет о так называемом *каноническом* или *наттолловском* разбиении рп на листья, которое однозначно определяется вещественной частью некоторого абелева интеграла с логарифмическими особенностями и чисто мнимыми периодами (см. [33; Sec. 3], [25; формула (3) и лемма 5], а также п. 3 ниже). В частности, при таком разбиении на листья первому листу будет соответствовать область  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \ell_1$ , которая, вообще говоря, не совпадает с областью  $D_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$ , соответствующей первому листу поверхности Шталя.

Можно показать, что в случае, когда в (6) величины  $A$  и  $B$  – вещественные, наттолловское разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листья совпадает с интуитивным представлением о таком разбиении.

Действительно, нетрудно увидеть (см. [49]), что заданная с помощью введенных выше (см. (13) и (14)) мер  $\lambda$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  вещественная функция  $u$ ,

$$\begin{aligned} u(z^{(1)}) &:= 3V^{\lambda_2}(z) \quad z \in D_1, \\ u(z^{(2)}) &:= 2V^\lambda(z) - 3V^{\lambda_2}(z) + 2c_1, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2), \\ u(z^{(3)}) &:= V^{\lambda_1}(z) - 2V^\lambda(z) + 2c_1 + c_2, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2), \\ u(z^{(4)}) &:= -V^{\lambda_1}(z) + 2c_1 + c_2 + 2c_3, \quad z \in D_1, \end{aligned} \tag{29}$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – надлежащим образом выбранные постоянные, является (однозначной) гармонической функцией на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  всюду за исключением четырех точек  $\pi_4^{-1}(\infty)$ , в которых она имеет логарифмические особенности:

$$\begin{aligned} u(z^{(1)}) &= -3 \log |z| + O(1), \quad z \rightarrow \infty, \\ u(z^{(j)}) &= \log |z| + O(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

При этом справедливы следующие соотношения:

$$u(z^{(1)}) < u(z^{(2)}) < u(z^{(3)}) < u(z^{(4)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta_1 \cup \Delta_2). \tag{30}$$

Неравенства (30) и означают, что принятое нами (на интуитивном уровне) разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы является на самом деле наттоловским разбиением [33; Sect. 3, соотношение (3.1.3)]; см. также [1], [29].

Следующий параграф будет посвящен уже комплексному случаю, ключевую роль в котором играет именно наттоловское разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы, свойства которого в комплексном случае далеко не очевидны (см. [33; Sect. 3], [25; Лемма 5]).

### § 3. Комплексный случай

**3.1.** Здесь мы сформулируем и обсудим некоторые теоретические результаты, полученные нами для случая, когда в представлении (1) все показатели  $\alpha_j = \pm 1/2$  и число  $m$  – четное. При этом на комплексные величины  $A_j$  не налагается никаких дополнительных условий, кроме того, что все они попарно различны и все  $|A_j| > 1$ . В этом случае для таких функций  $f$  из класса  $\mathcal{Z}$  с четырехлистной рп мы установим некоторые свойства наттоловского разбиения этой рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , которые в общем случае вообще говоря не имеют места<sup>9</sup>. Кроме того, в этом частном случае наш альтернативный подход к характеристизации наттоловского разбиения рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы позволяет получить некоторую дополнительную информацию о свойствах такого разбиения.

Для случая  $m = 2$  (при тех же условиях на показатели:  $\alpha_{1,2} = \pm 1/2$ ) мы сформулируем аналоги теорем 1–3, справедливые в отличие от вещественного случая, при некоторых дополнительных предположениях о свойствах функций остатка  $R_{n_1}$ ,  $R_{n_2}$  и  $R_{n_3}$ . Подчеркнем, что необходимость введения этих дополнительных предположений о свойствах функций остатка, связана не с существом дела, а с несовершенством существующих к настоящему моменту методов исследования асимптотических свойств полиномов Эрмита–Паде. В частности, многие гипотезы, высказанные в этом направлении (см. [33], [41], [2]) остаются открытыми до сих пор.

Отметим, что первые достаточно общие результаты о сходимости (по емкости) диагональных АП были получены Дж. Наттолом (см. [32], [33]) в классе гиперэллиптических функций, т.е. функций, все ветвления которых – второго порядка. Именно в этом случае в начале 1980-ых годов (т.е. еще до работ Г. Шталя 1985–1986 гг.) возникло наттоловское разбиение гиперэллиптической поверхности  $\mathfrak{R}_2(w)$  на листы с помощью вещественной части абелева интеграла третьего рода с чисто мнимыми периодами и надлежащими логарифмическими особенностями в двух точках  $\pi_2^{-1}(\infty)$  (см. также (33) и (34)). В этом частном случае каждый из двух наттоловских листов является областью. В 1984 году Наттолом [33; Sec. 3] была высказана гипотеза о том, что и при любом  $m \geq 3$  разбиение  $m$ -листной рп на наттоловские листы приводит к тому, что дополнение к замыканию последнего самого “верхнего” (ср. (30)) листа является областью на исходной рп  $\mathfrak{R}_m$ . В полном объеме эта гипотеза была доказана совсем недавно в работе [25; Лемма 5]. В настоящей работе для рассматриваемого здесь класса многозначных аналитических функций вида (1)

<sup>9</sup>Отметим, что общая гипотеза Наттолла [33; Sect. 3] о том, что при каноническом разбиении на листы любой  $m$ -листной поверхности дополнение к последнему  $m$ -му листу всегда связано, доказана в недавней работе [25; Лемма 5].

при условии  $\alpha_j = \pm 1/2$  мы установим некоторые дополнительные свойства такого разбиения, в частности, – свойство связности первого листа  $\mathfrak{R}_4^{(1)}(f)$ .

**3.2.** Итак, пусть

$$f(z) := \prod_{j=1}^m \left( A_j - \frac{1}{\varphi(z)} \right)^{\alpha_j}, \quad z \in D_1, \quad (31)$$

где все  $\alpha_j = \pm 1/2$ ,  $m \equiv 0 \pmod{2}$ , все  $A_j$  попарно различны и  $|A_j| > 1$ . Класс таких функций обозначим через  $\mathcal{Z}_{1/2}$ .

Введем двулистную рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  функции  $w$ , определенной равенством  $w^2 = z^2 - 1$ . Будем считать, что рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  реализована как двулистное накрытие римановой сферы  $\overline{\mathbb{C}}$  при помощи униформизации, задаваемой явным образом:

$$z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (32)$$

В соответствии с этим первый лист  $\mathfrak{R}_2^{(1)}$ , на котором  $w = (z^2 - 1)^{1/2}/z \rightarrow 1$  при  $z \rightarrow \infty$ , соответствует внешности  $\{\zeta : |\zeta| > 1\}$  единичного круга  $\mathbb{D}_\zeta := \{\zeta : |\zeta| < 1\}$  в  $\zeta$ -плоскости, а второй лист  $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ , на котором  $w = -(z^2 - 1)^{1/2}/z \rightarrow -1$  при  $z \rightarrow \infty$ , соответствует самому единичному кругу. Под точкой  $\mathbf{z}$  на рп  $\mathfrak{R}_2(w)$ ,  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}_2(w)$ , будем понимать пару  $\mathbf{z} := (z, w) = (z, \pm(z^2 - 1)^{1/2})$ . Каноническая проекция  $\pi_2: \mathfrak{R}_2(w) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  определяется соотношением  $\pi_2(\mathbf{z}) := z$ . Под точкой  $\mathbf{z} = \infty^{(1)} \in \mathfrak{R}_2(w)$  понимаем такую точку на рп  $\mathfrak{R}_2(w)$ , что  $\pi_2(\infty^{(1)}) = \infty$  и  $w/z \rightarrow 1$  при  $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}$ . Аналогично, для  $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$  имеем:  $\pi_2(\infty^{(2)}) = \infty$  и  $w/z \rightarrow -1$  при  $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$ . Переход с первого листа  $\mathfrak{R}_2^{(1)}$  на второй лист  $\mathfrak{R}_2^{(2)}$  происходит по разрезанному отрезку  $\Delta_1$ , при этом как обычно предполагается, что у отрезка есть два берега – верхний и нижний – и “склейка” листов приходится отождествлением берегов разрезов по правилу “крест-на-крест”, т.е. отождествлением верхнего берега одного отрезка с нижним берегом другого и наоборот. Нетрудно увидеть, что указанное разбиение на листы является наттоловским. Действительно, пусть

$$G(\mathbf{z}) := \int_{-1}^{\mathbf{z}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \log(z + w) = \log(z \pm (z^2 - 1)^{1/2}) \quad (33)$$

– абелев интеграл третьего рода с чисто мнимыми периодами и логарифмическими особенностями только в точках  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$ . Тогда функция  $u_2(\mathbf{z}) := -\operatorname{Re} G(\mathbf{z})$  – гармоническая функция на рп  $\mathfrak{R}_2(w) \setminus \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}\}$ ,

$$u_2(\mathbf{z}) = \mp \log |z| + O(1), \quad \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \infty^{(2)},$$

и

$$u_2(z^{(1)}) < u_2(z^{(2)}), \quad z \in D_1. \quad (34)$$

При этом  $u_2(\mathbf{z}) = 0$  для  $\mathbf{z} \in \Gamma$ ,  $\Gamma := \pi_2^{-1}(\Delta_1)$ . Тем самым,  $-u_2(z^{(1)}) = g_{\Delta_1}(z, \infty)$  – функция Грина области  $D_1$ . Произвольный росток  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  функции  $f \in \mathcal{Z}_{1/2}$ ,  $f \in \mathcal{H}(D_1)$ , поднимается в точку  $\mathbf{z} = \infty^{(1)} \in \mathfrak{R}_2(w)$  и продолжается на весь первый лист  $\mathfrak{R}_2^{(1)}(w)$  как однозначная голоморфная функция

(напомним, что  $\pi_2(\mathfrak{R}_2^{(1)}(w)) = D_1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$ ). Дальнейшему однозначному продолжению этой функции на весь второй лист рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  препятствуют точки ветвления  $a_j^{(2)} \in \mathfrak{R}_2^{(2)}(w)$  такие, что  $\pi_2(a_j^{(2)}) = a_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Для того, чтобы такое однозначное аналитическое (мероморфное) продолжение ростка  $f_\infty$  было возможным, необходимо на втором листе  $\mathfrak{R}_2^{(2)}(w)$  провести надлежащие разрезы.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** (Ср. [45], ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2). Компакт  $\mathbf{K} = K^{(2)} \subset \mathfrak{R}_2^{(2)}(w)$  назовем *допустимым* для ростка  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty^{(1)})$  функции  $f \in \mathcal{X}_{1/2}$ , если этот росток  $f_\infty$  продолжается как однозначная мероморфная функция в область  $\Omega_{\infty(1)}(K^{(2)})$  – связную компоненту дополнения к  $K^{(2)}$ , содержащую точку  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ ,  $f_\infty \in \mathcal{M}(\Omega_{\infty(1)}(K^{(2)}))$ .

Класс всех допустимых компактов для ростка  $f_\infty$  будем обозначать через  $\mathfrak{K}(f_\infty)$ .

Отметим, что можно несколько сузить класс допустимых компактов и заранее предполагать, что рассматриваются только компакты, имеющие связное дополнение, т.е. такие, что  $\Omega_{\infty(1)}(K^{(2)}) = \mathfrak{R}_2(w) \setminus K^{(2)}$ . От этого результат последующих рассмотрений не изменится. В дальнейшем мы будем считать, что семейство  $\mathfrak{K}(f_\infty)$  состоит только из регулярных компактов в том смысле, что область  $\Omega_{\infty(1)}(K^{(2)})$  регулярна относительно решения задачи Дирихле (см. [38], [14]).

Зафиксируем локальную координату  $\zeta$  в точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ ,  $\zeta(\infty^{(1)}) = 0$ . Для произвольного компакта  $\mathbf{K} \in \mathfrak{K}(f_\infty)$  рассмотрим функцию Грина  $g_{\mathbf{K}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)})$  области  $\Omega_{(1)}(\mathbf{K})$  с логарифмической особенностью в точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  с учетом выбора локального параметра в этой точке, т.е. по определению имеем:  $g_{\mathbf{K}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)}) = 0$  при  $\mathbf{z} \in \partial\Omega_{\infty(1)}(\mathbf{K})$  и

$$g_{\mathbf{K}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)}) = \log \frac{1}{|\zeta|} + \gamma + o(1), \quad \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \quad (35)$$

где  $\gamma = \gamma(\mathbf{K})$  – постоянная Робена для области  $\Omega_{\infty(1)}(\mathbf{K})$  в точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  относительно выбранной локальной координаты  $\zeta$  (см. [38; Глава 8, § 4]).

Из общих результатов [38] вытекает следующее утверждение.

**ЛЕММА 2.** *В классе  $\mathfrak{K}(f_\infty)$  существует единственный компакт  $\mathbf{F}$  такой, что*

$$\gamma(\mathbf{F}) = \max_{\mathbf{K} \in \mathfrak{K}(f_\infty)} \gamma(\mathbf{K}). \quad (36)$$

Этот экстремальный компакт  $\mathbf{F}$  не разбивает рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  (т.е.  $\Omega^{(1)}(\mathbf{F}) = \mathfrak{R}_2(w) \setminus \mathbf{F}$  – область), состоит из конечного числа аналитических дуг и обладает следующим  $S$ -свойством:

$$\frac{\partial g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)})}{\partial n^+} = \frac{\partial g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)})}{\partial n^-}, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{F}^\circ; \quad (37)$$

в (37)  $\mathbf{F}^\circ$  – объединение открытых дуг, замыкания которых составляют  $\mathbf{F}$ , под  $\partial/\partial n^+$  и  $\partial/\partial n^-$  понимаются нормальные производные к  $\mathbf{F}^\circ$  в точке  $\mathbf{z}$ , взятые с противоположных сторон  $\mathbf{F}$  (справедливость равенства (37) не зависит от локальной координаты, выбранной в точке  $\mathbf{z} \in \mathbf{F}^\circ$ ).

Лемма 2 доказывается с помощью метода внутренних вариаций Шиффера и в соответствии с общей схемой, предложенной в [38; Глава 8, § 4].

Величину  $e^{-\gamma(\mathbf{K})}$  естественно назвать емкостью компакта  $\mathbf{K}$  (эта величина зависит от локальной координаты, выбранной в точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ ). Тем самым,  $\mathbf{F} \in \mathfrak{K}(f_\infty)$  – допустимый компакт минимальной емкости (это свойство уже не зависит от выбора локальной координаты).

На самом деле, поскольку род рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  равен нулю, лемму 2 можно свести к плоскому случаю и соответствующему компакту минимальной емкости на плоскости. Действительно, униформизация  $\mathfrak{R}_2(w)$  задается с помощью функции Жуковского следующим образом:

$$z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta \in \overline{\mathbb{C}}_\zeta. \quad (38)$$

При этом первому листу  $\mathfrak{R}_2^{(1)}(w)$  соответствует внешность  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  единичного круга  $\mathbb{D} := \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ : а второму листу – единичный круг  $\mathbb{D}$ . Функция  $f(z) \in \mathcal{X}_{1/2}$  вида (31) переходит в функцию  $\tilde{f}(\zeta)$  следующего вида:

$$\tilde{f}(\zeta) = \prod_{j=1}^m \left( A_j - \frac{1}{z+w} \right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^m \left( A_j - \frac{1}{\zeta} \right)^{\alpha_j}, \quad (39)$$

где все  $\alpha_j = \pm 1/2$ . Поскольку все величины  $A_j \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , то все особые точки функции  $\tilde{f}$  имеют вид  $\zeta = \tilde{a}_j = 1/A_j \in \mathbb{D}$ . Тем самым, экстремальному компакт  $\mathbf{F}$  для функции  $f$  на рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  соответствует допустимый компакт минимальной емкости  $\tilde{F}$  для функции  $\tilde{f}$ , заданной элементом  $\tilde{f}_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  (отметим, что  $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \tilde{F})$  и в точке  $\zeta = 0$  функция  $\tilde{f}$  имеет полюс). В силу хорошо известных свойств компакта минимальной емкости, имеем:  $\tilde{F} \subset \mathbb{D}$  (точнее, компакт  $\tilde{F}$  принадлежит выпуклой оболочке множества  $\{\tilde{a}_j = 1/A_j, j = 1, \dots, m\}$ ), состоит из конечного числа аналитических дуг – траекторий квадратичного дифференциала, не разбивает комплексную плоскость и обладает  $S$ -свойством вида (37). Кроме того, имеет место следующее равенство:

$$\tilde{F} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \int_{\tilde{a}_j}^{\zeta} \sqrt{\frac{V_{m-2}(t)}{A_m(t)}} dt = 0 \right\}, \quad (40)$$

где  $A_m(t) := \prod_{j=1}^m (t - \tilde{a}_j)$ ,  $V_{m-2}(t) := (t - v_1) \dots (t - v_{m-2})$  – соответствующий полином Чеботарёва,  $v_j, j = 1, \dots, m$ , – точки Чеботарёва компакта  $\tilde{F}$ . Все эти свойства компакта минимальной емкости хорошо известны в общем случае и получены еще Шталем в 1985 г. (см. [42], [43], а также [4] и [44]).

В рассматриваемом здесь случае все точки ветвления функции  $\tilde{f}$  – второго порядка. В такой ситуации существование и описание компакта минимальной емкости было получено еще Наттолллом [32], [33]. В частности, в случае общего положения все нули полинома  $V_{m-2}$  – четной кратности, все  $v_j \neq a_k$  при  $j = 1, \dots, m-2, k = 1, \dots, m$ , и компакт  $\tilde{F}$  состоит из  $m/2 \in \mathbb{N}$  непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих точки множества  $\{\tilde{a}_j, j = 1, \dots, m\}$ .

Итак, мы получили на втором листе рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  систему аналитических дуг, составляющих компакт  $\mathbf{F}$ , не разбивающих рп  $\mathfrak{R}_2(w)$ , обладающих  $S$ -свойством (37) и таких, что  $f_\infty \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_2(w) \setminus \mathbf{F})$ .



