

Мультиагентные системы и динамика мнений в социальных сетях



Сергей Парсегов

ИПУ РАН



Сколтех

Skoltech

Skolkovo Institute of Science and Technology

Математический кружок школы ПМИ МФТИ

1 Устойчивость однотипных систем

План доклада

- 1 Устойчивость однотипных систем
- 2 Консенсус в мультиагентных системах

План доклада

- 1 Устойчивость однотипных систем
- 2 Консенсус в мультиагентных системах
- 3 Примеры

- 1 Устойчивость однотипных систем
- 2 Консенсус в мультиагентных системах
- 3 Примеры
- 4 Динамика мнений в социальных сетях
 - Динамика мнений: постановка задачи
 - Консенсус: модель French-Harary-DeGroot
 - Кластеризация: нелинейные модели
 - Кластеризация: модель Friedkin-Johnsen
 - Новая многомерная модель со взаимосвязанными мнениями

- 1 Устойчивость однотипных систем
- 2 Консенсус в мультиагентных системах
- 3 Примеры
- 4 Динамика мнений в социальных сетях
 - Динамика мнений: постановка задачи
 - Консенсус: модель French-Harary-DeGroot
 - Кластеризация: нелинейные модели
 - Кластеризация: модель Friedkin-Johnsen
 - Новая многомерная модель со взаимосвязанными мнениями
- 5 Заключение

Однотипные системы

Однотипные системы

Определение 1

Однотипная система управления – это многосвязная система, состоящая из нескольких одинаковых скалярных звеньев и идеальных усилителей.

Однотипные системы

Определение 1

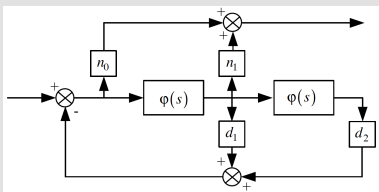
Однотипная система управления – это многосвязная система, состоящая из нескольких одинаковых скалярных звеньев и идеальных усилителей.

Литература

- А.А. Красовский, 1955
- О.С. Соболев, 1978
- Б.Г. Ильясов, Ю.С. Кабальнов, 1995
- Б.Т. Поляк, Я.З. Цыпкин, 1996
- Ш. Хара, 2007



Пример: скалярная передаточная функция

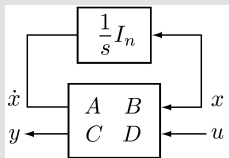


$$W(s) = \frac{n_0 + n_1 \varphi(s)}{1 + d_1 \varphi(s) + d_2 \varphi^2(s)} = \frac{N(\varphi(s))}{D(\varphi(s))}$$

Система устойчива, если $G(s) = D(\varphi(s)) \neq 0$, $\operatorname{Re} s \geq 0$

$\varphi(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ – “обобщённая частотная переменная” (Ш. Хара)

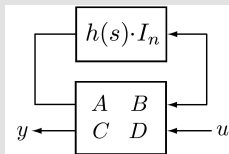
Пример: система в пространстве состояний



$$s\dot{x} = Ax + Bu, \quad s = d/dt$$

Система устойчива, если
 $G(s) = \det(sI - A)$ гурвицев

“Обычная” система



$$\varphi(s)x = Ax + Bu, \quad s = d/dt$$

- $h(s)$ — ПФ подсистемы
- $\varphi(s) = 1/h(s)$

Система устойчива, если
 $G(s) = \det(\varphi(s)I - A) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0$

Однотипная система

Проблема устойчивости: два подхода

Имеем:

- полином $D(p) = d_0 + d_1p + \dots + d_np^n$
- ПФ $\varphi(s)$

Необходимо:

Найти условия, при которых характеристическая функция

$$G(s) = D(\varphi(s)) = d_0 + d_1\varphi(s) + \dots + d_n\varphi^n(s)$$

не имеет правых нулей

$$G(s) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

Проблема устойчивости: два подхода

Имеем:

- полином $D(p) = d_0 + d_1p + \dots + d_np^n$
- ПФ $\varphi(s)$

Необходимо:

Найти условия, при которых характеристическая функция

$$G(s) = D(\varphi(s)) = d_0 + d_1\varphi(s) + \dots + d_n\varphi^n(s)$$

не имеет правых нулей

$$G(s) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

Подходы:

Общие критерии
(громоздко!)

Проблема устойчивости: два подхода

Имеем:

- полином $D(p) = d_0 + d_1p + \dots + d_np^n$
- ПФ $\varphi(s)$

Необходимо:

Найти условия, при которых характеристическая функция

$$G(s) = D(\varphi(s)) = d_0 + d_1\varphi(s) + \dots + d_n\varphi^n(s)$$

не имеет правых нулей

$$G(s) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0$$

Подходы:

Общие критерии
(громоздко!)

