

Выпуклые тела с правильными или равносторонними паркетными гранями

Тимофеев Алексей Викторович

XV Международная конференция
«Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия:
современные проблемы и приложения»,
посвященная столетию со дня рождения
профессора Николая Михайловича Коробова

Тула, 12⁰⁵ – 12⁵⁰ 29 мая 2018 г.

Выпуклые тела с правильными гранями

Выпуклые тела с правильными гранями

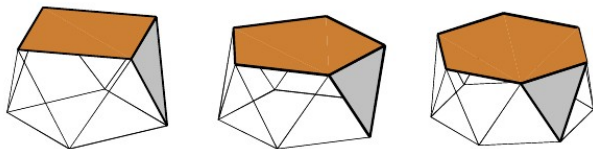


Figure: Антипризмы A_4 , A_5 и A_6

Выпуклые тела с правильными гранями

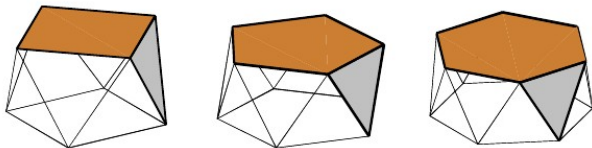


Figure: Антипризмы A_4 , A_5 и A_6

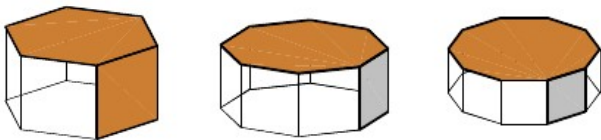


Figure: Призмы P_6 , P_8 и P_{10}

Классификация правильных тел

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильных тел

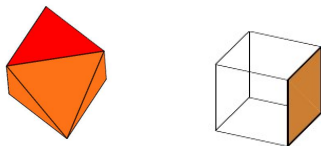


Figure: Октаэдр A_3 и куб Π_4

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильных тел

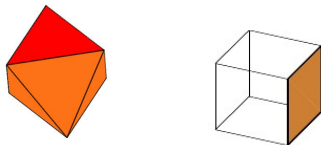


Figure: Октаэдр A_3 и куб P_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм P_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильных тел

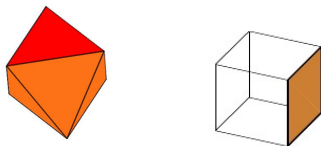


Figure: Октаэдр A_3 и куб P_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм P_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильных тел

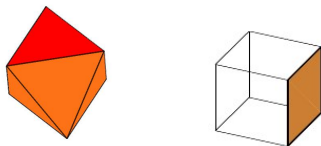


Figure: Октаэдр A_3 и куб P_4

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм P_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

- 1 правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
- 2 13 архимедовых тел,

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

Классификация правильных тел

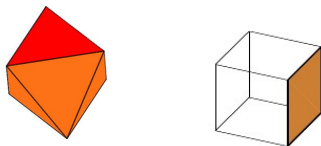


Figure: Октаэдр A_3 и куб P_4

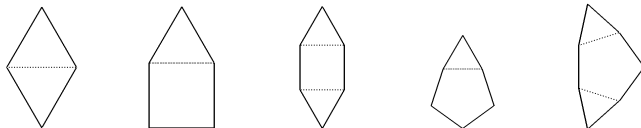
Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, N. Johnson)

Кроме призм P_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:

- ❶ правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;
- ❷ 13 архимедовых тел,
- ❸ 92 многогранника Джонсона.¹

¹Залгаллер В. А., *Выпуклые многогранники с правильными гранями*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 2 (1967), Наука, М.-Л., 5–221.

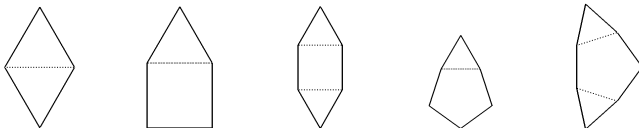
Паркетогранники без фиктивных вершин



2

²Тимофеев А. В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, С. 155-170. ▶

Паркетогранники без фиктивных вершин



Теорема (А. М. Гурин, В. А. Залгаллер, А.Т., 2008-2011)

Если отличное от правильногранного выпуклое тело имеет грани либо правильные, либо составленные так из правильных многоугольников, что каждая вершина такого многоугольника служит и вершиной грани, то оно подобно одному из 78 многогранников, построенных явно:

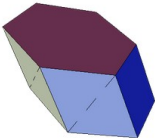
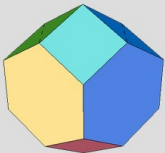
<http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>.