Поступим теперь следующим образом. При  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}_2(w) \setminus \mathbf{F}$  рассмотрим функцию

$$u(\mathbf{z}) := -2g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)}) - g(\mathbf{z}),$$

где  $g(\mathbf{z}) = \log |z + w| = \log |\zeta|$ . Функция  $v(\mathbf{z})$  гармонична в области  $\mathfrak{R}_2(w) \setminus \mathbf{F}$  за исключением бесконечно удаленных точек  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  и  $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ , где она имеет следующее поведение:

$$u(\mathbf{z}) = \begin{cases} -3 \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \\ \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)} \end{cases} \quad (41)$$

(здесь и далее мы предполагаем для простоты, что  $\infty^{(2)} \notin \mathbf{F}$ ; в противном случае необходимо более аккуратное рассмотрение, вполне аналогичное, проведенному в [25]).

Положим

$$\mathbf{E} := \{\mathbf{z} \in \mathfrak{R}_2(w) : u(z^{(1)}) = u(z^{(2)})\}; \quad (42)$$

здесь под  $z^{(1)} \in \mathfrak{R}_2^{(1)}(w)$  и  $z^{(2)} \in \mathfrak{R}_2^{(2)}(w)$  подразумевается как и выше наттоловское разбиение рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  на листы. Нетрудно увидеть, что  $\mathbf{E}$  – замкнутая дуга на рп  $\mathfrak{R}_2(w)$ , проходящая через точки  $\mathbf{z} = \pm 1$ , не пересекающая компакт  $\mathbf{F}$  и разбивающая  $\mathfrak{R}_2(w)$  на две области, одна из которых содержит  $\mathbf{F}$ , а другая – точку  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ . Возьмем теперь второй экземпляр рп  $\mathfrak{R}_2(w)$ , который мы обозначим через  $\mathfrak{R}'_2(w)$ , с разрезами, проведенными по дугам компакта  $\mathbf{F}$ , и подклеим его к первому экземпляру с такими же разрезами с помощью стандартного отождествления противоположных берегов разрезов по правилу “крест-на-крест”. В результате получится уже четырехлистная рп, на которую исходный росток  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty^{(1)})$  продолжается как однозначная мероморфная функция, поскольку эта четырехлистная рп совпадает с рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Так как  $g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)}) = 0$  при  $\mathbf{z} \in \mathbf{F}$ , то функция  $g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)})$  непрерывно продолжается на подклеенную рп  $\mathfrak{R}'_2(w)$  по непрерывности со сменой знака.  $S$ -свойство (37) гарантирует, что это продолжение будет гармонической функцией на полученной четырехлистной рп. Поскольку функция  $g(\mathbf{z})$  гармонична в окрестности компакта  $\mathbf{F}$ , то она продолжается на второй экземпляр рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  дублированием своих значений с первого экземпляра  $\mathfrak{R}_2(w)$ . Через  $\mathbf{E}'$  обозначим замкнутую кривую, лежащую на втором экземпляре  $\mathfrak{R}_2(w)$  и соответствующую кривой  $\mathbf{E}$ , через  $\infty^{(4)}$  обозначим точку, лежащую на втором экземпляре  $\mathfrak{R}_2(w)$  и соответствующую точке  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ .

Произведем теперь разбиение полученной четырехлистной рп  $\mathfrak{R}_4$  на листы следующим образом. Первый лист  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$  – это область, содержащая точку  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$  с границей  $\partial \mathfrak{R}_4^{(1)} = \mathbf{E}$ . Второй лист  $\mathfrak{R}_4^{(2)}$  – это область с границей  $\mathbf{E} \cup \mathbf{F}$ . Третий лист  $\mathfrak{R}_4^{(3)}$  – это область с границей  $\mathbf{F} \cup \mathbf{E}'$ . Наконец, четвертый лист  $\mathfrak{R}_4^{(4)}$  – это область с границей  $\mathbf{E}'$ . Для точек  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}'_2(w)$  положим теперь

$$u(\mathbf{z}) := -2g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)}) - g(\mathbf{z}); \quad (43)$$

выше мы уже объяснили как следует понимать функции  $g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty^{(1)})$  и  $g(\mathbf{z})$  при  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}'_2(w)$ . Нетрудно увидеть, что  $u(\mathbf{z})$  – гармоническая функция в области

$\mathfrak{R}_4(f) \setminus \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}, \infty^{(3)}, \infty^{(4)}\}$ . Кроме того, справедливы представления:

$$u(\mathbf{z}) = \begin{cases} -3 \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \\ \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}, \\ \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(3)}, \\ \log |z| + O(1), & \mathbf{z} \rightarrow \infty^{(4)}, \end{cases} \quad (44)$$

и при вышеуказанном разбиении рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы имеют место неравенства:

$$u(z^{(1)}) < u(z^{(2)}) < u(z^{(3)}) < u(z^{(4)}). \quad (45)$$

Таким образом, разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы, введенное нами с помощью функции Грина  $g_{\mathbf{F}}(\mathbf{z}, \infty)$ , соответствующей компакту минимальной емкости  $\mathbf{F} \subset \mathfrak{R}_2(w)$ , оказалось наттолловским разбиением; подробнее см. [49].

**3.3.** В оставшейся части настоящего параграфа мы ограничимся случаем, когда в представлении (31)  $m = 2$ . Точнее, как и в § 2 мы будем предполагать, что  $f \in \mathcal{Z}$  имеем вида

$$f(z) = \left[ \left( A - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \left( B - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \right]^{-1/2}, \quad (46)$$

где по-прежнему  $|A| > 1$ ,  $|B| > 1$ ,  $A \neq Be$ , но в отличие от § 2 вещественности величин  $A$  и  $B$  уже не предполагается.

Зафиксируем росток  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  функции  $f \in \mathcal{H}(D_1)$  вида (46) (два возможных ростка отличаются только знаком). В силу исходного предположения об обратной функции Жуковского (а именно,  $|\varphi(z)| > 1$  при  $z \notin \Delta_1$ ) имеем:  $f_\infty \in \mathcal{H}(D_1)$ . Напомним, что с точки зрения теории Шталя первый лист двулистной рп, ассоциированной с ростком  $f_\infty$ , это первый лист  $\mathfrak{R}_2^{(1)}(w) \ni z^{(1)}$  рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  функции  $w^2 = z^2 - 1$ , задаваемый неравенством (см. (34)):

$$-g(z^{(1)}) < -g(z^{(2)})$$

с канонической проекцией  $\pi_2: \mathfrak{R}_2(w) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $\pi_2(\mathbf{z}) = z$ , где  $\mathbf{z} = (z, w)$  в предположении, что  $w/z \rightarrow 1$  при  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}_2^{(1)}(w)$ ,  $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}$ , и  $w/z \rightarrow -1$  при  $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}_2^{(2)}(w)$ ,  $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$ .

Из сказанного выше в п. 3.2 этого параграфа вытекает, что в случае, когда хотя бы одно из чисел  $A$  или  $B$  не лежит на вещественной прямой, наттолловское разбиение рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  на листы происходит уже нетривиальным образом. А именно, не по замкнутым кривым на  $\mathfrak{R}_4(f)$ , соответствующим (с точки зрения канонической проекции  $\pi_4: \mathfrak{R}_4(f) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ) отрезкам  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а по кривым  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{E}'$ , которым при заданной канонической проекции соответствуют некоторые дуги  $E$ ,  $F$  и  $E'$ , соединяющие попарно точки  $-1, 1, a, b$  и снова  $-1, 1$ . Соответственно этому, первый лист  $\mathfrak{R}_4^{(1)}$  наттолловского разбиения на листы рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  уже не совпадает с первым листом поверхности Шталя  $\mathfrak{R}_2(w)$  (хотя активные точки ветвления  $\mathbf{z} = \pm 1$ , лежащие на границе этих двух листов, оказываются теми же самыми). Более точно, имеем  $\pi_2(\mathfrak{R}_2^{(1)}(w)) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1 \neq \overline{\mathbb{C}} \setminus E = \pi_4(\mathfrak{R}_4^{(1)})$ , поскольку в общем случае  $E \neq \Delta_1$ . Кроме того, как нетрудно увидеть из результатов п. 3.2, имеем:  $E \cap F = \emptyset$ ,  $F \cap E' = \emptyset$ , при этом в вещественном

случае  $E = E'$ . Эти факты играют ключевую роль в том использовании полиномов Эрмита–Паде в приложениях, которое обсуждается в заключительном § 5 настоящей работы (см. рис. 10–13).

Пусть  $R_{\mathbf{n}_1}, R_{\mathbf{n}_2}$  и  $R_{\mathbf{n}_3}$  – функции остатка для трехмерных мультииндексов<sup>10</sup>  $\mathbf{n}_1 := (n, n-1, n-1)$ ,  $\mathbf{n}_2 := (n, n, n-1)$  и  $\mathbf{n}_3 := (n, n, n)$  соответственно (см. (22), (23) и (18)). При  $A, B \in \mathbb{R}$  все эти мультииндексы нормальны (определение нормального мультииндекса см. [31]). Этот факт является следствием свойства совершенности произвольной системы Никишина, доказанного в [16]; см. также [31], [15]. Следовательно, при  $z \rightarrow \infty$  имеем

$$R_{\mathbf{n}_1}(z) = \frac{C_{\mathbf{n}_1}}{z^{3n+1}} + \dots, \quad R_{\mathbf{n}_2}(z) = \frac{C_{\mathbf{n}_2}}{z^{3n+2}} + \dots, \quad R_{\mathbf{n}_3}(z) = \frac{C_{\mathbf{n}_3}}{z^{3n+3}} + \dots, \quad (47)$$

где все  $C_{\mathbf{n}_1}, C_{\mathbf{n}_2}, C_{\mathbf{n}_3} \neq 0$ . При комплексных  $A$  и  $B$  это уже не так.

Все три функции  $R_{\mathbf{n}_1}, R_{\mathbf{n}_2}$  и  $R_{\mathbf{n}_3}$  – (однозначные) мероморфные функции на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Нетрудно найти их дивизоры (нулей и полюсов). А именно, справедливы следующие явные представления:

$$\begin{aligned} (R_{\mathbf{n}_1}) &= (3n+1)\infty^{(1)} - n\infty^{(2)} - n\infty^{(3)} - n\infty^{(4)} - 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^5 \mathbf{p}_{1,j}(n), \\ (R_{\mathbf{n}_2}) &= (3n+2)\infty^{(1)} - n\infty^{(2)} - n\infty^{(3)} - n\infty^{(4)} - 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^4 \mathbf{p}_{2,j}(n), \quad (48) \\ (R_{\mathbf{n}_3}) &= (3n+3)\infty^{(1)} - n\infty^{(2)} - n\infty^{(3)} - n\infty^{(4)} - 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^3 \mathbf{p}_{3,j}(n). \end{aligned}$$

В вещественном случае в силу того, что система Никишина совершенна, в (48) не может быть никаких сокращений (нулей и полюсов), т.е. все  $\mathbf{p}_{k,j}(n) \neq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ . Кроме этого, непосредственно из (47) вытекает, что все  $\mathbf{p}_{k,j}(n) \neq \infty^{(1)}$ . Более того, можно доказать, что при всех  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{p}_{k,j}(n) \in \mathfrak{R}_4(f) \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(1)}}. \quad (49)$$

В комплексном случае это уже не так. Возможно, некоторые из приведенных выше утверждений и справедливы в случае “общего положения”, но это требует специального исследования и пока остается не доказанным. К сожалению, к настоящему времени в теории полиномов Эрмита–Паде отсутствуют методы, позволяющие получать содержательные и достаточно общие результаты об асимптотике таких полиномов в комплексном случае. Многие из частных результатов, полученных для комплексного случая, в той или иной степени используют возможность сведения этой частной задачи к вещественному случаю (см., например, [12], [27]). В силу несовершенства методов, разработанных к настоящему времени в теории полиномов Эрмита–Паде, практически все достаточно общие и хорошо известные гипотезы об асимптотике таких полиномов длительное время остаются недоказанными (о различных гипотезах в этом

<sup>10</sup>В этом параграфе обозначения, используемые для мультииндексов, отличаются от тех, которые использовались ранее в § 2.

направлении см. [33], [41], [2], а также [36], [37], [48], [47]). Отметим, что поставленная Наттолло в 1984 году [33; Sect. 3] гипотеза о топологических свойствах канонического (называемого теперь “наттолловским”) разбиения произвольной римановой поверхности на листы была доказана совсем недавно в 2017 году в работе [25].

Для справедливости аналога теоремы 2 в рассматриваемом здесь комплексном случае никаких дополнительных условий налагать не требуется, поскольку нужный нам результат вытекает непосредственно из более общего результата, полученного недавно в [25; Теорема 2].

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $Q_{n,j}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , – полиномы Эрмита–Паде, определяемые соотношением (18). Тогда при каждом  $j$  и при  $n \rightarrow \infty$  все нули полиномов  $Q_{n,j}$ , кроме возможно конечного числа, не зависящего от  $n$ , притягиваются к компакт  $E' = \pi_4(\mathbf{E}')$  и

$$\frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)}) + f(z^{(3)})], \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E'. \quad (50)$$

Введем теперь мультииндексы<sup>11</sup>  $\mathbf{n}_1 = (n, n-1, n-1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (n-1, n, n-1)$  и  $\mathbf{n}_3 = (n-1, n-1, n)$ . Пусть  $Q_{\mathbf{n}_k,j}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  – соответствующие полиномы Эрмита–Паде 1-го типа для набора  $[1, f_\infty, f_\infty^2, f_\infty^3]$ ,  $R_{\mathbf{n}_k}(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – соответствующие функции остатка:

$$R_{\mathbf{n}_k}(z) = (Q_{\mathbf{n}_k,0} + Q_{\mathbf{n}_k,1}f_\infty + Q_{\mathbf{n}_k,2}f_\infty^2 + Q_{\mathbf{n}_k,3}f_\infty^3)(z) = O\left(\frac{1}{z^{3n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (51)$$

Функции  $R_{\mathbf{n}_k}$  – однозначные мероморфные функции на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , которые полностью определяются своим дивизором:

$$(R_{\mathbf{n}_k}) = (3n+1)\infty^{(1)} - n\infty^{(2)} - n\infty^{(3)} - n\infty^{(4)} - 3(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^5 \mathbf{p}_{k,j}(n). \quad (52)$$

Для двух произвольных различных точек  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$ ,  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathfrak{R}_4(f)$ , обозначим через  $G(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$  абелев интеграл третьего рода на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  с чисто мнимыми периодами и логарифмическими особенностями только в точках  $\mathbf{z}_1$  и  $\mathbf{z}_2$ , имеющими в соответствующей локальной координате следующий вид:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) &= -\log \zeta + O(1), \quad \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_1, \\ G(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) &= \log \zeta + O(1), \quad \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Тем самым, функция

$$\Psi(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z}) := \exp\{G(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})\} \quad (54)$$

– многозначная аналитическая функция на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  с однозначным модулем, полюсом в точке  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1$  и нулем в точке  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2$ . Из (52) и (54) вытекает, что

<sup>11</sup>В § 2 эти мультииндексы обозначались через  $\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2$  и  $\mathbf{n}'_3$  соответственно. В настоящем параграфе многие вспомогательные обозначения отличаются от тех, которые были введены ранее.

при каждом  $k = 1, 2, 3$  функция остатка  $R_{\mathbf{n}_k}$  представляется в виде:

$$R_{\mathbf{n}_k} = C_k \exp \left\{ n \sum_{j=2}^4 G(\infty^{(j)}, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^5 G(\mathbf{a}_j, \mathbf{p}_{k,j}(n); \mathbf{z}) + G(\mathbf{a}_6, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) \right\}, \quad (55)$$

где  $C_1, C_2, C_3 \neq 0$  – нормировочные постоянные и для удобства записи мы обозначили полюсы функции  $f^3$  на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  через  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_6\}$ , где каждый полюс выписан столько раз, какова его кратность.

Для доказательства аналогов теорем 2 и 3 нам требуются некоторые дополнительные условия. Как уже говорилось, эти условия не связаны с существом дела, необходимость в них вызвана несовершенством методов исследования асимптотических свойств полиномов Эрмита–Паде, разработанных к настоящему времени. Отметим, что налагаемые дополнительные ограничения имеют вид, схожий с (49), но непосредственно в терминах исходного роста  $f_\infty$  выражены, по-видимому, быть не могут.

**ТЕОРЕМА 5.** Пусть для некоторой бесконечной последовательности  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  существует такая окрестность  $\mathbf{U}$  точки  $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ , что все точки  $\mathbf{p}_{k,j}(n)$ , определенные представлениями (48), лежат вне этой окрестности,  $\mathbf{p}_{k,j}(n) \in \mathfrak{R}_4(f) \setminus \bar{\mathbf{U}}$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все нули полиномов  $S_{2n,1} := Q_{\mathbf{n}_1,1}Q_{\mathbf{n}_2,3} - Q_{\mathbf{n}_1,3}Q_{\mathbf{n}_2,1}$  и  $S_{2n,2} := Q_{\mathbf{n}_1,2}Q_{\mathbf{n}_2,3} - Q_{\mathbf{n}_2,2}Q_{\mathbf{n}_1,3}$  кроме не более чем конечного числа, не зависящего от  $n$ , при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \Lambda$ , накапливаются к компакту  $F = \pi_4(\mathbf{F})$ ;

2) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \Lambda$ ,

$$\frac{S_{2n,1}}{S_{2n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})], \quad z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus F. \quad (56)$$

Доказательство теоремы 5 основано на детерминантном представлении полиномов  $S_{2n,j}$  (см. (24)), которое в настоящей работе мы приняли за определение этих полиномов, явном представлении функций остатка (55) через абелевы интегралы третьего рода с чисто мнимыми периодами, вытекающими из формулы (48), и вытекающими из такого представления функций остатка явных формул для полиномов Эрмита–Паде 1-го типа (см. [33], [25; формула (38)]).