Декомпозиция задачи

Определение 2

Ω -областью функции $\varphi(s)$ называется множество точек λ на комплексной плоскости, для которых $\varphi(s) - \lambda$ не имеет правых нулей:

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(s) - \lambda \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0\}$$

Лемма 1

Пусть $\varphi(s)$ — дробно-рациональная функция, $\varphi(s) = A(s)/B(s)$, ($A(s), B(s)$ — полиномы), $\deg A = k, \deg B = m$, $B(j\omega) \neq 0, \omega \in \mathbb{R}$ и $B(s)$ имеет l правых нулей. Тогда Ω -область совпадает с областью, которую годограф $z = \varphi(j\omega)$, $-\infty < \omega < +\infty$ окружает N раз. Здесь

- $N = l$, если $\varphi(s)$ собственная ($k \leq m$)
- $N = (k - m)/2 + l$, если $\varphi(s)$ несобственная ($k > m$)

Теорема 1

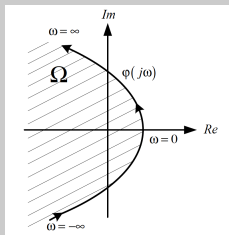
Условие $G(s) = D(\varphi(s)) \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда все корни полинома $D(p)$ лежат в Ω -области $\varphi(s)$

Определение 2

Ω -областью функции $\varphi(s)$ называется множество точек λ на комплексной плоскости, для которых $\varphi(s) - \lambda$ не имеет правых нулей:

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(s) - \lambda \neq 0, \operatorname{Re} s \geq 0\}$$

Пример



$$\varphi(s) = s^2 + s + 1$$

Мультиагентные системы

Мультиагентная система: основные сущности

- 1 агенты-динамические подсистемы: кто взаимодействует
- 2 функции связи: как они взаимодействуют
- 3 граф: структура взаимодействий между ними

Мультиагентная система: основные сущности

- 1 агенты-динамические подсистемы: кто взаимодействует
- 2 функции связи: как они взаимодействуют
- 3 граф: структура взаимодействий между ними

Мультиагентные = однотипные?

Особенности:

- Сейчас: сетевые динамические системы
- Обычно очень большое число агентов
- Упор на распределенность и децентрализованность
- Матрица связей – обычно лапласовская матрица графа
- Консенсус – самая распространённая задача
- Область применения (роботы, дроны, сенсоры и т.п.)

Мультиагентная система: основные сущности

- 1 агенты-динамические подсистемы: кто взаимодействует
- 2 функции связи: как они взаимодействуют
- 3 граф: структура взаимодействий между ними

Мультиагентная система: основные сущности

- 1 агенты-динамические подсистемы: кто взаимодействует
- 2 функции связи: как они взаимодействуют
- 3 граф: структура взаимодействий между ними

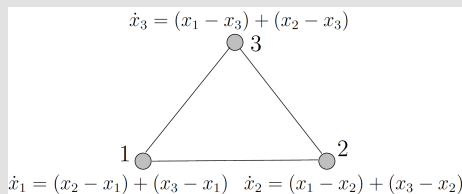
Пример

1 $\dot{x}_i = u_i, \quad i \in 1:3$

2 $u_i = \sum_{j=1}^3 (x_j - x_i)$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x$$

3 $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$



Мультиагентные системы и консенсус

Мультиагентная система: основные сущности

- 1 агенты-динамические подсистемы: кто взаимодействует
- 2 функции связи: как они взаимодействуют
- 3 граф: структура взаимодействий между ними

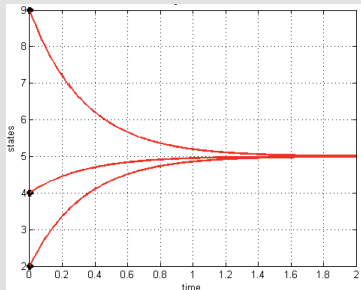
Пример

1 $\dot{x}_i = u_i, \quad i \in 1:3$

2 $u_i = \sum_{j=1}^3 (x_j - x_i)$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x$$

3 $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$



Консенсус при использовании локальной информации

Консенсус: простейший случай

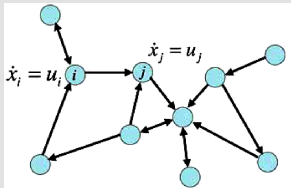
Группа из N идентичных агентов: $\dot{x}_i = u_i, \quad i \in 1:N$

Протокол управления: $u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$
или

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^\top$$

Цель:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad \forall i, j \in 1:N$$



$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x,$$

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j$$

Консенсус: простейший случай

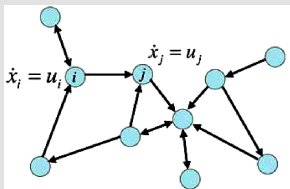
Группа из N идентичных агентов: $\dot{x}_i = u_i, \quad i \in 1:N$

Протокол управления: $u_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$
или

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x, \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$$

Цель:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - x_j(t)| = 0, \quad \forall i, j \in 1:N$$



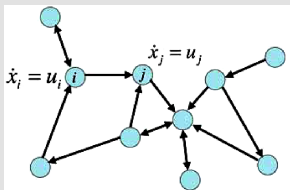
$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x,$$

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j$$

Какие условия на граф/лапласовскую матрицу?