²Тимофеев А. В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В.Ефимова./ Под ред. И.Х.Сабитова и В.Н.Чубарикова. - М.: Изд-во МГУ, 2011, С. 155-170.

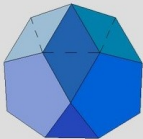
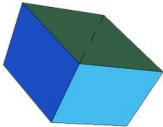
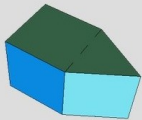
Convex regular-faced polyhedra with conditional edges

The names are generally taken from Timofeenko. Some names labeled (GZ) are more fanciful names given in Gurin-Zalgaller; others labeled (S) are my own invention. I have taken some liberties with translating Timofeenko's names; in particular I use "para-augmented" and "meta-augmented" for the two ways of augmenting a pentagonal rotunda; "gyrate augmented" for augmentations which are also found in a different orientation among the Johnson solids; and various modifiers to describe the 5 different ways of biaugmenting an orthobirotunda and the 3 different ways of triaugmenting one.

The viewers require [Java](#). The first opening of a live viewer is likely to be very slow as your browser starts Java. After the first others will start more quickly.

P _n ,k	S _n	Name	Composition	Image/Viewer	V	E	F	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₈	F ₁₀	F ₃₊₃
Q ₁	Q ₁	oblique hexagonal prism, Ivanov solid Q ₁	noncomposite	 Start Live View Enlarge	12	18	8		2		2			4
Q ₂	Q ₂	hexarhombic dodecahedron (S), Ivanov solid Q ₂	noncomposite	 Start Live View Enlarge	18	28	12		4		4			4

Атлас паркетогранников без фиктивных вершин

Q ₆	Q ₆	Pryakhin solid Q ₆	noncomposite	 Start Live View Enlarge	18	33	17	7	3	3	1				3	
P _{2,2}	S ₃	rhombic prism, bifastigium (S)	$\Pi_3 + \Pi_3'$	 Start Live View Enlarge	8	12	6		4						2	
P _{2,3}	S ₄	3+4-prism (S)	$\Pi_3 + \Pi_4$	 Start Live View Enlarge	10	15	7		5							2

⁴Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. С. 111-112.

Паркетные многоугольники

Определение (Ю. А. Пряхин, 1974)

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников.

⁴Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. С. 111-112.

Определение (Ю. А. Пряхин, 1974)

Паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников.

"Чередование углов при обходе вершины паркетного многоугольника называем его *типом* и характеризуем одним символом"⁴. Например, символ(3,6,3,6) означает, что у многоугольника 4 вершины, углы при которых последовательно равны углам правильных треугольника, шестиугольника, треугольника, шестиугольника.

⁴Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. С. 111-112.

Равнорёберные паркетограммики

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырём из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

Равнорёберные паркетограммики

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырём из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:



Figure: 7c

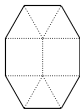


Figure: 8c

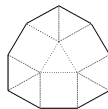


Figure: 9b

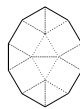


Figure: 10b

Равнорёберные паркетограммики

Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырём из них соответствуют правильные многоугольники. Ещё девяти типам могут соответствовать равносторонние многоугольники:

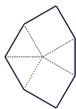


Figure: 7c

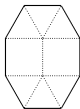


Figure: 8c

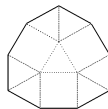


Figure: 9b

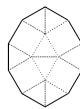


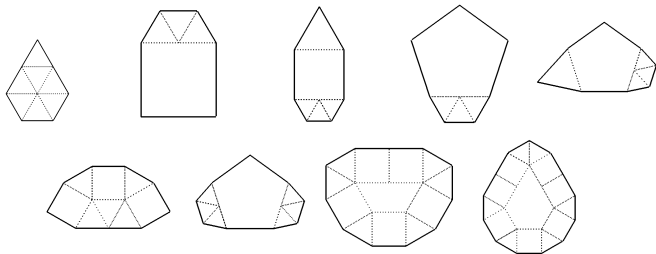
Figure: 10b

Гипотеза, 2018

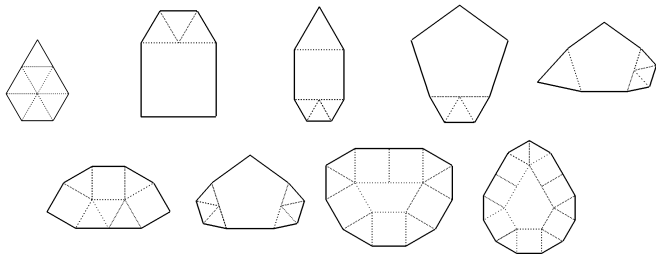
Четыре призмы, в основаниях которых лежат паркетные многоугольники типов $(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$, $(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$, $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$ и $(6, 12^4, 6, 12^4)$, и только они являются равнорёберными паркетограммиками с фиктивными вершинами.