Поскольку за отсутствием общих методов исследования асимптотических свойств полиномов Эрмита–Паде 2-го типа в комплексном случае, основанных непосредственно на определении (9)–(11) этих полиномов, мы используем здесь детерминантное представление (28), ключевую роль для нас будет играть невырожденность некоторых определителей, связанных с явным представлением функций остатка (55). А именно, положим

$$\Psi_{n,k}(\mathbf{z}) := \exp \left\{ \sum_{j=1}^5 G(\mathbf{a}_j, \mathbf{p}_{k,j}(n); \mathbf{z}) \right\}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (57)$$

Функции  $\Psi_{n,k}$  – многозначные аналитические на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  с однозначным модулем и многозначностью одинакового характера: все эти три функции становятся однозначными после умножения на один и тот же множитель:

$$\exp\left\{\sum_{k=2}^4 G(\infty^{(k)}, \infty^{(1)}; \mathbf{z}) + G(\mathbf{a}_6, \infty^{(1)}; \mathbf{z})\right\}.$$

Положим

$$\Delta_n(\mathbf{z}) := \det[\Psi_{n,k}(z^{(j)})]_{j=1,2,3; k=1,2,3}. \quad (58)$$

Справедлива

**ТЕОРЕМА 6.** Пусть существует бесконечная последовательность  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  такая, что для некоторого не зависящего от  $n \in \Lambda$  конечного множества точек  $\mathbf{M} := \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_M\} \subset \mathfrak{R}_4(f)$  и произвольного компакта  $\mathbf{K} \subset \mathfrak{R}_4(f) \setminus \mathbf{M}$  справедливы неравенства

$$0 < C_1(\mathbf{K}) \leq |\Delta_n(\mathbf{z})| \leq C_2(\mathbf{K}) < \infty, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{K}, \quad n \in \Lambda. \quad (59)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \Lambda$ , все нули полиномов  $Q_{3n}(z)$ , за возможным исключением конечного числа, не зависящего от  $n$ , притягиваются к компакту  $E = \pi_4(\mathbf{E})$ ;

2) при  $n \rightarrow \infty$ ,  $n \in \Lambda$ ,

$$\frac{P_{3n,1}}{Q_{3n}}(z) \xrightarrow{\text{ср}} f(z^{(1)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (60)$$

Так же же как и в вещественном случае, соотношения (50), (56) и (60) дают принципиальную возможность восстановить функцию  $f(z)$  в области  $\mathfrak{R}_4(f) \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(4)}}$  путем последовательного восстановления значений этой функции  $f(z^{(1)})$ ,  $f(z^{(2)})$  и  $f(z^{(3)})$  на первом, втором и третьем листах рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , упорядоченных согласно наттоловскому разбиению.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Следует подчеркнуть, что разбиение Наттолла связано с выделенной точкой, в которой задан росток исходной функции  $f$ . Мы рассматриваем здесь росток  $f_\infty$ , заданный в точке  $z = \infty$ . Как полиномы Паде, так и все рассматриваемые здесь полиномы Эрмита–Паде определялись в соответствии с этим ростком в точке  $z = \infty$ . Если же исходный росток задать в какой-то другой точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ , то и все соответствующие построения полиномов Паде и полиномов Эрмита–Паде должны быть надлежащим образом адаптированы к точке  $z_0$ . Разбиение Наттолла будет задаваться теперь с помощью абелева интеграла с чисто мнимыми периодами, имеющего надлежащие логарифмические особенности вида (44) в точках множества  $\pi_4^{-1}(z_0)$ , записанные в локальной координате  $\zeta$ .

## § 4. Заключительные замечания

**4.1.** Подведем некоторый итог тому, о чем было сказано выше.

Для функции  $f \in \mathcal{Z}$  вида (46) мы имеем следующие результаты (здесь мы сохраняем все введенные выше обозначения, но вводим новую нумерацию для удобства изложения): при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{P_{3n,1}}{Q_{3n}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(1)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E; \quad (61)$$

$$\frac{S_{2n,1}}{S_{2n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})], \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F; \quad (62)$$

$$\frac{Q_{n,2}}{Q_{n,3}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)}) + f(z^{(3)})], \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E'. \quad (63)$$

Для вещественных параметров  $A$  и  $B$  эти результаты справедливы при  $n \rightarrow \infty$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , для комплексных параметров  $A$  и  $B$  справедливость этих результатов пока удалось доказать только по некоторым подпоследовательностям. Очевидно, с помощью предельных соотношений (61)–(63) возможно, рассматривая их в совокупности, последовательно шаг за шагом восстановить значения функции  $f(z)$  на трех наттолловских листах ее рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . А тем самым, и в области  $\mathfrak{R}_4(f) \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(4)}}$ , лежащей на рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Как уже было сказано ранее, на последнем четвертом листе с помощью описанной процедуры восстановить функцию  $f$  нельзя. Тем не менее, из (61)–(63) вытекает, что предложенный нами новый подход к решению задачи об эффективном аналитическом продолжении заданного ростка имеет неоспоримые преимущества перед подходом, основанным на аппроксимациях Паде. Действительно, с помощью этого подхода удастся продолжить исходный росток в область  $\mathfrak{R}_4(f) \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(4)}}$ , лежащую на римановой поверхности многозначной аналитической функции, соответствующей заданному ростку. В то время как с помощью аппроксимаций Паде возможно осуществить аналитическое продолжение только в область, лежащую на римановой сфере. При этом в некотором смысле область  $\mathfrak{R}_4(f) \setminus \overline{\mathfrak{R}_4^{(4)}}$  трехлистно накрывает область Штала (см. рис. 1).

Представленные здесь теоретические результаты носят весьма частный характер, но несмотря на это они являются вполне характерными для демонстрации преимуществ нового подхода.

Еще раз отметим, что при каждом  $n \in \mathbb{N}$  число коэффициентов Лорана, вовлеченных в рассматриваемую конструкцию, состоящую из трех рациональных функций (см. (61)–(63)), не превосходит  $3n + 4$ .

**4.2.** Естественно сравнить предложенный подход не только с диагональными АП, но и с другими известными методами аналитического продолжения.

**4.2.1. Универсальные матричные методы суммирования степенных рядов.** По поводу этих методов см. [7], [8], [9] и приведенные в этих работах библиографии.

Обсудим кратко наиболее известный из этих методов – метод Миттаг-Леффлера. Это – линейный метод продолжения (суммирования) элемента  $f_{z_0}$  в главную звезду или, иначе говоря, звезду Миттаг-Леффлера.

Будем называть область  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  *звездной* относительно точки  $z_0 \in G$ , если для любой точки  $\zeta \in G$  весь отрезок  $[z_0, \zeta]$  также принадлежит  $G$ .

ТЕОРЕМА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА. Существует таблица чисел  $\{b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{k_n}^{(n)}\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , такая, что для любой области  $G$ , звездной относительно некоторой точки  $z_0 \in G$ , и для любой функции  $f$ , голоморфной в области  $G$ , справедливо следующее свойство.

Пусть функция  $f \in \mathcal{H}(G)$  задана степенным рядом<sup>12</sup> в точке  $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(z - z_0)^{\nu}, \quad |z - z_0| < R_0. \quad (64)$$

Тогда равномерно внутри области  $G$  справедливо представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ b_0^{(n)} f_0 + b_1^{(n)} f_1(z - z_0) + \dots + b_{k_n}^{(n)} f_{k_n}(z - z_0)^{k_n} \right\}, \quad z \in G. \quad (65)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть в точке  $z = z_0$  даны два степенных ряда  $g = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$  и  $d = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{\nu}(z - z_0)^{\nu}$ . Тогда ряд

$$h(z) := (g \circ d)(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} d_{\nu}(z - z_0)^{\nu} \quad (66)$$

называется *композицией Адамара* рядов  $g$  и  $d$ ; см. [10]. Выражение, стоящее в фигурных скобках под знаком суммы в (65), представляет собой композицию Адамара  $f \circ P_n$  исходной функции  $f(z)$  и полинома  $P_n(z - z_0) := b_0^{(n)} + b_1^{(n)}(z - z_0) + \dots + b_{k_n}^{(n)}(z - z_0)^{k_n}$ . Тем самым (65) можно записать в следующем виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (f \circ P_n)(z - z_0), \quad z \in G. \quad (67)$$

Мы получили (см. (65)) разложение функции  $f(z)$  в ряд многочленов, равномерно сходящийся на множестве  $K$  и, в силу произвольности  $K$ , – внутри  $G$ . Коэффициенты  $b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{k_n}^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , не зависят от  $f$  и могут быть вычислены раз навсегда. Кроме них в формулу входят лишь коэффициенты  $\{f_{\nu}, \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ , т. е. коэффициенты степенного ряда (64), определяющего аналитический элемент  $f_{z_0} = \{f(z), |z - z_0| < R_0\}$ , продолжающийся во всю область  $G$  как голоморфная (т.е. однозначная аналитическая) функция; см. (66). Полученное разложение (оно называется разложением Миттаг-Леффлера) решает, очевидно, задачу продолжения элемента  $f_{z_0}$  вдоль прямолинейных лучей (см. [28; глава 8, § 5, п. 5.3]).

В [28; глава 8, § 5, п. 5.4] надлежащая последовательность многочленов  $\{P_n(w)\}$  построена в явном виде. Построение основано на методе, предложенном П. Пенлеве [34].

<sup>12</sup>Только в этом пункте 4.2.1 мы, следуя традиции монографии [10], для обозначения тейлоровских коэффициентов аналитической функции будем использовать ту же букву, что и для самой функции.



Метод Миттаг-Леффлера – это *линейный метод* суммирования степенного ряда в главной звезде. Сама главная звезда с помощью представления Миттаг-Леффлера не восстанавливается<sup>13</sup>. Таким образом, так же как и в теории Шталя, суммирование степенного ряда происходит в некоторой *области, расположенной на римановой сфере*  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**4.2.2. Квадратичные аппроксимации Шафера.** Для набора  $[1, f_\infty, f_\infty^2]$  и произвольного  $n \in \mathbb{N}$  аппроксимации Шафера (см. [39]) определяются через полиномы Эрмита–Паде 1-го типа для двумерного мультииндекса  $\mathbf{n} := (n, n)$  (см. (69)) следующим образом:

$$\text{Sh}_{n;1,2}(z) := \frac{-Q_{\mathbf{n},1}(z) \pm [(Q_{\mathbf{n},1}^2 - 4Q_{\mathbf{n},0}Q_{\mathbf{n},2})(z)]^{1/2}}{2Q_{\mathbf{n},2}(z)}. \quad (68)$$

Иногда аппроксимации Шафера называют аппроксимациями Эрмита–Паде. Трудности, возникающие при использовании квадратичных аппроксимаций Шафера для нахождения аналитического продолжения степенного ряда, видны непосредственно из определения (68). Во-первых, это – необходимость извлекать корень из детерминанта  $D_n(z) := (Q_{\mathbf{n},1}^2 - 4Q_{\mathbf{n},0}Q_{\mathbf{n},2})(z)$  – полинома степени  $2n$ , имеющего, следовательно,  $2n$ , вообще говоря, комплексных нулей. Во-вторых, необходимо надлежащим образом выбрать знак “+” или “–” квадратного корня в (68). Наконец, аппроксимации Шафера, очевидно, позволяют в принципе найти значения многозначной аналитической функции только на первых двух листах ассоциированной с этой функцией трехлистной поверхности Наттолла. Ясно, что в силу утверждений (71) и (72) (см. ниже п. 4.3) полиномы Эрмита–Паде 2-го и 1-го типов для двумерного мультииндекса  $\mathbf{n} := (n, n)$  справятся с этой задачей гораздо лучше.

Некоторые, по-видимому первые, теоретические результаты о предельном распределении нулей дискриминанта  $D_n$  и сходимости аппроксимаций Шафера приведены в [24].

**4.3.** В связи с подходом Вейерштрасса возникает следующая естественная задача: найти значение вейерштрассова продолжения элемента  $\tilde{f}_0$  вдоль некоторой кривой, не прибегая к процедуре переразложения степенного ряда. Из результатов настоящей работы вытекает, что этого вполне можно достичь с помощью полиномов Эрмита–Паде, соответствующих мультииндексам большой размерности.

Результаты, сформулированные в настоящей работе (см. теоремы 1–6), мы используем для численного решения сформулированной выше задачи в примере 3.

Здесь же, не вдаваясь в подробности мы покажем, как проблему, возникающую при построении аналитического продолжения с помощью АП, можно преодолеть с помощью полиномов 1-го и 2-го типов, определенных аналогично (9)–(11) и (18), но, соответственно, для набора  $[1, f_\infty, f_\infty^2]$  и пары ростков  $f_\infty, f_\infty^2$  (отметим, что в этом случае полиномы Эрмита–Паде 1-го и 2-го типов можно рассматривать как два варианта естественного обобщения полиномов Паде). Такие полиномы хорошо известны, см. прежде всего [33], а также [31].

<sup>13</sup>По крайней мере, авторам не известны какие-либо результаты в этом направлении.

Напомним следующий факт, представляющий собой весьма частный случай общего результата, вытекающего из теории Шталя.

Для произвольной функции  $f \in \mathcal{Z}$  компакт Шталя – это отрезок  $[-1, 1]$ . Риманова поверхность функции  $f \in \mathcal{Z}$  является по-крайней мере четырехлистной. Но в соответствии с теорией Шталя, с произвольной функцией  $f \in \mathcal{Z}$  в определенном смысле ассоциирована двулистная рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  функции  $w$ , задаваемой равенством  $w^2 = z^2 - 1$ . Будем называть такую рп *поверхностью Шталя* функции  $f \in \mathcal{Z}$  или *поверхностью Шталя, ассоциированной с функцией  $f \in \mathcal{Z}$* . Тот факт, что это определение является вполне содержательным, вытекает из работы А. И. Аптекарева и М. Л. Ятцелера [5], в которой в достаточно широком классе многозначных аналитических функций доказано, что именно в терминах, связанных с двулистной поверхностью Шталя, решается задача о сильной асимптотике полиномов Паде (см. также [33]). Отметим, что в общем случае двулистная поверхность Шталя является гиперэллиптической рп.

Исходный росток  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  продолжается на первый лист поверхности Шталя (т.е. рп  $\mathfrak{R}_2(w)$  функции  $w$ ) как однозначная голоморфная функция. Но для однозначного продолжения этого ростка на второй лист этой поверхности, на этом листе необходимо провести надлежащие разрезы. На всем первом (открытом) листе поверхности Шталя функция  $f(z)$  восстанавливается с помощью диагональных АП.

В некоторых случаях для функции  $f \in \mathcal{Z}$  (см. [49] и ср. [35]) удастся доказать, что ростку  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$  такой функции можно сопоставить *трехлистную* риманову поверхность  $\mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_3(w)$ , определяемую некоторым неприводимым кубическим уравнением (см. (73)), и такую, что при наттоловском разбиении этой поверхности на листы (см. [33], [35], [29], [25]) и отождествлении точек  $z = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$  и  $\mathbf{z} = \infty^{(1)} \in \mathfrak{R}_3(w)$  исходный росток  $f_\infty$  функции  $f \in \mathcal{Z}$  продолжается в область  $\mathfrak{R}_3(w) \setminus \mathfrak{R}_3^{(3)}$  как однозначная мероморфная функция. Для однозначного продолжения этого ростка на третий лист  $\mathfrak{R}_3^{(3)}$  этой рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  на нем необходимо уже провести надлежащие разрезы. В отличие от теории Шталя, факт существования такой трехлистной рп удастся пока установить только для довольно частных случаев многозначных аналитических функций. Следуя [35] и [25] будем называть такую трехлистную рп *поверхностью Наттолла, ассоциированной с ростком  $f_\infty$* , или просто *поверхностью Наттолла*.

Пусть  $\pi_3: \mathfrak{R}_3(w) \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  – каноническая проекция,  $F^{(1,2)}$  – граница между первым и вторым листами,  $F^{(2,3)}$  – граница между вторым и третьим листами наттоловского разбиения рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . Положим  $E_2 := \pi_3(F^{(1,2)})$ ,  $F_2 := \pi_3(F^{(2,3)})$ .

Для ростка  $f_\infty \in \mathcal{H}(\infty)$ , набора ростков<sup>14</sup>  $[1, f_\infty, f_\infty^2]$ , произвольного  $n \in \mathbb{N}$  и двумерного мультииндекса  $\mathbf{n} := (n, n)$  определим (неоднозначно) полиномы Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},1}$  и  $Q_{\mathbf{n},2}, Q_{\mathbf{n},j} \in \mathbb{P}_n$ ,  $Q_{\mathbf{n},j} \not\equiv 0$ , соотношением

$$(Q_{\mathbf{n},0} + Q_{\mathbf{n},1}f_\infty + Q_{\mathbf{n},2}f_\infty^2)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (69)$$

<sup>14</sup>Здесь и далее предполагается, что три функции  $1, f, f^2$  независимы над полем  $\mathbb{C}(z)$ .

Для пары ростков  $f_\infty, f_\infty^2$  и  $n \in \mathbb{N}$  полиномы Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}, P_{2n,1}$  и  $P_{2n,2}$ ,  $Q_{2n}, P_{2n,j} \in \mathbb{P}_{2n}$ ,  $Q_{2n}, P_{2n,j} \not\equiv 0$ , определяются (неоднозначно) соотношениями

$$\begin{aligned} (Q_{2n}f_\infty - P_{2n,1})(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty, \\ (Q_{2n}f_\infty^2 - P_{2n,2})(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (70)$$

В некоторых случаях удается доказать (см. [49], [50]), что при  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{P_{2n,1}}{Q_{2n}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(1)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E_2, \quad (71)$$

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -[f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})], \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F_2. \quad (72)$$

При этом при  $n \rightarrow \infty$  “почти все”<sup>15</sup> нули полиномов  $Q_{2n}$  и  $P_{2n,1}$  притягиваются к компакту  $E_2$ , а “почти все” нули полиномов  $Q_{n,1}$  и  $Q_{n,2}$  притягиваются к компакту  $F_2$ . Скорость сходимости в (71) и (72) может быть аналогично (17) и (21) охарактеризована в терминах, связанных со скалярной теоретико-потенциальной задачей равновесия. Соотношения (71) и (72) позволяют последовательно восстанавливать значения функции  $f_\infty \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3(w) \setminus \mathfrak{R}_3^{(3)})$  на первых двух листах поверхности Наттолла. Подчеркнем, что в (71) и (72) имеется в виду наттолловское разбиение на листы  $\text{rp } \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}_3(w)$ , где функция  $w$  удовлетворяет неприводимому уравнению третьей степени вида:

$$w^3 + r_2(z)w^2 + r_1(z)w + r_0(z) = 0, \quad (73)$$

здесь  $r_0, r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$  – некоторые рациональные функции переменного  $z$  (ср. с уравнением  $w^2 - (z^2 - 1) = 0$ , определяющим поверхность Штала для произвольной функции  $f \in \mathcal{X}$ ). Скорость сходимости в (71) и (72) характеризуется, вполне аналогично (17) и (21), в терминах некоторой скалярной теоретико-потенциальной задачи равновесия (см. [35], [29], [49] и ср. [6], [26]).