Консенсус: условия достижения



$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$$

$$\dot{x} = -\mathcal{L}x,$$

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, \quad l_{ij} = -a_{ij}, \quad i \neq j$$

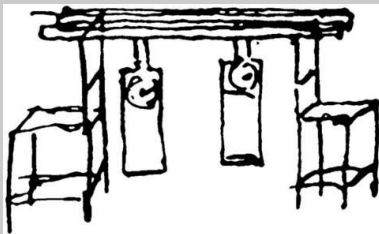
Теорема 2 Агаев, Чеботарёв, Olfati-Saber, Ren, Cao и др.

Следующие утверждения эквивалентны:

- 1 \mathcal{L} имеет простое нулевое собственное число с ассоциированным собственным вектором $\mathbf{1}_N$, а все остальные собственные числа имеют положительные действительные части;
- 2 Для замкнутой системы достигается консенсус: для любых $x_i(0)$ и любых $i, j \in 1 : N$ выполняется условие $|x_i(t) - x_j(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$;
- 3 Ориентированный граф \mathcal{G} содержит остовное исходящее дерево;
- 4 Ранг матрицы \mathcal{L} равен $N - 1$.

Первые эксперименты и результаты

- синхронизация маятников Гюйгенса, опыты Релея
- первые математические модели: модели преследования, геометрическая задача Дарбу (1878), модели транспортных потоков (Chandler, 1958)



Supposons qu'on forme le second polygone en prenant les milieux des côtés du premier. Les x des sommets de ce nouveau polygone seront définis par les formules

$$x'_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \dots, \quad x'_n = \frac{x_n + x_1}{2},$$

Первые эксперименты и результаты

- синхронизация маятников Гюйгенса, опыты Релея
- первые математические модели: модели преследования, геометрическая задача Дарбу (1878), модели транспортных потоков (Chandler, 1958)

В социологии и социальной психологии

- дискретная модель $x_i(k+1) = \sum_{j=1}^N w_{ij}x_j(k)$:

French J.R.P. *A Formal Theory of Social Power*, Psychological Review, 1956

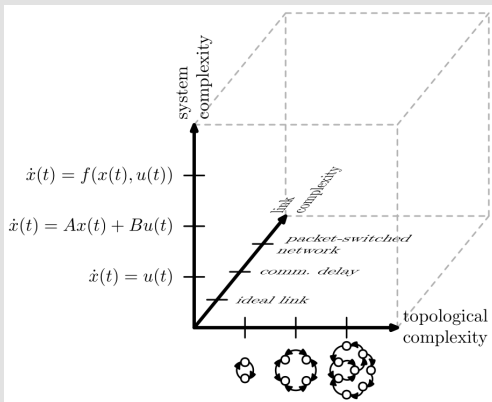
Harary F. *A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power*, in Dorwin Cartwright (ed.), *Studies in Social Power*, 1959

DeGroot M.H. *Reaching a Consensus*, Journal of the American Statistical Association, 1974

- непрерывная модель $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$:

Abelson R.P. *Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy*, Contributions to mathematical psychology, 1964

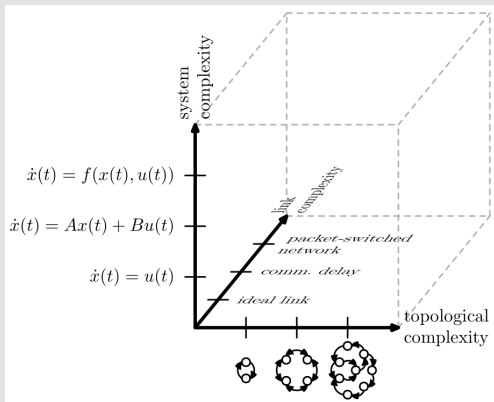
Сетевая динамическая система



Три сущности:

- модель узла/агента
(кто взаимодействует)
- **ТОПОЛОГИЯ СЕТИ**
(с кем взаимодействует)
- **функция связи**
(как взаимодействует)