Типы неравносторонних паркетных многоугольников

Типы неравносторонних паркетных многоугольников



Типы неравносторонних паркетных многоугольников



Алексеев М. Н.(2018):

Если стороны паркетного многоугольника равны, то он обладает одним из следующих типов: $3a(3^3)$; $4b(3, 6, 3, 6)$; $4c(4^4)$; $5b(3, 12, 4^2, 12)$; $6a(3, 12^2, 3, 12^2)$; $6b(3, 30, 5^3, 30)$; $6d(6^6)$; $7b(3, 30, 5, 30, 3, 30^2)$; $7c(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$; $8c(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$; $9b(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$; $10b(6, 12^4, 6, 12^4)$; $12a(12^{12})$.

Классификация паркетогранников?

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями.

⁵Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.

Классификация паркетогранников?

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями.

Проблема

Каковы все типы паркетогранников?

⁵Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.

Классификация паркетогранников?

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями.

Проблема

Каковы все типы паркетогранников?

Ю.А.Пряхин уже осуществил в основном отыскание на основе излагаемых нами результатов поиск всех простых правильно-гранных многогранников с "условными ребрами" (см. § 4). Надеюсь, что он доведет свой результат до публикации.

[1, стр. 8]

⁵Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.

Классификация паркетогранников?

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями.

Проблема

Каковы все типы паркетогранников?

Ю.А.Пряхин уже осуществил в основном отыскание на основе излагаемых нами результатов поиск всех простых правильно-гранных многогранников с "условными ребрами" (см. § 4). Надеюсь, что он доведет свой результат до публикации.

[1, стр. 8]⁵

⁵Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.

Простые и составные многогранники

⁶Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.

Простые и составные многогранники

Определение (В. А. Залгаллер, 1963-1967)

Правильногранный многогранник (паркетогранник без фиктивных вершин) называем *простым*, если он не допускает рассечения плоскостью на два других правильногранных многогранника. (Такое сечение должно идти по рёбрам). В противном случае правильногранный многогранник называем *составным*.

⁶Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.

Простые и составные многогранники

Определение (В. А. Залгаллер, 1963-1967)

Правильногранный многогранник (паркетогранник без фиктивных вершин) называем *простым*, если он не допускает рассечения плоскостью на два других правильногранных многогранника. (Такое сечение должно идти по рёбрам). В противном случае правильногранный многогранник называем *составным*.

$$A_4, A_5, \dots; П_3, П_4, \dots; \underbrace{M_1, M_2, \dots, M_{28}}_{\text{Залгаллер}}; \underbrace{Q_1, Q_2, \dots, Q_5}_{\text{Иванов}}, Q_6^6. \quad (1)$$

⁶Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.

Простые и составные многогранники

Определение (В. А. Залгаллер, 1963-1967)

Правильногранный многогранник (паркетогранник без фиктивных вершин) называем *простым*, если он не допускает рассечения плоскостью на два других правильногранных многогранника. (Такое сечение должно идти по рёбрам). В противном случае правильногранный многогранник называем *составным*.

$$A_4, A_5, \dots; \underbrace{P_3, P_4, \dots; M_1, M_2, \dots, M_{28}}_{\text{Залгаллер}}; \underbrace{Q_1, Q_2, \dots, Q_5, Q_6}_{\text{Иванов}}^6. \quad (1)$$

$$\underbrace{P_{7c}, P_{8c}, P_{9b}, P_{10b}}_{\text{29 мая 2018 г.}}. \quad (2)$$

⁶Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.

F' -многогранники и F -многогранники

Предложение (А. М. Гурин, А.Т.,2008)

Соединение по граням каждого простого тела, отличного от многогранника из списка

$\Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_8, \Pi_{10}; A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10};$

$M_1, \dots, M_{15}, M_{20}, M_{22}; Q_4, Q_6,$

с любым паркетогранником без фиктивных вершин не является таким паркетогранником.