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Отметим, что  $E_2 \cap F_2 = \emptyset$  и, вообще говоря, компакт  $E_2$  не совпадает с введенным ранее компактом  $E$ , а  $F_2$  не совпадает с аналогичным компактом  $F$  (см. соотношения (56) и (60)). Точнее,  $\pi_3(F^{(1,2)}) = E_2 \neq E = \pi_4(\Gamma^{(1,2)})$  и  $\pi_3(F^{(2,3)}) = F_2 \neq F = \pi_4(\Gamma^{(2,3)})$  (совпадение возможно в исключительных случаях, например, при вещественных  $A$  и  $B$  в представлении (46)). Этот факт играет принципиально важную роль в тех приложениях полученных здесь теоретических результатов, о которых пойдет речь ниже: см. пример 3, рис. 10–13.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** В определениях (69) и (70) необходимо сделать соответствующие изменения в том случае, когда исходный росток аналитической функции  $f$  задан не в точке  $z = \infty$ , а в некоторой точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f_{z_0} \in \mathcal{H}(z_0)$ . Наттолловское разбиение на листы ассоциированной с этим ростком трехлистной  $\text{rp}$  будет определяться теперь уже относительно выделенной точки  $z_0$ .

<sup>15</sup>Как и ранее, речь идет о предельном распределении нулей и, тем самым,  $o(n)$  нулей при  $n \rightarrow \infty$  остается вне нашего контроля.

Всюду в дальнейшем обсуждая возможные приложения предложенного здесь метода мы рассматриваем ростки, заданные в точке  $z = 0$ .

## § 5. Некоторые возможные приложения

**5.1.** В этом параграфе мы обсудим некоторые возможные приложения приведенных выше теоретических результатов в вычислительной математике для приближенного численного решения задач, основанных на аналитическом продолжении исходных данных (например, аналитическом продолжении по малому параметру). Мы приводим здесь три примера, основанных на функциях вида (46), в которых величины  $A$  и  $B$  имеют одинаковую мнимую часть и противоположные вещественные части, т.е.

$$f(z) := \left[ \left( A_1 + iA_2 - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \left( -A_1 + iA_2 - \frac{1}{\varphi(z)} \right) \right]^{-1/2}, \quad (74)$$

где  $A_1, A_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . При этом от переменного  $z$  мы переходим к переменному  $\tilde{z}$ , где  $z = (\tilde{z} - a)i/b$ , где  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – отличные от нуля вещественные числа (очевидно, что такой переход приводит к повороту отрезка  $[-1, 1]$  на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке с последующим растяжением в  $|b|$ -раз и сдвигом повернутого и растянутого отрезка в правую или левую полуплоскость в зависимости от знака  $a$  на величину  $|a|$ ). Соответственно, вместо  $\pm 1$  в плоскости  $\mathbb{C}_{\tilde{z}}$  возникает пара комплексно-сопряженных точек ветвления второго порядка  $\tilde{z}_1 = a \pm ib$ . Вторая пара точек ветвления (также второго порядка) соответствует выбору другой ветви обратной функции Жуковского и также состоит из пары комплексно-сопряженных точек  $\tilde{z}_{1,2} = \tilde{z}_{1,2}(a, b)$ , лежащих вне отрезка  $[a - ib, a + ib]$  и соответствующих величинам  $A_1 + iA_2$  и  $-A_1 + iA_2$ . В примерах 1–3 мы выбираем конкретные значения величин  $A_1, A_2, a$  и  $b$ . В первом случае величина  $a < 0$ , во втором и третьем  $a > 0$ , при этом величина  $|a|$  остается неизменной. Конкретные значения величин  $A_1, A_2, a$  и  $b$  не существенны, поэтому мы здесь их не приводим. Наконец, мы делаем замену переменной  $\zeta = 1/\tilde{z}$ , переводящую точку  $\tilde{z} = \infty$  в точку  $\zeta = 0$ . Соответствующим образом преобразуются компакт Шталя, компакты  $E_2, F_2, E, F$  и  $E'$  (см. § 3, замечание 4, и § 4, замечание 7.). В частности, компакт Шталя – отрезок  $[a - ib, a + ib]$  в плоскости переменного  $\tilde{z}$ , переходит в дугу окружности, проходящую через точку  $\zeta = 0$  и точки  $\zeta = 1/(a - ib)$  и  $\zeta = 1/(a + ib)$ . Таким образом, с учетом (74) рассматриваемая в настоящем параграфе функция имеет вид:

$$f(z) = \tilde{f}(\zeta) = \left[ \left( A_1 + iA_2 + \frac{i\zeta}{(1 - a\zeta)/b + \sqrt{((1 - a\zeta)/b)^2 + \zeta^2}} \right) \times \left( -A_1 + iA_2 + \frac{i\zeta}{(1 - a\zeta)/b + \sqrt{((1 - a\zeta)/b)^2 + \zeta^2}} \right) \right]^{-1/2} \quad (75)$$

Поясним, какие именно свойства полиномов Эрмита–Паде мы собираемся продемонстрировать на этих трех примерах.

Итак, исходная функция вида (75) задана своим рядом  $\tilde{f}_0$ , сходящимся в окрестности точки  $\zeta = 0$ ,  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$ . Мы рассматриваем задачу вейерштрассова аналитического продолжения заданного степенного ряда  $\tilde{f}_0$  из точки  $x = 0$

по вещественной прямой в точку  $x = 6$  (как будем ясно из дальнейшего, выбор точки  $x = 6$  в качестве конечной точки продолжения является несущественным). Поскольку точка  $x = 6$  находится за пределами круга сходимости степенного ряда  $\tilde{f}_0$ , значение  $\tilde{f}(6)$  невозможно (приближенно) вычислить с помощью частных сумм ряда  $\tilde{f}_0$  сколь угодно высокого порядка. Этот факт конечно вытекает непосредственно из формулы Коши–Адамара. Однако есть и другой более наглядный способ проиллюстрировать этот факт, оставаясь в русле обсуждаемого здесь подхода, который основан на анализе предельного распределения свободных нулей и полюсов рациональных аппроксимаций. На рис. 2 представлено численное распределение нулей частной суммы  $S_{50}$  ряда  $\tilde{f}_0$ . Наглядно видно, что нули частной суммы  $S_{50}$  моделируют окружность – границу круга сходимости степенного ряда  $\tilde{f}_0$ . Это происходит в полном согласии с классической теоремой Йенча–Серё (см. [23], [51]), в соответствии с которой по некоторой подпоследовательности, зависящей от функции, предельное распределение нулей частных сумм существует и совпадает с лебеговой мерой этой окружности. Несколько забегаая вперед, укажем, что на рисунке 3 изображены нули частной суммы  $S_{100}$  и нули и полюсы диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  для функции из примера 1. Наглядно видно, что с помощью нулей и полюсов диагональных АП можно найти точки ветвления многозначной аналитической функции, а с помощью нулей частных сумм этого сделать нельзя. Даже радиус сходимости степенного ряда с помощью диагональных АП вычисляется точнее, чем с помощью частных сумм. Подчеркнем, что для нахождения частной суммы  $S_{100}$  и диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  было использовано одинаковое число коэффициентов Тейлора этого ряда. А именно – 101 коэффициент  $c_0, c_1, \dots, c_{100}$ . Рисунок 2, формально не связанный с АП и полиномами Эрмита–Паде вполне укладывается в общую идеологию, лежащую в основе использования конструктивных рациональных аппроксимаций: предельное распределение их *свободных* нулей и полюсов самым непосредственным образом связано с границей той области, в которой эти рациональные аппроксимации осуществляют (реализуют) эффективное аналитическое продолжение исходного степенного ряда. Действительно, все полюсы частных сумм степенного ряда фиксированы в одной бесконечно удаленной точке. Поэтому граница области сходимости частных сумм определяется предельным распределением *свободных* нулей этих частных сумм.

Уточним более детально, что именно мы понимаем под (однозначным) аналитическим продолжением степенного ряда  $\tilde{f}_0$  из точки  $x = 0$  вправо по вещественной прямой в точку  $x = 6$ . Речь идет о вейерштрассовом подходе к понятию аналитической функции, приводящему к понятию *полной аналитической функции*. В основе этого подхода лежит понятие *аналитического элемента*, или просто *элемента*, аналитической функции, т.е. сходящегося степенного ряда, заданного в фиксированной точке  $\zeta_0$  и имеющего радиус сходимости  $R_0 > 0$ . Кратко этот факт будем записывать  $\tilde{f}_0 \cong (\zeta_0, \mathbb{D}(\zeta_0, R_0))$ , где  $\mathbb{D}(\zeta_0, R_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta_0| < R_0\}$ . Элемент  $\tilde{f}_1 \cong (\zeta_1, \mathbb{D}(\zeta_1, R_1))$  называется *непосредственным* аналитическим продолжением элемента  $\tilde{f}_0$ , если  $D := \mathbb{D}(\zeta_0, R_0) \cap \mathbb{D}(\zeta_1, R_1) \neq \emptyset$  и  $\tilde{f}_0(\zeta) = \tilde{f}_1(\zeta)$  при  $\zeta \in D$ . Элемент  $\tilde{f}_N \cong (\zeta_N, \mathbb{D}(\zeta_N, R_N))$  называется *аналитическим продолжением элемента*  $\tilde{f}_0$

вдоль пути  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  (в частности, вдоль отрезка  $[0, 6]$ ), если найдется *цепь элементов*  $\tilde{f}_j \cong (\zeta_j, \mathbb{D}(\zeta_j, R_j))$ ,  $j = 1, \dots, N$ , такая, что: все точки  $\zeta_j \in \Gamma$  и каждый элемент  $\tilde{f}_{j+1}$  является непосредственным аналитическим продолжением элемента  $\tilde{f}_j$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ . Ясно, что в рассматриваемых в наших примерах случаях вейерштрассово продолжение из точки  $x = 0$  в точку  $x = 6$  по положительной вещественной полупрямой возможно, поскольку все четыре точки ветвления функции  $\tilde{f}$  лежат вне вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .

## 5.2. Перейдем к рассмотрению численных примеров 1–3.

**ПРИМЕР 1.** В этом примере величина параметра  $a$  в представлении (75) выбрана так, что  $a < 0$ . Соответственно этому, обе комплексно-сопряженные точки ветвления  $a \pm ib$  расположены в левой полуплоскости. На рисунке 4 изображены нули и полюсы (синие и красные точки) АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$ , построенной по элементу  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$ . В этом случае разрез, соответствующий компакту Шталя, целиком лежит в левой полуплоскости. Тем самым, значения вейерштрассова продолжения элемента  $\tilde{f}_0$  в точке  $x = 6$  можно приближенно вычислить с помощью АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}(6)$ . Повышая порядок АП  $[n/n]_{\tilde{f}_0}$  мы будем в соответствии с (8) и при соблюдении хорошо известных правил вычисления АП повышать точность вычисления значения  $\tilde{f}_0(6)$ .

**ПРИМЕР 2.** В этом примере мы выбираем значение параметра  $a$  в представлении (75) так, что  $a > 0$ . Тем самым, пара точек ветвления  $a \pm ib$  элемента  $\tilde{f}_0$  расположена уже в правой полуплоскости. Вычисление нулей и полюсов диагональных АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  ростка  $\tilde{f}_0$  показывает (см. рис. 5), что разрез, соответствующий компакту Шталя, пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Следовательно, вычисляемое с помощью АП  $[n/n]_{\tilde{f}_0}$  при  $n \rightarrow \infty$  значение многозначной функции  $f$  в точке  $x = 6$  не совпадает со значением вейерштрассова продолжения степенного ряда  $\tilde{f}_0$  из точки  $x = 0$  в точку  $x = 6$ .

Воспользуемся теперь результатами, сформулированными нами в п. 4.3, § 4. Применим к рассматриваемой ситуации соотношения (71) и (72) и сформулированные ниже утверждения о предельном распределении нулей полиномов Эрмита–Паде. Используем их для исследования топологии наттолловского разбиения на листы той трехлистной рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ , которая ассоциирована с ростком  $\tilde{f}_0$  функции вида (75) и которую мы договорились называть поверхностью Наттолла. Как было отмечено в п. 4.3, соотношения (71) и (72) были получены для ростка, заданного в бесконечно удаленной точке. Для ростка, заданного в точке  $\zeta = 0$ , все эти результаты остаются справедливыми, необходимо только надлежащим образом адаптировать наттолловское разбиение на листы к рассматриваемому случаю ростка, заданного в точке  $\zeta = 0$ .

Покажем на рассматриваемом примере, как можно использовать полиномы Эрмита–Паде, заданные соотношениями (69) и (70), и соотношения (71) и (72) в ситуации, когда диагональные АП не дают возможности для численной реализации процедуры вейерштрассова продолжения заданного ростка.

Мы не имеем возможности исследовать структуру границ  $F^{(1,2)}$  и  $F^{(2,3)}$  между тремя листами рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  непосредственно с помощью полиномов Эрмита–Паде. Однако опираясь на соотношения (71) и (72) мы можем понять как устроены проекции  $E_2 = \pi_3(F^{(1,2)})$  и  $F_2 = \pi_3(F^{(2,3)})$  этих границ на риманову сферу,

получить отсюда необходимую нам информацию и на основе этого сделать надлежащие выводы.

На рисунке 6 изображены нули (голубые точки) полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  при  $n = 50$ . В силу (71), соответствующий разрез – это компакт  $E_2$ , моделируемый 100 нулями этого полинома. Этот компакт  $E_2$  так же, как и компакт Шталя, пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Тем самым, с помощью соотношения (71) нельзя найти искомое значение функции  $\tilde{f}_0(6)$ . На первый взгляд ситуация аналогична той, которая возникла при попытке использования диагональных АП для нахождения величины  $\tilde{f}_0(6)$ . Однако это не так. Из сказанного вытекает, что с помощью соотношения (71) мы можем найти значение  $\tilde{f}_0(x^{(1)})$  при  $x = 6$  (еще раз отметим, что это значение не совпадает с искомым вейерштрассовым значением  $\tilde{f}_0(6)$ ).

Перейдем теперь к полиномам Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{n,j}$  при  $\mathbf{n} = (50, 50)$ . Их нули (красные, синие и черные точки) изображены на рис. 7. На следующем рисунке 8 совмещены рисунки 6 и 7. Из этого рисунка 8 видно, что компакт  $F_2$ , к которому притягиваются нули полиномов Эрмита–Паде 1-го типа, хотя и пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ , но расположен слева от компакта  $E_2$ . Эти компакты  $E_2$  и  $F_2$ , являющиеся проекциями границ между листами поверхности Наттолла  $\mathfrak{R}_3(w)$ , отражают следующие свойства наттолловского разбиения рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  на листы с точки зрения вейерштрассова продолжения исходного ростка  $f_0$ . При реализации вейерштрассова продолжения ростка  $f_0$  из точки  $x = 0$  в точку  $x = 6$  по положительной вещественной полупрямой, в некоторой точке  $x = x_1 \in (0, 6)$  мы пересечем компакт  $E_2$ . Тем самым, в этот момент *происходит переход с первого листа  $\mathfrak{R}_3^{(1)}$  рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  на второй лист  $\mathfrak{R}_3^{(2)}$  этой рп.* Дальнейшее движение в соответствии с процедурой Вейерштрасса к точке  $x = 6$  происходит уже по *второму* листу  $\mathfrak{R}_3^{(2)}$  рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . Компакт  $F_2 = \pi_3(F^{(2,3)})$  находится слева от компакта  $E_2 = \pi_3(F^{(1,2)})$ . Значит, при дальнейшем движении вправо по второму листу  $\mathfrak{R}_3^{(2)}$  к точке  $x^{(2)}$ , где  $x = 6$ , мы на всем пути будем всегда находиться только на втором листе и не пересечем границу  $F^{(2,3)}$  между вторым и третьим листами рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . Отсюда следует, что искомое вейерштрассово значение  $\tilde{f}_0(6)$  совпадает со значением  $\tilde{f}(x^{(2)})$  при  $x = 6$ . Тем самым, это значение может быть вычисленно последовательным применением соотношений (71) и (72).

**ПРИМЕР 3.** Перейдем теперь к третьему примеру. В этом примере параметры  $a$  и  $b$  в представлении (75) – такие же как и в примере 2. Но параметр  $A_1$  уже изменен. Как и ранее в примере 2 компакт Шталя для ростка  $f_0$  – это та же самая дуга окружности, проходящей через три точки  $\zeta = 0, a \pm ib$ . Точно так же эта дуга пересекает положительную вещественную полупрямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ .

Аналогично примеру 2 найдем теперь для ростка  $\tilde{f}_0$  нули полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  при  $n = 50$  и нули полиномов Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{n,j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , при  $\mathbf{n} = (50, 50)$ . Используя эти данные и опираясь на соотношения (71) и (72) проанализируем теперь структуру наттолловского разбиения на листы ассоциированной с ростком  $\tilde{f}_0$  трехлистной рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . В соответствии с (71) нули полинома  $Q_{2n}$  моделируют компакт  $E_2 = \pi_3(F^{(1,2)})$ , нули полиномов  $Q_{n,j}$  моделируют компакт  $F_2 = \pi_3(F^{(2,3)})$ . Оба эти компакта как и в примере 2



пересекают положительную вещественную полупрямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Но теперь уже, в отличие от примера 2, компакт  $F_2$  находится справа от компакта  $E_2$  (см. рис. (10)). Для решаемой нами задачи это означает следующее. Двигаясь при реализации вейерштрассова продолжения от точки  $x = 0$  по вещественной прямой вправо к точке  $x = 6$  мы при некотором<sup>16</sup>  $x = x_1$  пересечем компакт  $E_2$ , а значит, дальнейшая реализация вейерштрассова продолжения уже будет фактически происходить на втором листе  $\mathfrak{R}_3^{(2)}$  поверхности Наттолла  $\mathfrak{R}_3(w)$ . При дальнейшем движении вправо от точки  $x = x_1$  к точке  $x = 6$  мы в некоторой точке  $x = x_2$  пересечем уже компакт  $F_2$ . Это означает, что в этот момент мы перешли со второго листа рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  на ее третий лист  $\mathfrak{R}_3^{(3)}$ . Дальнейшая реализация процедуры Вейерштрасса означает фактическое движение уже по третьему листу  $\mathfrak{R}_3^{(3)}$  рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . Но, как мы уже отметили ранее, исходный росток  $\tilde{f}_0$  на этот третий лист как однозначная аналитическая функция уже не продолжается: для такого продолжения на третьем листе необходимо провести надлежащие разрезы. Из-за препятствия, фактически создаваемого при реализации процедуры Вейерштрасса компактом  $F^{(2,3)}$  – границей между вторым и третьим листами рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  – мы не можем вычислить искомое значение  $\tilde{f}_0(6)$  с помощью полиномов Эрмита–Паде  $Q_{2n}$  и  $Q_{n,j}$  при  $\mathbf{n} = (n, n)$  так, как мы делали это в примере 2, поскольку на третьем листе  $\mathfrak{R}_3^{(3)}$  рп  $\mathfrak{R}_3(w)$  соотношения (71) и (72) уже не действуют.

Очевидно, в сложившейся ситуации для реализации вейерштрассова продолжения нам необходимо к набору ростков  $[1, \tilde{f}_0, \tilde{f}_0^2]$  добавить еще росток  $\tilde{f}_0^3$ , увеличить размерность рассматриваемых мультииндексов на единицу и перейти к конструкциям (9)–(11), (18) и (24), соответствующим мультииндексам  $\mathbf{n} = (n, n, n)$ ,  $\mathbf{n}_1 = (n, n - 1, n - 1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = (n, n, n - 1)$  и  $\mathbf{n}_3 = (n, n, n)$ . В соответствии с этим на четырехлистной рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  возникает наттолловское разбиение на листы, соответствующее точке  $\zeta = 0$ , в которой задан наш исходный росток  $\tilde{f}_0$ . Результаты соответствующих численных расчетов, проделанных при  $n = 50$ , представлены на рис. 10–13 (нули и полюсы диагональных АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  располагаются вполне аналогично примеру 2, поэтому мы их здесь не приводим).

На рисунке 11 изображены нули полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{3n}$  при  $n = 50$  (желтые точки), моделирующие в соответствии с теоремой 5, компакт  $E = \pi_4(\Gamma^{(1,2)})$ , где  $\Gamma^{(1,2)}$  – граница между первым и вторым листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Кроме этого, на рисунке 11 изображены (голубые точки) нули полинома  $S_{2n,1}$  при  $n = 50$ , моделирующие компакт  $F = \pi_4(\Gamma^{(2,3)})$ , где  $\Gamma^{(2,3)}$  – граница между вторым и третьим листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . На рисунке 12 изображены (черные точки) нули полинома  $Q_{n,3}$ ,  $\mathbf{n} = (n, n, n)$ , при  $n = 50$ , моделирующие компакт  $E' = \pi_4(\Gamma^{(3,4)})$ , где  $\Gamma^{(3,4)}$  – граница между третьим и четвертым листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Наконец, на рисунке 13 объединены рис. 11 и рис. 12. В этом случае реализация вейерштрассова продолжения из точки  $x = 0$  в точку  $x = 6$  по положительной вещественной полупрямой фактически означает следующее. Двигаясь вправо от точки  $x = 0$  к точке  $x = 6$  мы в некоторой точке<sup>17</sup>  $x = x_1$  мы

<sup>16</sup>Эта точка  $x_1$  отлична от той точки  $x_1$ , которая фигурировала в примере 2.

<sup>17</sup>Эта точка  $x_1$  и точка  $x_2$  вообще говоря отличны от тех точек  $x_1$  и  $x_2$ , которые фигурировали выше в настоящем примере и в примере 2.



пересечем компакт  $E$ . Это означает, что наше дальнейшее движение при реализации вейерштрассова продолжения происходит уже по второму листу  $\mathfrak{R}_4^{(2)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Так продолжается до тех пор, пока мы в некоторой точке  $x = x_2$  не пересечем компакт  $F$ , который является проекцией границы  $\Gamma^{(2,3)}$  между вторым и третьим листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . С этого момента наше движение вправо происходит фактически уже по третьему листу  $\mathfrak{R}_4^{(3)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Тот факт, что компакт  $E'$ , который является проекцией границы между третьим и четвертым листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ , лежит левее компакта  $F$  (см. рис. 13, объединяющий два рисунка 11 и 12), означает для нас, что двигаясь вправо по третьему листу  $\mathfrak{R}_4^{(3)}$  рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  мы не встретим границу между третьим и четвертым  $\mathfrak{R}_4^{(4)}$  листами рп  $\mathfrak{R}_4(f)$ . Тем самым, мы все оставшееся время вплоть до достижения точки  $x = 6$  будем фактически двигаться по третьему листу. Отметим, что компакт  $E'$  так же, как и компакты  $E$  и  $F$ , пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ , причем лежит левее компакта  $E$ . Это однако не влияет на реализацию процедуры Вейерштрасса, поскольку компакт  $E'$  является проекцией границы  $\Gamma^{(3,4)}$  между третьим и четвертым листами, которая на первом и втором листах рп  $\mathfrak{R}_4(f)$  “не видна”.

Итак, в соответствии со сказанным, искомое вейерштрассово значение  $\tilde{f}_0(6)$  совпадает со значением функции  $f(x^{(3)})$  при  $x = 6$ . В соответствии с приведенными выше теоремами 4–6 требуемое значение  $\tilde{f}_0(6)$  вычисляется последовательным применением соотношений<sup>18</sup> (60), (56) и (50) (см. также (61)–(63)).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В заключение отметим, что предложенный здесь новый метод эффективного продолжения степенного ряда за пределы круга его сходимости дает принципиальную возможность в классе многозначных аналитических функций с конечным числом точек ветвления реализовать процедуру Вейерштрасса как угодно далеко<sup>19</sup> за пределы круга сходимости. Для этого необходимо должным образом повышать размерность используемых мультииндексов.

К настоящему времени практически нет теоретических результатов, обосновывающих использование предложенного здесь метода апатического продолжения. Доказательству сформулированных здесь теорем 1–3 предполагается посвятить работу [49], доказательству теорем 4–6 – работу [50]. Наконец, численный анализ прикладных задач, проведенный на основе предложенного здесь метода, планируется провести в другой работе.

Подчеркнем, что толчком к возникновению нового подхода к решению задачи об эффективном аналитическом продолжении степенного ряда послужили не только теоретические результаты и гипотезы, упомянутые выше, но и проведенные численные эксперименты, результаты которых представлены в работах [20], [21] и [22].

<sup>18</sup>Напомним, что все полиномы Эрмита–Паде, участвующие в этих соотношениях, должны быть вычислены по ростку  $f_0$  функции  $f$  вида (46), заданному в точке  $\zeta = 0$ .

<sup>19</sup>Разумеется, если говорить о конкретном продолжении, например, по положительной вещественной полупрямой, то такое продолжение возможно только до ближайшей точки ветвления.

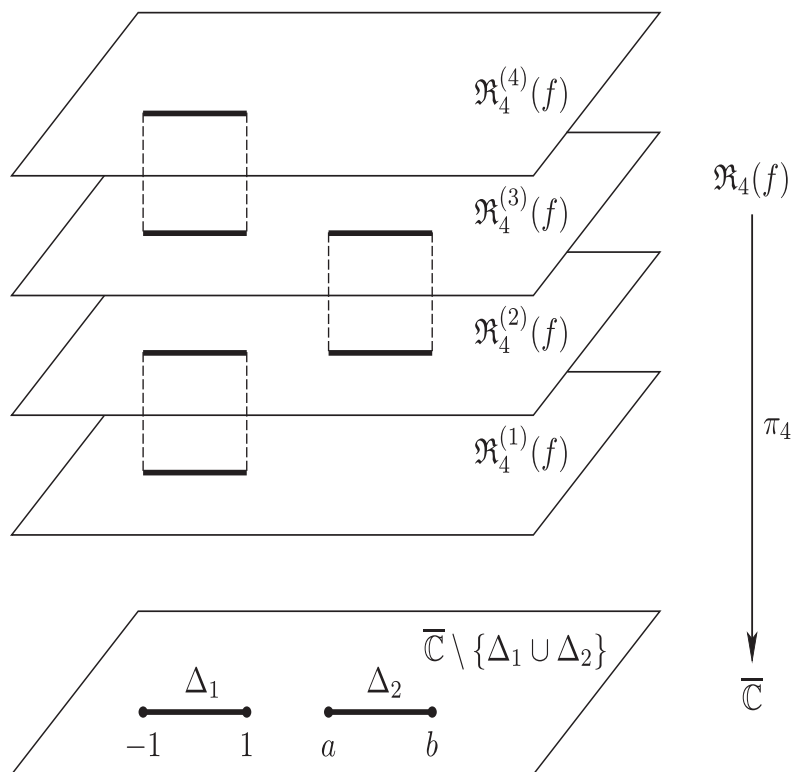


Рис. 1. Четырехлистная риманова поверхность  $\mathfrak{R}_4(f)$  функции  $f$  вида (6).

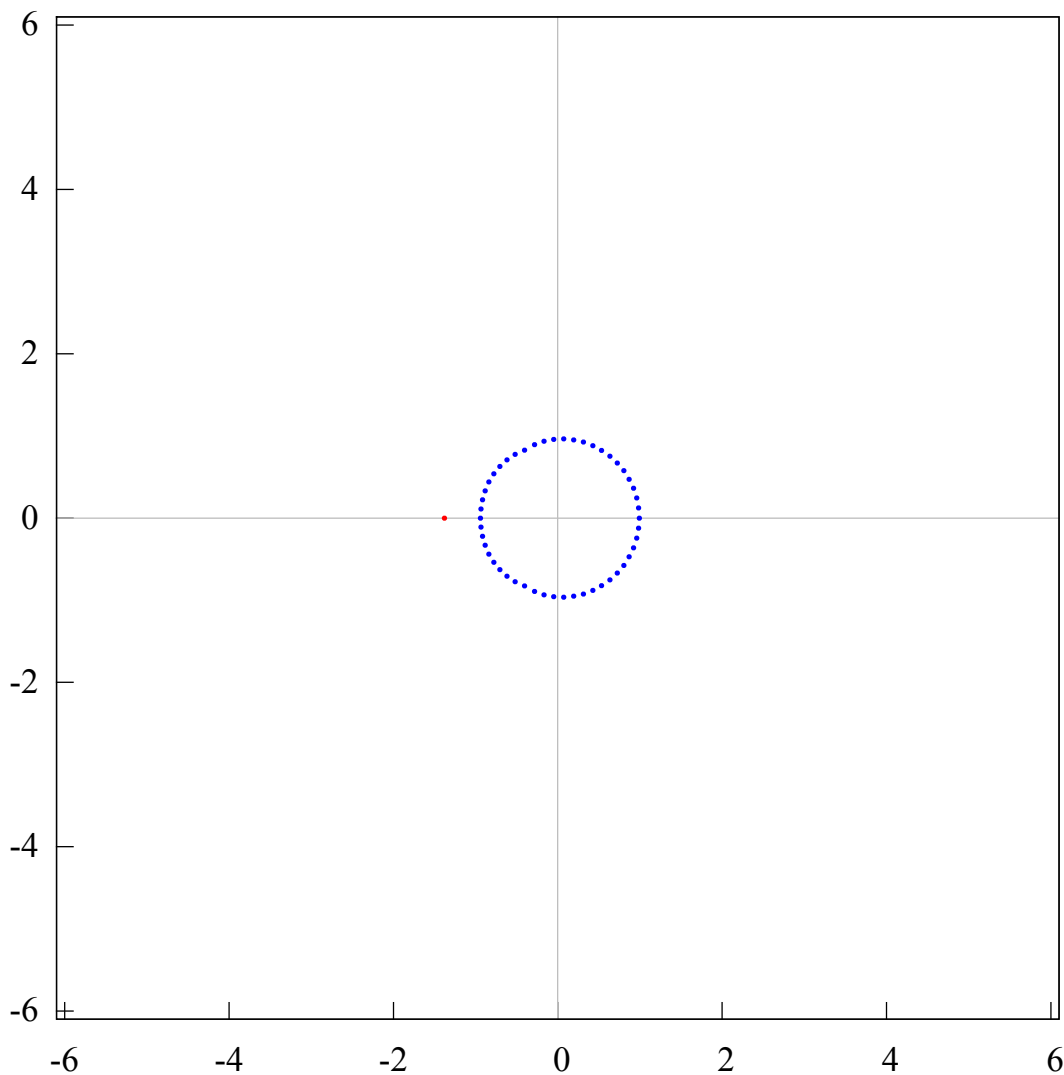


Рис. 2. Пример 1. Нули (синие точки) частной суммы  $S_{50}$  для функции  $\tilde{f}$  из примера (1). В полном согласии с классической теоремой Йенча–Серё (см. [23], [51]) эти нули моделируют окружность – границу круга сходимости степенного ряда  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$ .

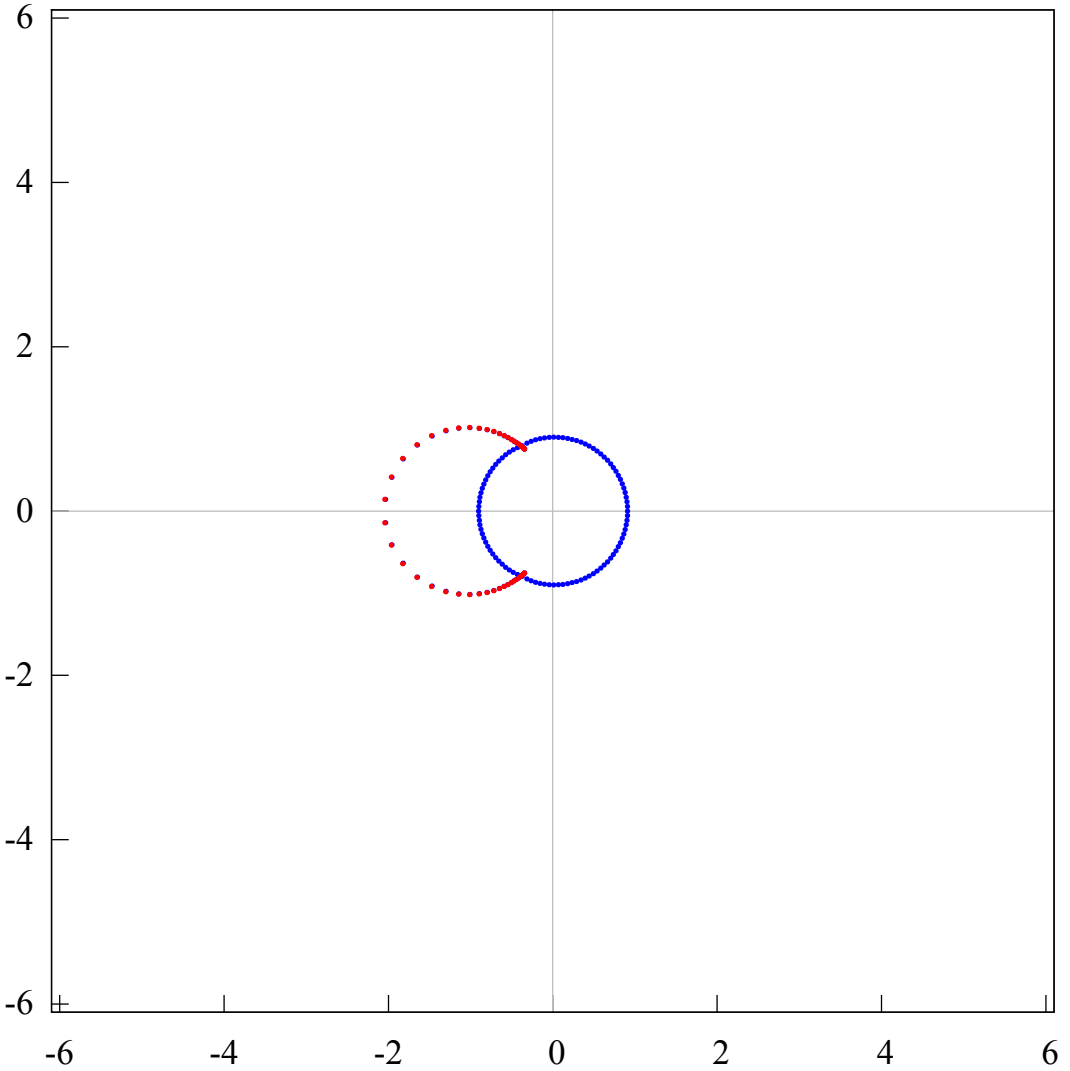


Рис. 3. Пример 1. Нули частной суммы  $S_{100}$  (синие точки) и полюсы диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  (красные точки). Наглядно видно, что с помощью нулей и полюсов АП можно найти точки ветвления многозначной аналитической функции, а с помощью нулей частных сумм этого сделать нельзя. Радиус сходимости степенного ряда с помощью диагональных АП вычисляется точнее, чем с помощью частных сумм. При этом для нахождения частной суммы  $S_{100}$  и диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$  было использовано одинаковое число коэффициентов Тейлора этого ряда: 101 коэффициент  $c_0, c_1, \dots, c_{100}$ .