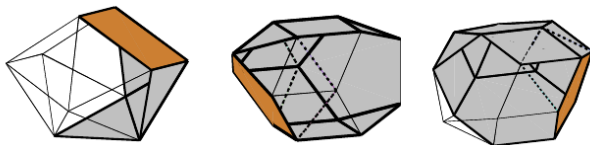


Figure: Клинокорона M_{22} , многогранники Иванова Q_4 и Пряхина Q_6

Выпуклые соединения правильных пирамид

Теорема (2013-2017). *Составленный из не более 16 правильных пирамид выпуклый многогранник с паркетными гранями и равными или вдвое отличающимися по длине рёбрами является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:*

Выпуклые соединения правильных пирамид

Теорема (2013-2017). Составленный из не более 16 правильных пирамид выпуклый многогранник с паркетными гранями и равными или вдвое отличающимися по длине рёбрами является одним из следующих тел, справа от обозначения каждого из которых указана группа его симметрий:

- 1) $M_1, [3, 3], M_2, [4], M_3, [5];$
- 2) $M_1 + M_1, [2, 3], M_1 + M_2, [], M_2 + M_2, [3, 4], M_3 + M_3, [2, 5];$
- 3) ${}^\circ S_{2,2} + M_1, [2], S_{2,2} + M_2, [3], {}^\circ S_{2,2} + M_2, [2];$
- 4) ${}^\circ S_{3,1} + M_2, [2], {}^\circ S_{3,1} + M_2, [], S_{3,2} + M_1, [2^+, 6], S_{2,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], S_{2,2} + S_{2,2}, [2]^+, {}^\circ S_{2,2} + S_{2,2}, [2];$
- 5) ${}^\circ S_{4,1} + M_1, [3], {}^\circ S_{4,4} + M_2, [];$
- 6) ${}^\circ S_{5,1} + M_1, [3, 3], {}^\circ S_{5,2} + M_1, []^+, {}^\circ S_{5,2} + M_2, [2, 2], {}^\circ S_{4,4} + S_{2,2}, [], {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, [2];$
- 7)
 ${}^\circ S_{6,2} + M_2, [], {}^\circ S_{6,4} + M_2, [], {}^\circ S_{6,5} + M_2, [], S_{4,6} + S_{3,1}, [3], {}^\circ S_{3,1} + S_{3,1}, [2];$
- 8) ${}^\circ S_{7,1} + M_1, [2^+, 2], {}^\circ S_{7,2} + M_1, [], {}^\circ S_{7,3} + M_1, [], S_{7,4} + M_2, [], {}^\circ S_{6,2} + S_{2,2}, [2^+, 2], {}^\circ S_{6,5} + S_{2,2}, [2^+, 2^+];$

Классификация соединений правильных пирамид?

- 9) $^{\circ}S_{8,4} + M_2, []$, $^{\circ}S_{6,4} + S_{3,1}, [2^+, 4]$, $^{\circ}S_{6,4} + S_{3,3}, [4]$, $^{\circ}S_{2,2} + S_{2,2}, [2]$;
10) $^{\circ}S_{9,1} + M_1, []^+$, $^{\circ}S_{9,1} + M_2, [2, 3]$, $^{\circ}S_{9,3} + M_2, [4]$, $^{\circ}S_{8,4} + S_{2,2}, []^+$, $^{\circ}S_{5,1} + S_{5,1}, [2, 3]^+$;
11) $^{\circ}S_{10,1} + M_2, []$, $^{\circ}S_{10,4} + M_2, []^+$, $^{\circ}S_{10,5} + M_1, [3]$;
12) $^{\circ}S_{11,2} + M_1, []^+$, $^{\circ}S_{11,3} + M_1, [2, 3]$, $S_{9,1} + S_{3,1}, [2^+, 2]$, $^{\circ}S_{9,1} + S_{3,1}, [2]$, $^{\circ}S_{9,3} + S_{3,1}, []$;
13) $^{\circ}S_{12,3} + M_2, []$, $^{\circ}S_{12,4} + M_1, []$, $^{\circ}S_{10,4} + S_{3,1}, []$;
14) $^{\circ}S_{13,1} + M_1, []$, $^{\circ}S_{13,1} + M_2, [2^+, 2]$, $^{\circ}S_{13,3} + M_2, []^+$, $^{\circ}S_{12,3} + S_{2,2}, []^+$, $S_{7,4} + S_{7,4}, [2^+, 6]$, $S_{7,4} + S_{7,4}, [3, 4]$;
15) $^{\circ}S_{14,1} + M_2, []$, $S_{14,5} + M_2, []$, $S_{14,6} + M_2, [4]$, $S_{12,4} + S_{3,3}, [3, 3]$, $^{\circ}S_{12,4} + S_{3,3}, []$;
16) $^{\circ}S_{15,1} + M_1, [2^+, 2]$, $^{\circ}S_{15,2} + M_2, []$, $S_{15,2} + M_2, [2]^+$, $^{\circ}S_{15,3} + M_2, [2]$, $S_{15,3} + M_2, [2, 4]$, $^{\circ}S_{15,4} + M_1, [3]$, $^{\circ}S_{15,5} + M_1, []$, $^{\circ}S_{14,4} + S_{2,2}, [2^+, 2^+]$, $^{\circ}S_{13,1} + S_{3,1}, []$, $^{\circ}S_{12,5} + S_{4,2}, [2^+, 2]$.⁷