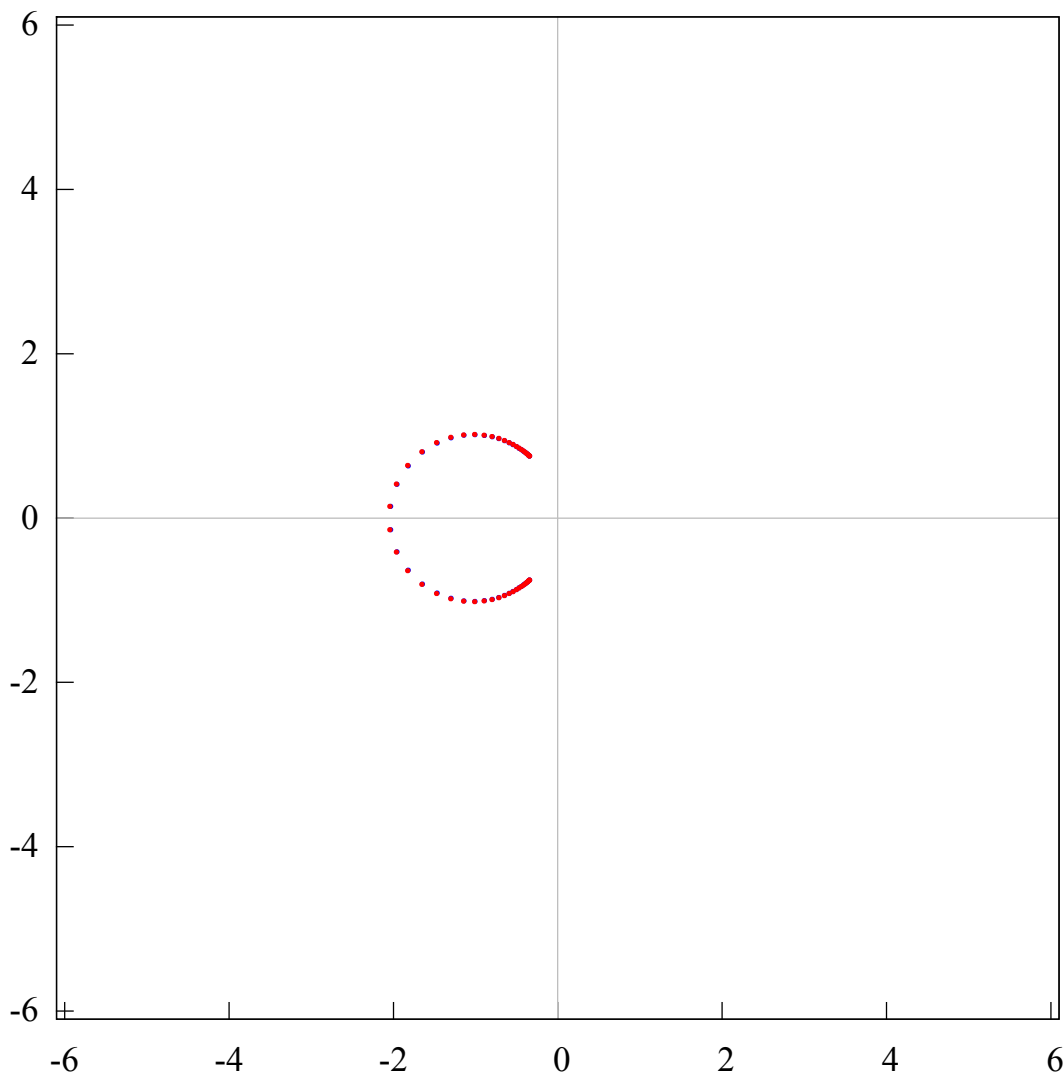


Рис. 4. Пример 1. Нули и полюсы (синие и красные точки) диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$ , построенной по элементу  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$  из примера 1. В этом случае разрез, соответствующий компакт Шталя, целиком лежит в левой полуплоскости. Тем самым, значения вейрштрассова продолжения элемента  $\tilde{f}_0$  в точке  $x = 6$  можно приближенно вычислить с помощью АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}(6)$ .

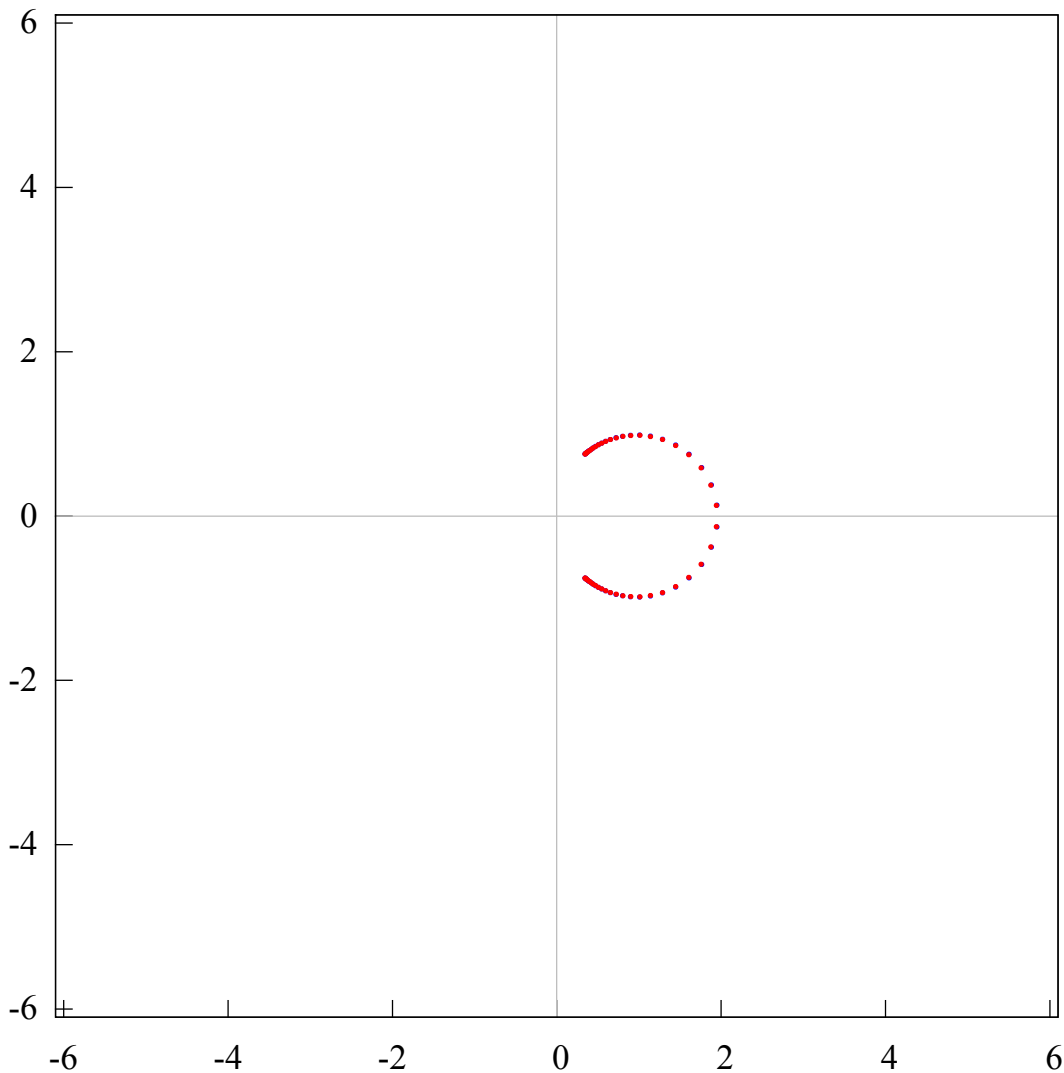


Рис. 5. Пример 2. Нули и полюсы (синие и красные точки) диагональной АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$ , построенной по элементу  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$  из примера 2. В этом случае разрез, соответствующий компакт Шталя, пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Следовательно, вычисляемое с помощью АП  $[n/n]_{\tilde{f}_0}$  при  $n \rightarrow \infty$  значение многозначной функции  $f$  в точке  $x = 6$  не совпадает со значением вейерштрассова продолжения степенного ряда  $\tilde{f}_0$  из точки  $x = 0$  в точку  $x = 6$ .

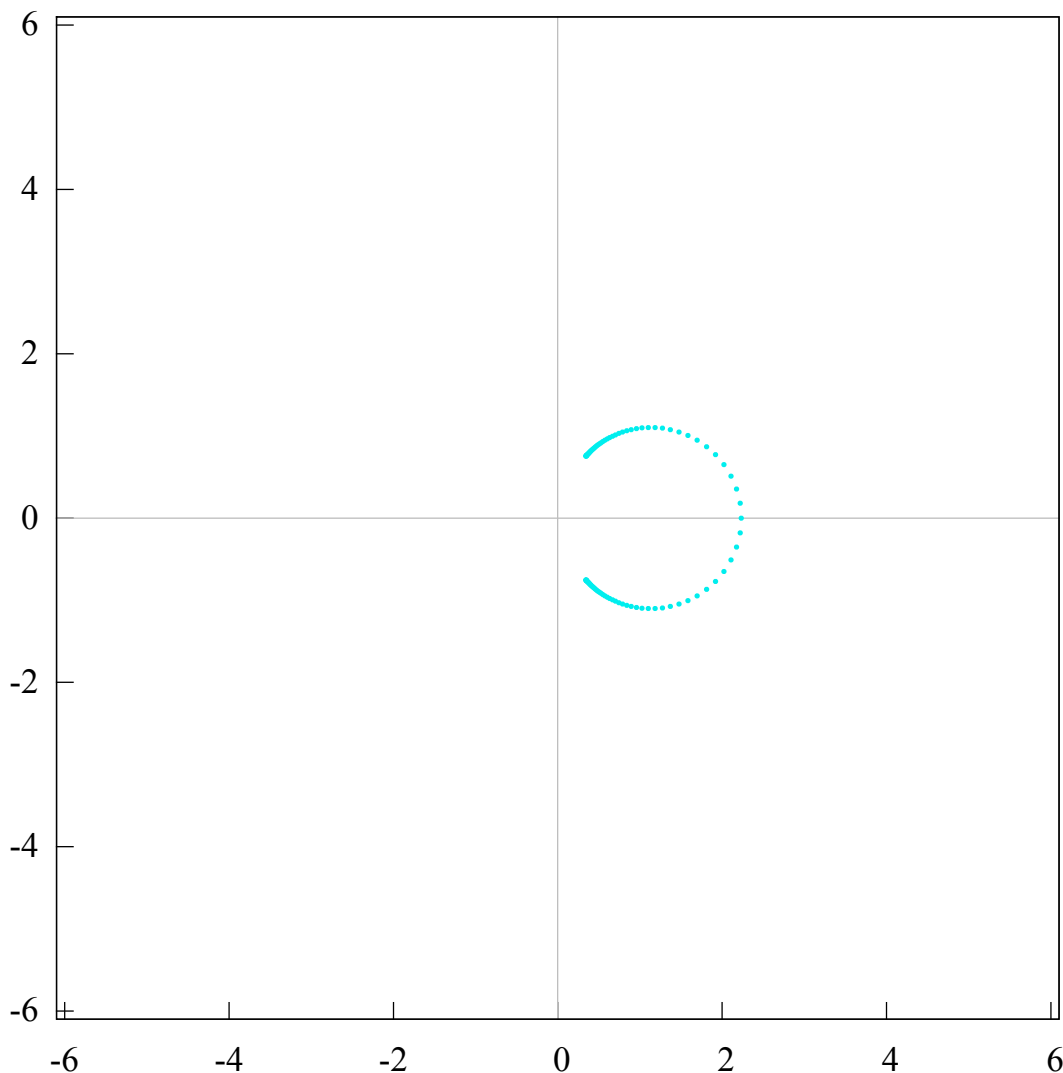


Рис. 6. Пример 2. Здесь изображены нули (голубые точки) полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  при  $n = 50$ . В силу (71), соответствующий разрез – это компакт  $E_2$ , моделируемый 100 нулями этого полинома. Этот компакт  $E_2$  так же, как и компакт Шталя, пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Тем самым, с помощью соотношения (71) нельзя найти искомое значение функции  $\tilde{f}_0(6)$ . Но из сказанного вытекает, что с помощью соотношения (71) мы можем найти значение  $\tilde{f}_0(x^{(1)})$  при  $x = 6$  (еще раз отметим, что это значение не совпадает с искомым вейерштрассовым значением  $\tilde{f}_0(6)$ ).

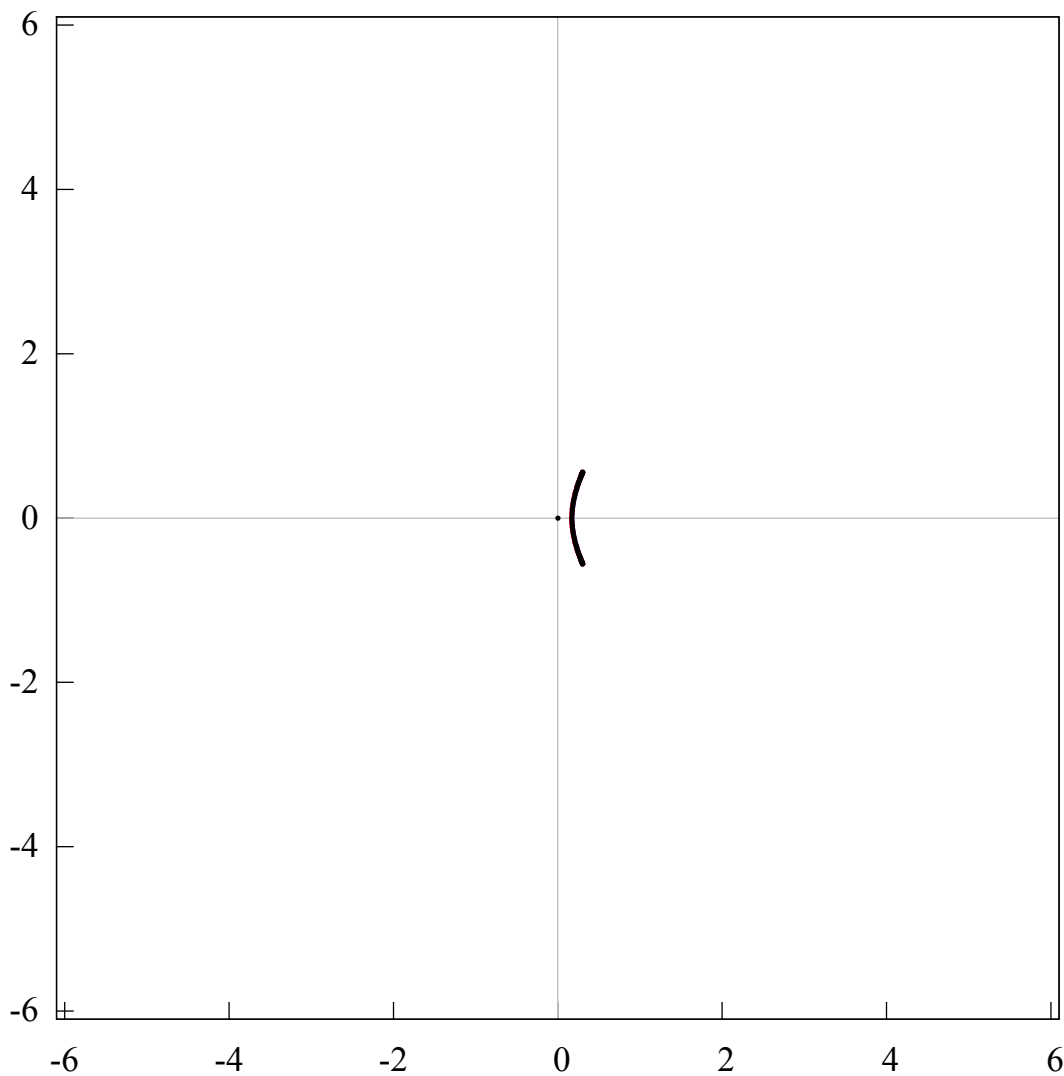


Рис. 7. Пример 2. Здесь изображены (красные, синие и черные точки) нули полиномов Эрмита-Паде 1-го типа  $Q_{n,j}$  при  $\mathbf{n} = (50, 50)$ .



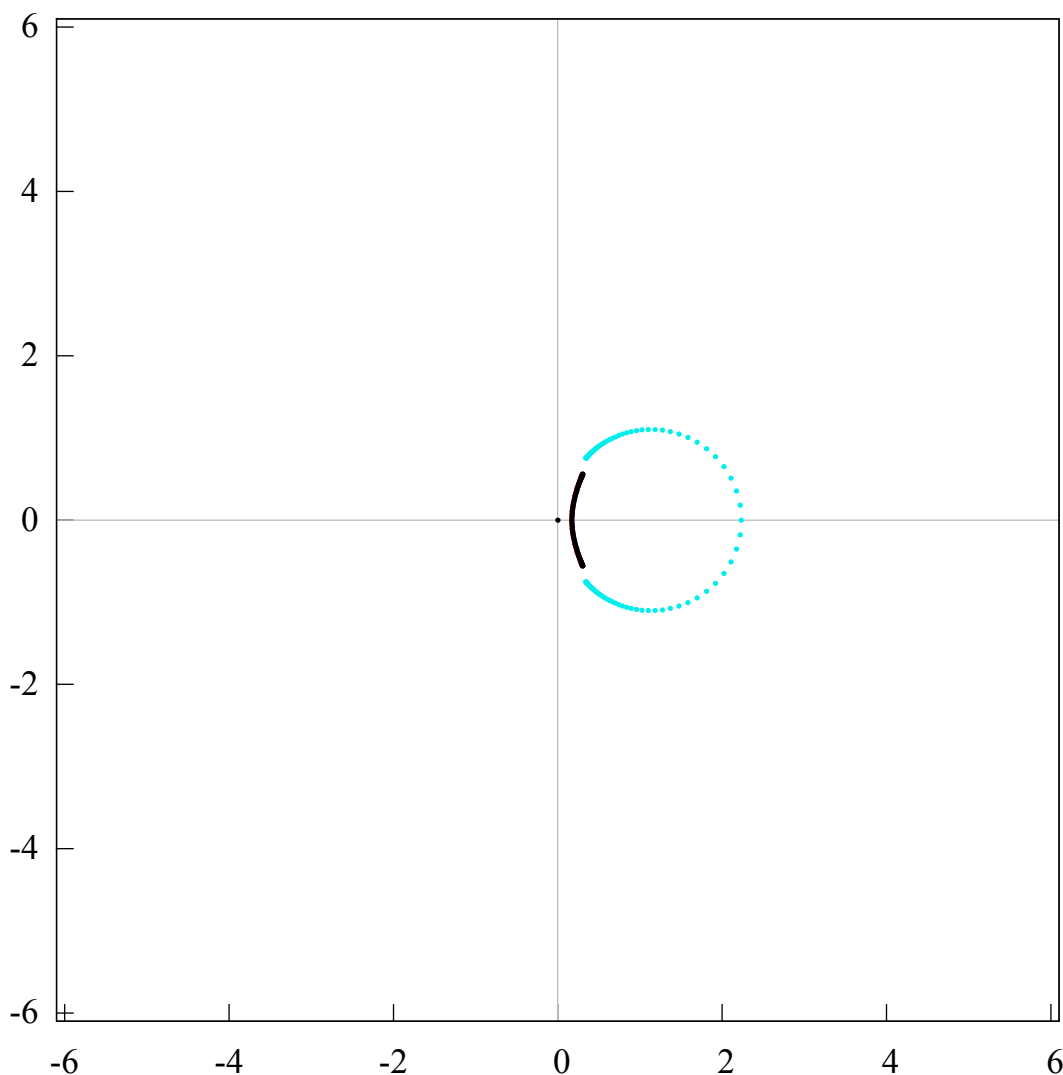


Рис. 8. Пример 2. Здесь совмещены рисунки 6 и 7. Из этого рисунка видно, что компакт  $F_2$ , к которому притягиваются нули полиномов Эрмита–Паде 1-го типа, хотя и пересекает вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ , но расположен слева от компакта  $E_2$ . Отсюда следует, что искомое вейерштрассово значение  $\tilde{f}_0(6)$  совпадает со значением  $\tilde{f}(x^{(2)})$  при  $x = 6$ . Тем самым, это значение может быть вычисленно последовательным применением соотношений (71) и (72).