⁷... 512) $S_{512,?} = {}^2 M_{16}$. Окладникова Е.С., Тимофеев А.В. //

Усечённый октаэдр $[4, 6, 6] = M_{16}$

Многогранник $S_{i,j}$ расположен в списке (i) на j -м месте:

*$S_{1,1} = M_1, S_{1,2} = M_2, S_{1,3} = M_3, S_{2,1} = S_{1,1} + M_1, \dots, S_{16,10} =$
 $S_{12,5} + S_{4,2}$. Кругом помечены многогранники с фиктивными*
вершинами.

$$[4, 6, 6] = M_{16}$$

$M_{16} = M_{16a} + 2 M_{2a}$, где $M_{16a} = 2 \left((S_{8,3} + S_{2,2}) + S_{3,1} \right) + \left(\left((S_{8,3} + M_2) + S_{3,1} \right) + S_{2,2} \right) + S_{6,2}$, $S_{2,2} = M_1 + M_2$,
 $S_{3,1} = S_{2,2} + M_1$, $S_{3,3} = S_{2,2} + M_2$, $S_{6,2} = \left((S_{2,2} + S_{2,2}) + M_2 \right) + M_1$, $S_{8,3} = \left((S_{2,2} + S_{2,2}) + S_{3,1} \right) + M_2$,
 $M_{2a} = (S_{3,1} + S_{3,3}) + S_{3,3}$ – усечённая по средним линиям боковых граней четырёхугольная пирамида с квадратом со сторонами длины два в основании, $M_{16a} = 24M_1 + 22M_2$ 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{16} параллельными плоскостями двух тел M_{2a} .

Усечённый икосаэдр $M_{19} = 2 M_{3a} + M_{19a} = 3 M_{3a} + M_{19b}$, где M_{3a} – усечённая по средним линиям боковых граней пятиугольная пирамида с правильным пятиугольником со сторонами длины два в основании, M_{19a} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} параллельными плоскостями двух тел M_{3a} , M_{19b} – 1-правильногранник, оставшийся после отсечения от M_{19} трёх тел M_{3a} .

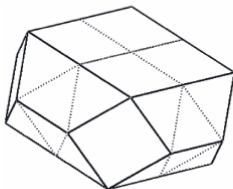
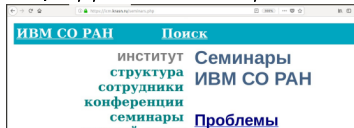


Рис. 6. Проекция видимых граней тела M_{16a}

Группы симметрий $AutP$ и поворотов Aut^+P тела P

<https://icm.krasn.ru/seminars.php>



ГРУППЫ И ПАРКЕТОГРАННИКИ

<https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra>

Красноярский алгебраический семинар

Председатели: д.ф.-м.н., профессора: В. М. Левчук, А. И. Созутов, В. В. Рыбаков

Секретарь: д.ф.-м.н., профессор С. Г. Колесников

Организаторы: ИМ СО РАН, [ИМ СФУ](#), [ИМФИ](#) КГПУ

Место: ИМ СФУ, ауд. 34-17, каждый четверг в 15:00

[Написать письмо](#)

Группы и правильногранники

Председатель: д.ф.-м.н., профессор Тимофеев А. В.

Секретарь: к.ф.-м.н., доцент А. И. Макося

Организаторы: ИМ СО РАН, ИМ СФУ, [ИМФИ](#) КГПУ, [ФТИНТ](#) НАН Украины

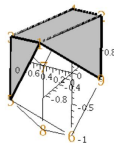
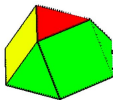
Место:

- ул. Перенсона, 7, ИМФИ КГПУ им. В. П. Астафьева, ауд. 1-11, каждый понедельник

- ИМ СО РАН, к. 416, каждую среду в 16:00

[Написать письмо](#)

Бесконечные группы с конечными элементами



Предложение 1.