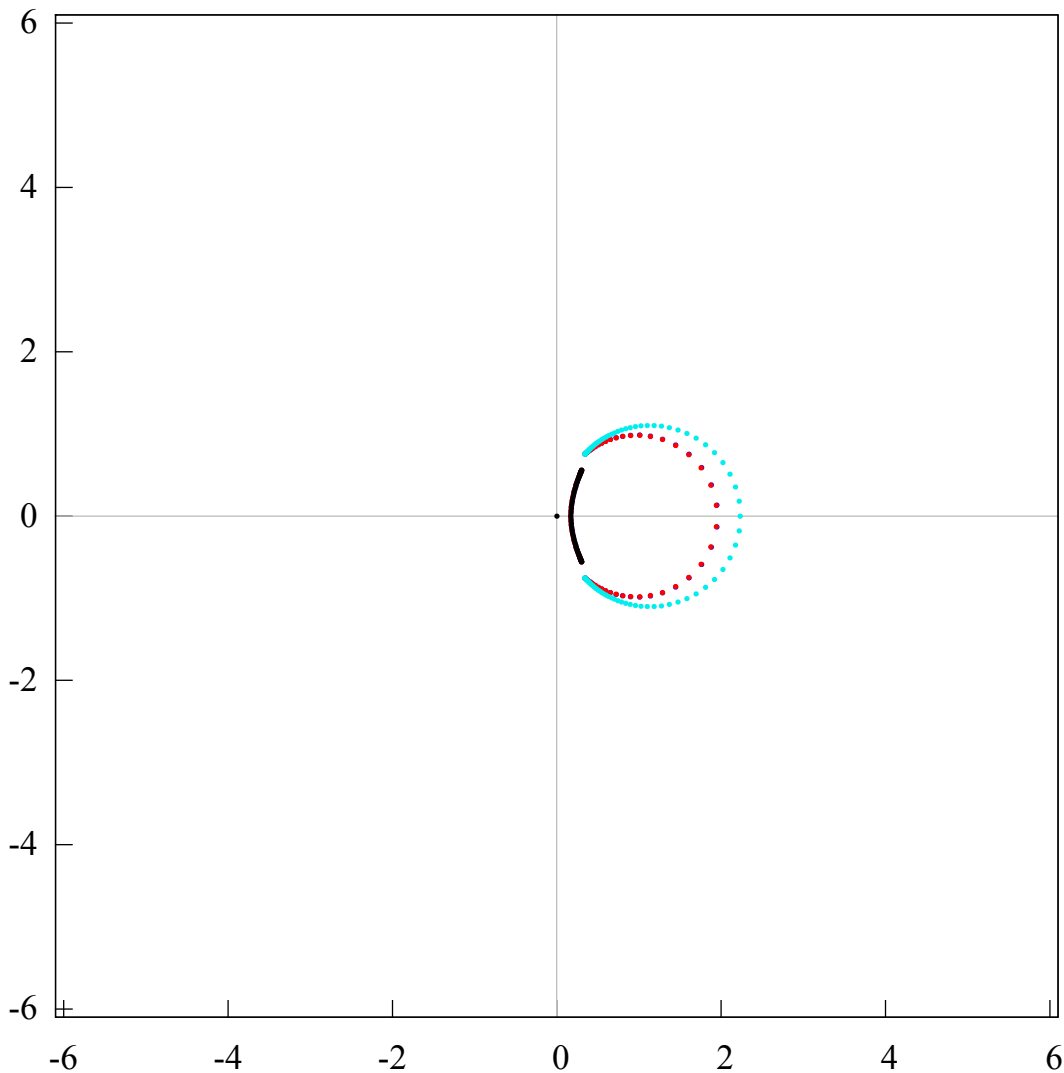


Рис. 9. Пример 2. Здесь изображены нули и полюсы (синие и красные точки) АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$ , построенной по элементу  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$  из примера 2. А также нули (голубые точки) полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  при  $n = 50$  и нули (красные, синие и черные точки) полиномов Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{\mathbf{n},j}$  при  $\mathbf{n} = (50, 50)$ . Видно, что все три соответствующих компакта  $S$ ,  $E_2$  и  $F_2$  отличны друг от друга.

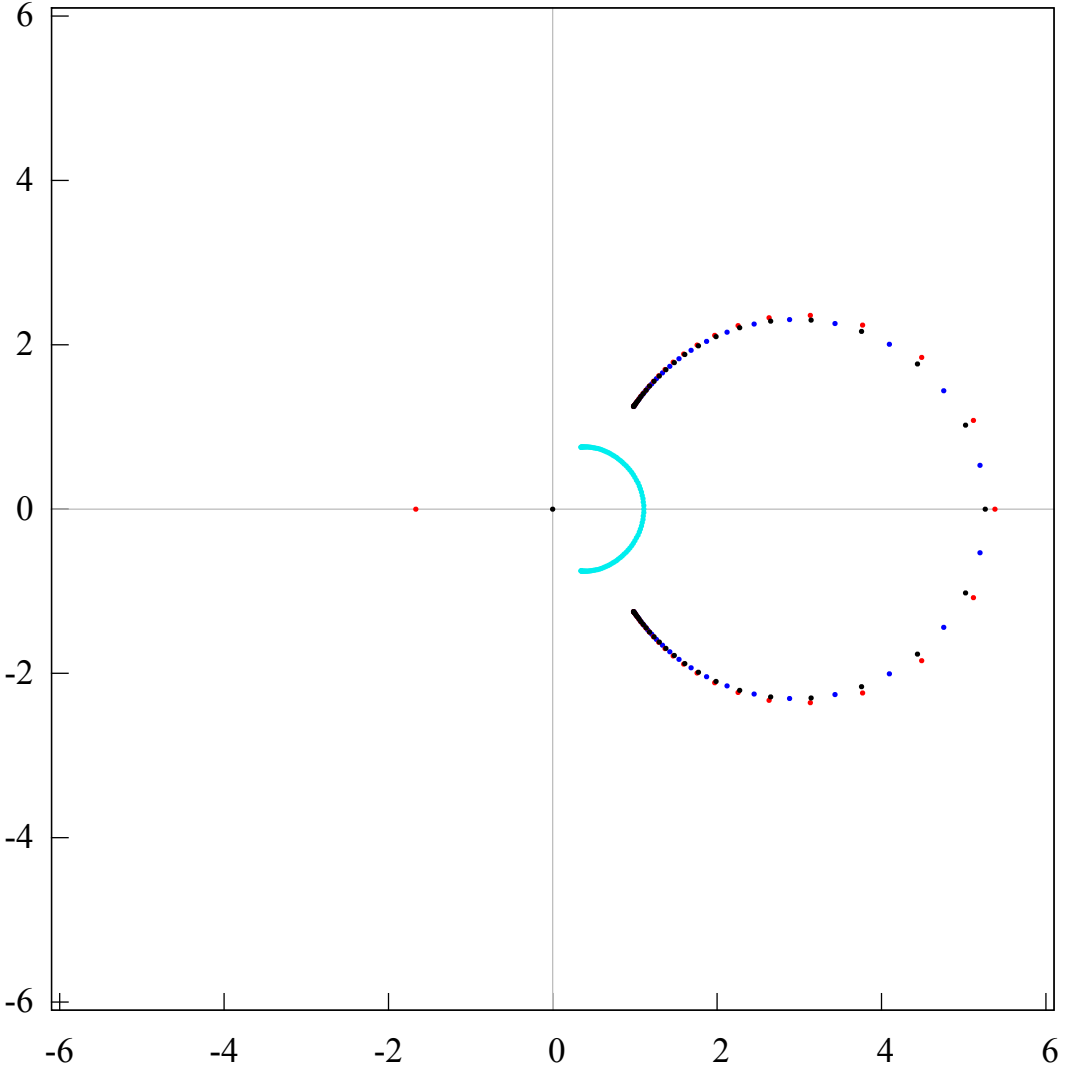


Рис. 10. Пример 3. Здесь изображены нули полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  (голубые точки) при  $n = 50$  и нули полиномов Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{n,j}$ ,  $j = 0, 1, 2$ , (красные, синие и черные точки) при  $\mathbf{n} = (50, 50)$ . На основе этих данных с помощью соотношений (71) и (72) анализируется структура наттоловского разбиения на листы ассоциированной с ростком  $\tilde{f}_0$  трехлистной рп  $\mathfrak{R}_3(w)$ . В соответствии с (71) нули полинома  $Q_{2n}$  моделируют компакт  $E_2 = \pi_3(F^{(1,2)})$ , нули полиномов  $Q_{n,j}$  моделируют компакт  $F_2 = \pi_3(F^{(2,3)})$ . Оба этих компакта пересекают вещественную прямую, но при этом, в отличие от примера 2 (рис. 8), компакт  $F_2$  находится правее компакта  $E_2$ .

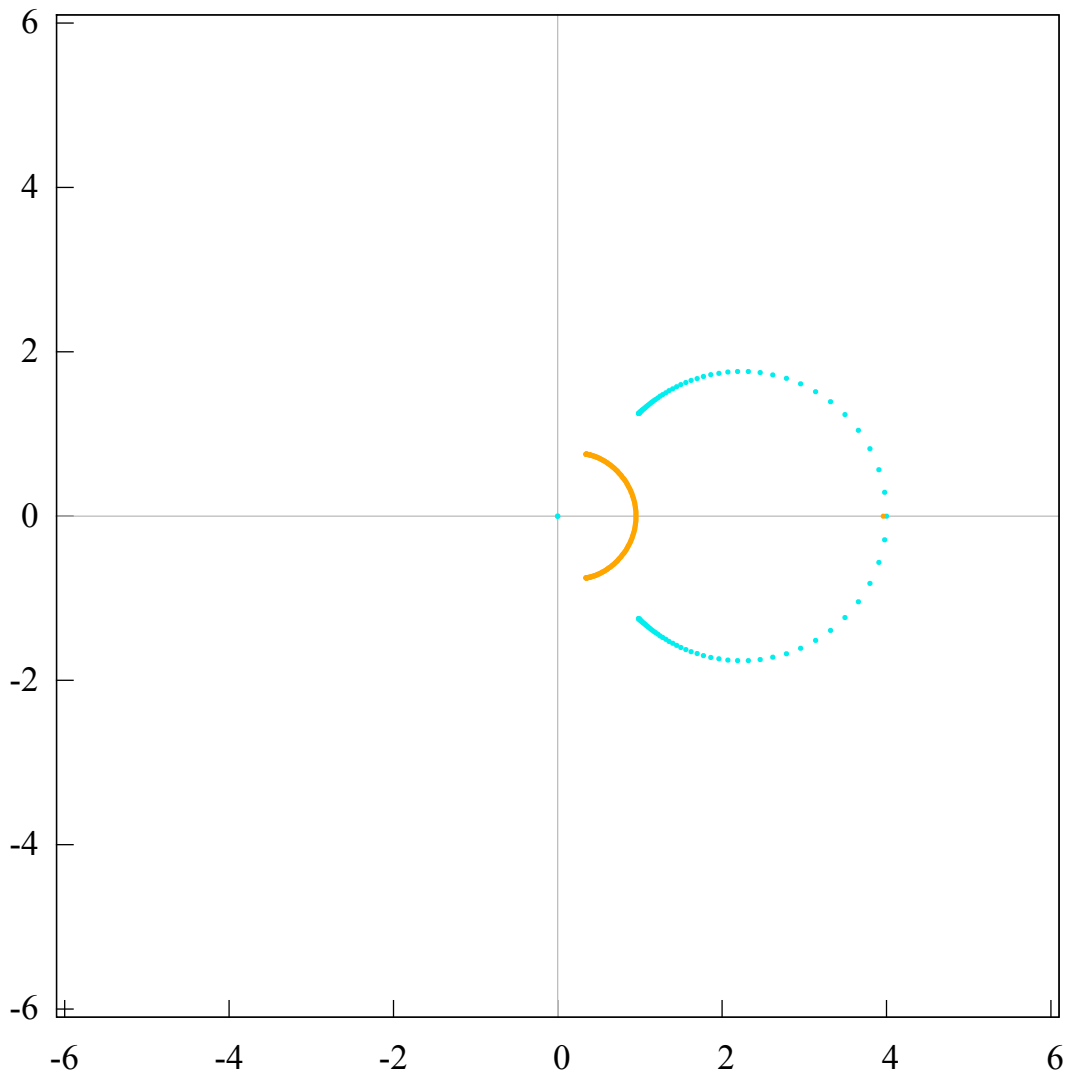


Рис. 11. Пример 3. Здесь изображены нули полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{3n}$  при  $n = 50$  (желтые точки), моделирующие в соответствии с теоремой 5, компакт  $E = \pi_4(\Gamma^{(1,2)})$ . Кроме этого, здесь изображены (голубые точки) нули полиномов  $S_{2n,1}$  при  $n = 50$ , моделирующие компакт  $F = \pi_4(\Gamma^{(2,3)})$ .

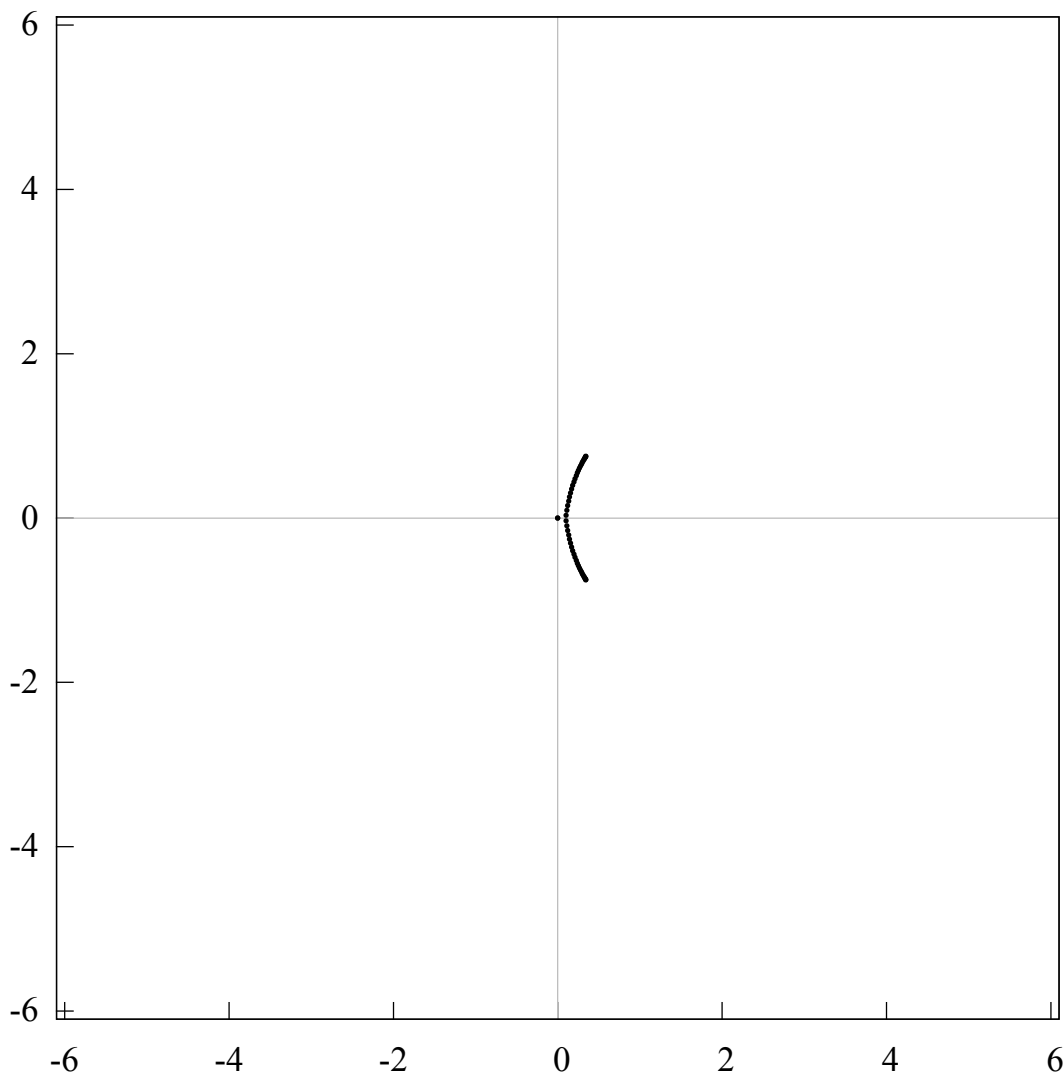


Рис. 12. Пример 3. Здесь изображены (черные точки) нули полинома  $Q_{\mathbf{n},2}$ ,  $\mathbf{n} = (n, n, n)$ , при  $n = 50$ , моделирующие компакт  $E' = \pi_4(\Gamma^{(3,4)})$ .