Множество вершин тела M_4 совпадает с объединением орбит вершин 1 и 2 типов $(3, 4, 3, 4)$ и $(3, 4, 6)$ соответственно, соединённых ребром $[1, 2]$, при действии группы, порождённой отражениями от плоскостей α и β , причём α содержит биссектрисы шестидесятиградусных углов вершины 1, а β перпендикулярна выходящим из вершин 1 и 2 параллельным рёбрам и удалена от ребра $[1, 2]$ на половину его длины.

$$M_4 = \langle (3, 4, 3, 4), (3, 6, 4), (3, 4, 3, 4), (3, 6, 4), (3, 4, 3, 4), \\ (3, 6, 4), (3, 6, 4), (3, 4, 6), (3, 4, 6) | [1, 3, 5], [1, 9, 2], \\ [1, 2, 4, 3], [2, 9, 6, 8, 7, 4], [1, 5, 6, 9], [3, 4, 7], [3, 7, 8, 5], [5, 8, 6] \rangle$$

Предложение 2.

Множество вершин многогранника M_4 равно объединению орбит вершин $(\sqrt{3}/3, 0, \sqrt{6}/3)$ и $(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$ при действии группы, порождённой поворотом

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и отражением } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Футбольный мяч и разбиения икосаэдра

Теорема. Существуют только следующие выпуклые соединения многогранников

$$M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b} \quad (1)$$

при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого, а число соединяемых тел для каждого соединения $Q_{i,j}$, расположенного в списке (j) на месте i, минимально:

$$M_3 + M_3, M_3 + M_{3a}, M_3 + M_{19a}, M_3 + M_{19b}, M_3 + M'_{19b}, \\ M_3 + M''_{19b}, M_{3a} + M_{3a}, M_{3a} + M_{19a}, M_{3a} + M_{19b}; \quad (2)$$

$$Q_{2,2} + M_{3a}, Q_{2,2} + M_{19a}, Q_{2,2} + M_{19b}, Q_{2,3} + M_3, Q_{2,3} + M'_3, \\ Q_{2,3} + M''_3, Q_{2,3} + M_{3a}, Q_{2,3} + M'_{3a}, Q_{2,4} + M_3, Q_{2,4} + M'_3, \\ Q_{2,4} + M''_3, Q_{2,4} + M_{3a}, Q_{2,5} + M_3, Q_{2,5} + M'_3, Q_{2,5} + M_{3a}, \\ Q_{2,5} + M'_{3a}, Q_{2,8} + M_3, Q_{2,8} + M_{3a}; \quad (3)$$

$$Q_{3,1} + M_3, Q_{3,2} + M_3, Q_{3,2} + M_{3a}, Q_{3,3} + M_3, Q_{3,3} + M'_3, \\ Q_{3,3} + M''_3, Q_{3,4} + M_3, Q_{3,4} + M_{3a}, Q_{3,5} + M_{3a}, Q_{3,5} + M'_{3a}, \\ Q_{3,6} + M_{3a}, Q_{3,9} + M_3, Q_{3,9} + M_{3a}, Q_{3,9} + M'_{3a}, Q_{3,10} + M_{3a}, \\ Q_{3,11} + M_{3a}, Q_{3,11} + M'_{3a}, Q_{3,11} + M''_{3a}, Q_{3,13} + M_3, Q_{3,13} + M'_3, \\ Q_{3,13} + M_{3a}, Q_{3,13} + M'_{3a}, Q_{3,14} + M_3; \quad (4)$$

$$Q_{4,2} + M_3, Q_{4,2} + M_{3a}, Q_{4,3} + M_3, Q_{4,4} + M_3, \\ Q_{4,7} + M_{3a}, Q_{4,7} + M'_{3a}, Q_{4,12} + M_{3a}, Q_{4,12} + M'_{3a}; \quad (5)$$

$$Q_{5,1} + M_{3a}. \quad (6)$$

1. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, {}^{1/2}M_{3a}, {}^{2/3}M_{3a}, {}^{3/4}M_{3a}, M_{19a}, M_{19b}, M_{19c}$ с условием, что длины ребер принимают целые значения от одного до четырех.
2. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19d}, CA_5$ с условием, что длины ребер принимают целые значения от одного до трех.