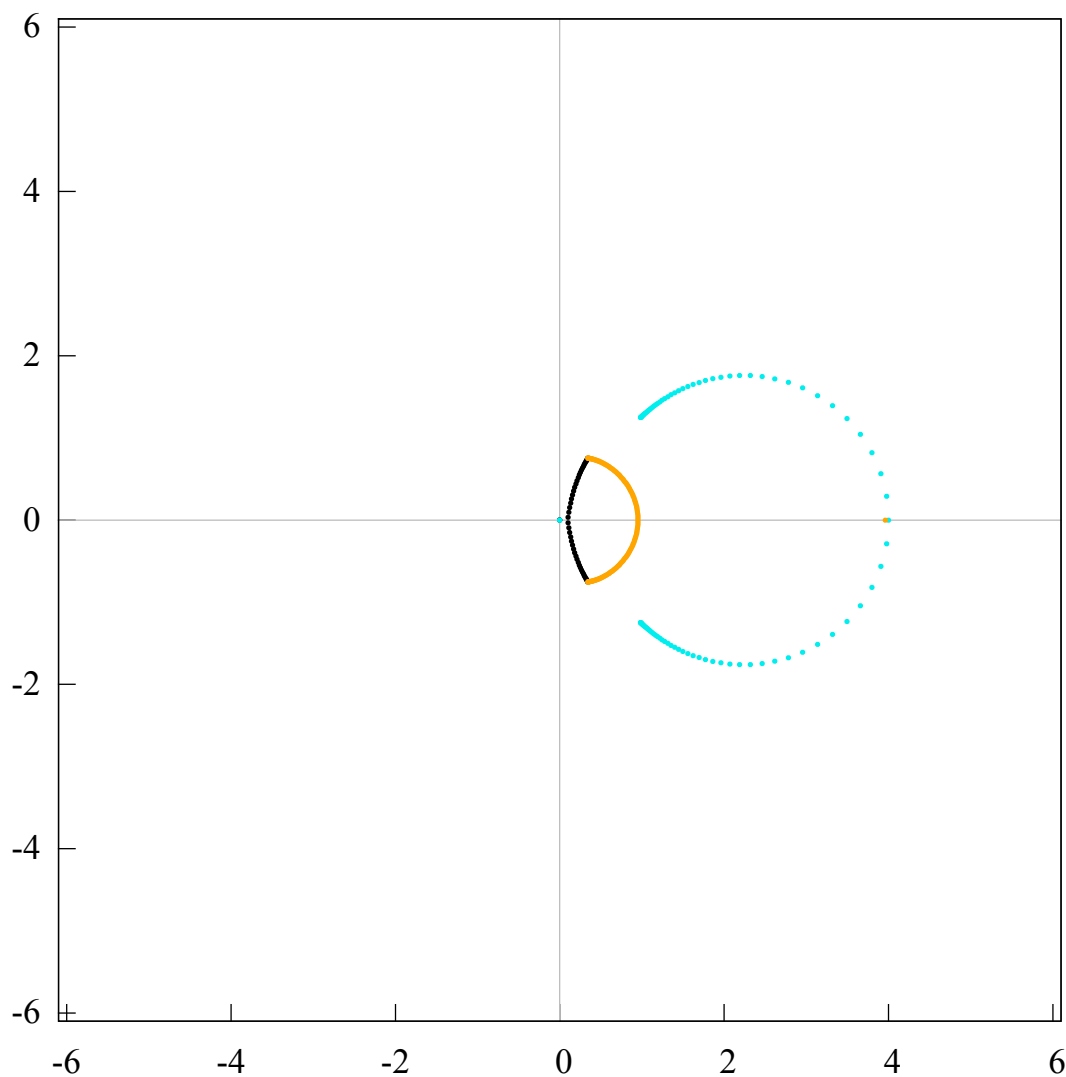


Рис. 13. Пример 3. Здесь объединены рис. 11 и 12. Из рисунка видно, что все три компакта  $E$ ,  $F$  и  $E'$  пересекают вещественную прямую между точками  $x = 0$  и  $x = 6$ . Но при этом компакт  $E'$  находится левее компактов  $E$  и  $F$ .

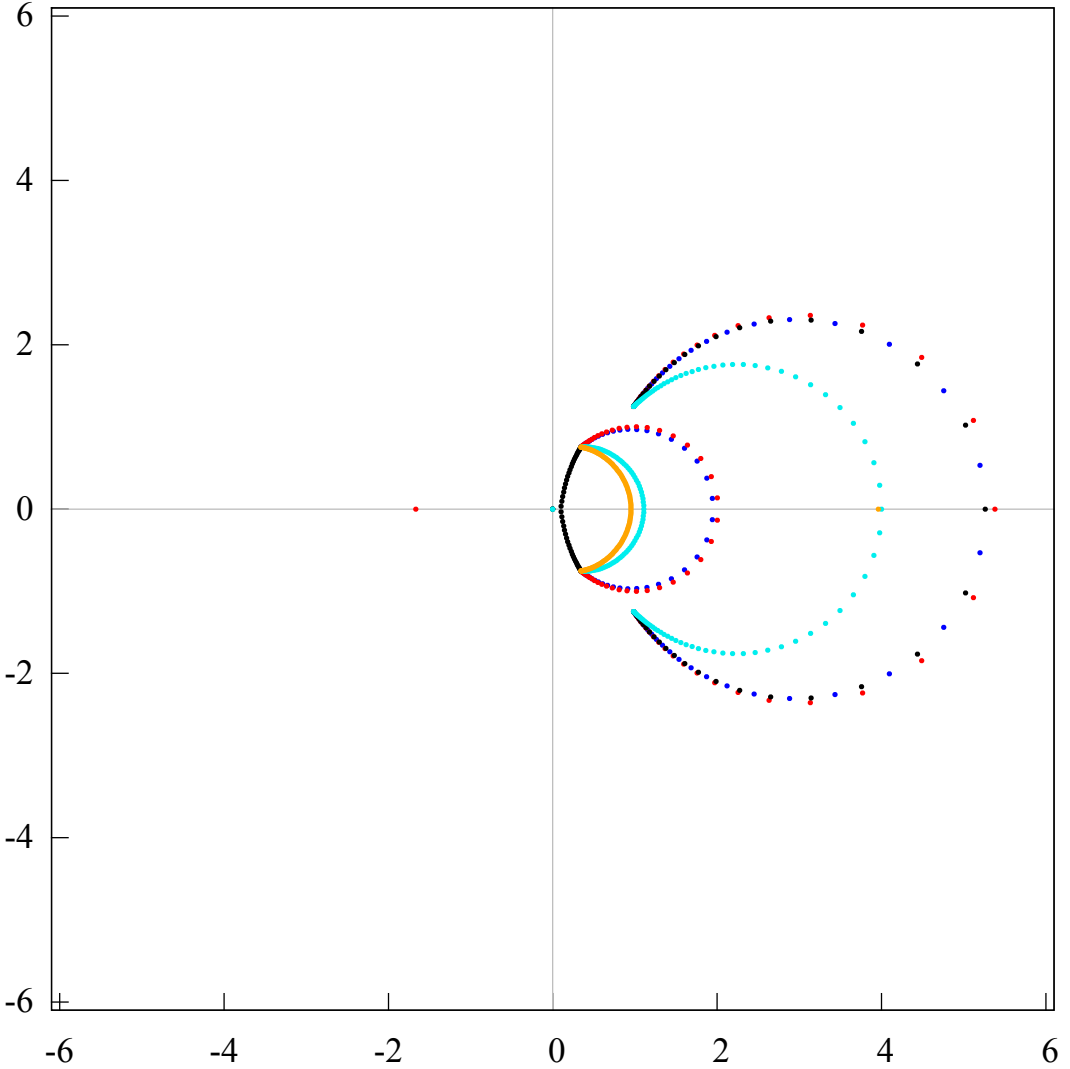


Рис. 14. Пример 3. Здесь изображены нули и полюсы (синие и красные точки) АП  $[50/50]_{\tilde{f}_0}$ , построенной по элементу  $\tilde{f}_0 \in \mathcal{H}(0)$  из примера 3. Кроме того, нули (голубые точки) полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{2n}$  при  $n = 50$  и нули (красные, синие и черные точки) полиномов Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{\mathbf{n},j}$  при  $\mathbf{n} = (50, 50)$  (рис. (10)). Наконец, к этому добавлены нули (желтые точки) полинома Эрмита–Паде 2-го типа  $Q_{3n}$ , нули (желтые точки) полинома  $S_{2n,1}$ , и нули (черные точки) полинома Эрмита–Паде 1-го типа  $Q_{\mathbf{n},2}$  при  $\mathbf{n} = (n, n, n)$ , где  $n = 50$ . Видно, что все шесть компактов  $S$ ,  $E_2, F_2$ ,  $E, F$  и  $E'$  отличны друг от друга.

## Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [2] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Доклады РАН*, **422**:4 (2008), 1–3; A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for a pair of functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [3] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [4] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; A. I. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **66**:6(402) (2011), 37–122.
- [5] Alexander I. Aptekarev, Maxim L. Yattselev, “Padé approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials”, *Acta Mathematica*, **215**:2 (2015), 217–280.
- [6] А. И. Аптекарев, А. И. Боголюбский, М. Л. Ятцелев, “Сходимость лучевых последовательностей аппроксимаций Фробениуса–Паде”, *Матем. сб.*, **208**:3 (2017), 4–27; A. I. Aptekarev, A. I. Bogolyubskii, M. Yattselev, “Convergence of ray sequences of Frobenius–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **208**:3 (2017), 313–334.
- [7] Н. У. Аракелян, “Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов”, *Матем. сб.*, **124**(166):1(5) (1984), 24–44; N. U. Arakelian, “On efficient analytic continuation of power series”, *Mat. Sb. (N.S.)*, **124**(166):1(5) (1984), 24–44; *Math. USSR-Sb.*, **52**:1 (1985), 21–39.
- [8] Norair Arakelian, Wolfgang Luh, “Efficient analytic continuation of power series by matrix summation methods”, On table of contents: 2003, *Comput. Methods Funct. Theory*, **2**:1 (2002), 137–153.
- [9] N. U. Arakelyan, “Efficient analytic continuation of power series and the localization of their singularities”, (in Russian), *Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat.*, **38**:4 (2003), 5–24; in *J. Contemp. Math. Anal.* **38**:4 (2004), 2–20.
- [10] Л. Бибербах, *Аналитическое продолжение*, Наука, М., 1967, 241; пер. с нем.: L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955, ii+168.
- [11] E. Borel, *Lecons sur les fonctions de variables reelles et les developpements en series de polynomes*, Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [12] Д. Барриос Роланиа, Дж. С. Джеронимо, Г. Лопес Лагомасино, “Рекуррентные соотношения высших порядков, аппроксимации Эрмита–Паде и системы Никишина”, *Матем. сб.*, **209**:3 (2018), 102–137; D. Barrios Rolanía, J. S. Geronimo, G. López Lagomasino, “High-order recurrence relations, Hermite–Padé approximation and Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **209**:3 (2018), 385–420.
- [13] В. И. Буслаев, С. П. Суетин, “О задачах равновесия, связанных с распределением нулей полиномов Эрмита–Паде”, *Современные проблемы математики, механики и математической физики*, Сборник статей, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 272–279; V. I. Buslaev, S. P. Suetin, “On Equilibrium Problems Related to the Distribution of Zeros of the Hermite–Padé Polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **290** (2015), 256–263.



- [14] Е. М. Чирка, *Римановы поверхности*, Лекц. курсы НОЦ, **1**, МИАН, М., 2006, 106 с.; E. M. Chirka, *Riemann surfaces*, Lekts. Kursy NOC, **1**, Steklov Math. Institute of RAS, Moscow, 2006, 106 pp.
- [15] U. Fidalgo Prieto, A. Lopez Garcia, G. Lopez Lagomasino, V. N. Sorokin, “Mixed type multiple orthogonal polynomials for two Nikishin systems”, *Constructive Approximation*, **32** (2010), 255–306.
- [16] U. Fidalgo Prieto, G. Lopez Lagomasino, “Nikishin Systems Are Perfect”, *Constr. Approx.*, **34**:3 (2011), 297–356.
- [17] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [18] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [20] N. R. Ikononov, R. K. Kovacheva, S. P. Suetin, *Some numerical results on the behavior of zeros of polynomials*, 2015, 95, arXiv: [1501.07090](#).
- [21] N. R. Ikononov, R. K. Kovacheva, S. P. Suetin, *On the limit zero distribution of type I Hermite–Padé polynomials*, 2015, 67, arXiv: [1506.08031](#).
- [22] Nikolay R. Ikononov, Ralitzia K. Kovacheva, Sergey P. Suetin, *Zero Distribution of Hermite–Padé Polynomials and Convergence Properties of Hermite Approximants for Multivalued Analytic Functions*, 2016, 37 pp. arXiv: [1603.03314](#).
- [23] R. Jentzsch, “Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen”, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 219–251.
- [24] А. В. Комлов, Н. Г. Кружилин, Р. В. Пальвелев, С. П. Суетин, “О сходимости квадратичных аппроксимаций Шафера”, *УМН*, **71**:2(428) (2016), 205–206; A. V. Komlov, N. G. Kruzhilin, R. V. Palvelev, S. P. Suetin, “Convergence of Shafer quadratic approximants”, *Russian Math. Surveys*, **71**:2 (2016), 373–375.
- [25] А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С. П. Суетин, Е. М. Чирка, “Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности”, *УМН*, **72**:4(436) (2017), 95–130; A. V. Komlov, R. V. Palvelev, S. P. Suetin, E. M. Chirka, “Hermite–Padé approximants for meromorphic functions on a compact Riemann surface”, *Russian Math. Surveys*, **72**:4 (2017), 671–706.
- [26] Г. Лопес Лагомасино, В. Ван Аше, “Метод задачи Римана–Гильберта в применении к системе Никишина”, *Матем. сб.*, **209**:7 (2018); Guillermo Lopez Lagomasino, Walter Van Assche, “Riemann–Hilbert analysis for a Nikishin system”, *SB MATH*, **209**:7 (2018); arXiv: [1612.07108](#)
- [27] А. Лопес-Гарсиа, Э. Минья-Диас, “Системы Никишина на звездных множествах: алгебраические свойства и слабая асимптотика соответствующих совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **209**:7 (2018); : A. Lopez-Garcia, E. Mina-Diaz, “Nikishin systems on star-like sets: algebraic properties and weak asymptotics of the associated multiple orthogonal polynomials”, 2018.
- [28] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций, II*, Наука, М., 1968; англ. пер. A. I. Markushevich, *Theory of functions of a complex variable*, Revised

- English edition translated and edited by Richard A. Silverman, **II**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, xii+333 pp.
- [29] Andrei Martínez-Finkelshtein, Evgenii A. Rakhmanov, Sergey P. Suetin, “Asymptotics of type I Hermite–Padé polynomials for semiclassical functions”, arxiv: 1502.01202, *Modern trends in constructive function theory*, Contemp. Math., **661**, 2016, 199–228.
- [30] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; Е. М. Nikishin, “Asymptotic behavior of linear forms for simultaneous Padé approximants”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [31] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; Nikishin, E. M.; Sorokin, V. N., *Rational approximations and orthogonality*, Translated from the Russian by Ralph P. Boas, Translations of Mathematical Monographs, **92**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, viii+221 pp. ISBN: 0-8218-4545-4.
- [32] J. Nuttall, R. S. Singh, “Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs”, *J. Approx. Theory*, **21** (1977), 1–42.
- [33] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42** (1984), 299–386.
- [34] P. Painlevé, “Sur le développement des fonctions analytiques”, Note I. In Book: *E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes*, Gauthier-Villars, Paris, 1905, 101–148.
- [35] Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде для пары функций, образующей систему Никишина”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 115–160; Е. А. Rakhmanov, S. P. Suetin, “The distribution of the zeros of the Hermite–Padé polynomials for a pair of functions forming a Nikishin system”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1347–1390.
- [36] Е. А. Рахманов, “Теорема Гончара–Шталя о  $\rho^2$  и связанные с ней направления исследований по рациональным аппроксимациям аналитических функций”, *Матем. сб.*, **207**:9 (2016), 57–90; Е. А. Rakhmanov, “The Gonchar–Stahl  $\rho^2$ -theorem and associated directions in the theory of rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **207**:9 (2016), 1236–1266.
- [37] Е. А. Рахманов, “Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде в случае Анжелеско”, *УМН*, **73**:3(441) (2018), 89–156.
- [38] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, *Функционалы на конечных римановых поверхностях*, ИЛ, М., 1957; Menahem Schiffer, Donald C. Spencer, *Functionals of finite Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954, x+451 pp..
- [39] R. E. Shafer, “On Quadratic Approximation”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **11**:2 (1974), 447–460.
- [40] В. Н. Сорокин, “О совместном приближении нескольких линейных форм”, *Вестн. Моск. ун-та. сер. 1. Математика. Механика*, 1983, № 1, 44–47; Sorokin, V. N., “Simultaneous approximation of several linear forms”, (Russian), *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, 1983, № 1, 44–47.
- [41] H. Stahl, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials and related convergence results. A summary of results”, *Nonlinear numerical methods and rational approximation* (Wilrijk, 1987), Math. Appl., **43**, Reidel, Dordrecht, 1988, 23–53, (Also fulltext Preprint version available).
- [42] H. Stahl, “The convergence of Padé approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.
- [43] Herbert R. Stahl, *Sets of Minimal Capacity and Extremal Domains*, 112 pp., arXiv: 1205.3811.

- [44] С. П. Суетин, “Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение”, *УМН*, **70**:5(425) (2015), 121–174; S. P. Suetin, “Distribution of the zeros of Padé polynomials and analytic continuation”, *Russian Math. Surveys*, **70**:5 (2015), 901–951.
- [45] С. П. Суетин, “О некотором аналоге теоремы Поля для многозначных аналитических функций с конечным числом точек ветвления”, *Матем. заметки*, **101**:5 (2017), 779–791; S. P. Suetin, “An Analog of Pólya’s Theorem for Multivalued Analytic Functions with Finitely Many Branch Points”, *Math. Notes*, **101**:5 (2017), 888–898.
- [46] С. П. Суетин, “О распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для набора четырех функций”, *УМН*, **72**:2 (2017), 191–192; S. P. Suetin, “On the distribution of the zeros of the Hermite–Padé polynomials for a quadruple of functions”, *Russian Math. Surveys*, **72**:2 (2017), 375–377.
- [47] С. П. Суетин, “О распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для комплексной системы Никишина”, *УМН*, **73**:2(440) (2018), 183–184; S. P. Suetin, “Distribution of the zeros of Hermite–Padé polynomials for a complex Nikishin system”.
- [48] С. П. Суетин, “О новом подходе к задаче о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для системы Никишина”, статья принята для публикации, *Труды МИАН*, **301** (2018); Sergey P. Suetin, *On a new approach to the problem of the zero distribution of Hermite–Padé polynomials for a Nikishin system*, Submitted on 19 May 2018, arXiv: [1805.07577](https://arxiv.org/abs/1805.07577).
- [49] С. П. Суетин, “Полиномы Эрмита–Паде и аналитическое продолжение: вещественный случай”, работа готовится к публикации, 2018.
- [50] С. П. Суетин, “Полиномы Эрмита–Паде и аналитическое продолжение: комплексный случай”, работа готовится к публикации, 2018.
- [51] G. Szegő, “Über die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmäßig konvergieren”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **21** (1922), 59–64.

**С. П. Суетин (Sergey P. Suetin)**

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской  
академии наук, г. Москва  
E-mail: [suetin@mi.ras.ru](mailto:suetin@mi.ras.ru)

Дата последнего  
обновления: 21.06.2018