Сетевая динамическая система



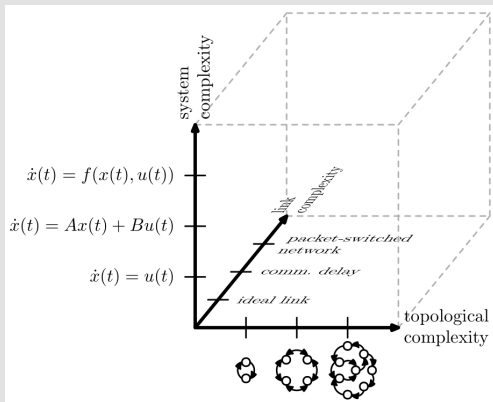
Три сущности:

- модель узла/агента
(кто взаимодействует)
- **ТОПОЛОГИЯ СЕТИ**
(с кем взаимодействует)
- **функция связи**
(как взаимодействует)

Простейшая модель консенсуса

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_i)$$

Сетевая динамическая система



Три сущности:

- модель узла/агента
(кто взаимодействует)
- **топология сети**
(с кем взаимодействует)
- **функция связи**
(как взаимодействует)

Модель более общего вида

$$\dot{x}_i(t) = f(t, x_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \phi_{ij}(y_j(t) - y_i(t)), \quad y_i(t) = g(x_i(t))$$

Консенсус: более общий линейный случай

Группа из N идентичных агентов: $\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i, \quad i \in 1:N$
где $\xi_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^p$

Протокол управления: $u_i = K \sum_{j=1}^N a_{ij}(\xi_i - \xi_j)$
или

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes BK)\xi, \quad \xi = [\xi_1^\top, \xi_2^\top, \dots, \xi_N^\top]^\top$$

Цель:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in 1:N$$

Консенсус: более общий линейный случай

Группа из N идентичных агентов: $\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i, \quad i \in 1:N$
где $\xi_i \in \mathbb{R}^n, u_i \in \mathbb{R}^p$

Протокол управления: $u_i = K \sum_{j=1}^N a_{ij}(\xi_i - \xi_j)$
или

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A + \mathcal{L} \otimes BK)\xi, \quad \xi = [\xi_1^\top, \xi_2^\top, \dots, \xi_N^\top]^\top$$

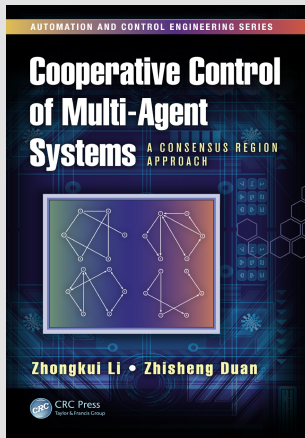
Цель:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| = 0, \quad \forall i, j \in 1:N$$

Допустим, что граф \mathcal{G} содержит исходящее остовное дерево
Условия достижения консенсуса?

Литература

- Л. Пекора, Т. Кэрролл, 1998
- Дж. Факс, Р. Маррэй, 2004
- Ш. Хара и др., 2007
- З. Ли, З. Дуан, Г. Чен, 2010
- Ф. Льюис и др., 2013 (?)



Теорема 3

Пусть граф содержит исходящее остовное дерево. Распределенный протокол решает задачу консенсуса линейных агентов тогда и только тогда, когда все матрицы $A + \lambda_i BK$, $i \in 2 : N$, являются гурвицевыми, где λ_i , $i \in 2 : N$, – ненулевые собственные числа лапласовской матрицы \mathcal{L}

Определение 3

\mathcal{S} -областью параметра σ , принадлежащего открытой правой полуплоскости комплексной плоскости, такого что $A + \sigma BK$ гурвицевы, называется областью консенсуса сетевой системы

Теорема 4

Линейные агенты достигают консенсуса в смысле $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_j(t)\| = 0$, $\forall i, j \in 1 : N$ тогда и только тогда, когда все ненулевые собственные числа лапласовской матрицы лежат в \mathcal{S} -области: $\lambda_i \in \mathcal{S}$, $\forall \lambda_i, i \in 2 : N$

Примеры

Равномерное расположение агентов на отрезке

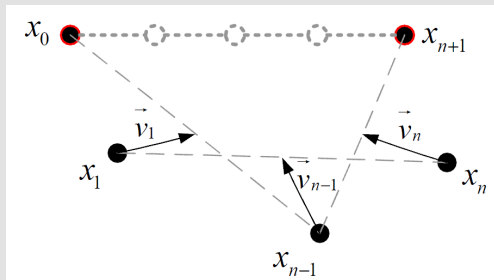
I.A. Wagner and A.M. Bruckstein 1996, Z. Lin 2005, Я.И. Петрикевич, П.С. Щербаков 2010

Модель агента и протокол управления:

$$\dot{x}_i = u_i,$$

$$u_i = 0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i), \quad i \in 1 : N$$

x_0 и x_{N+1} — неподвижные концы отрезка



Идея алгоритма равноудаленного расположения на отрезке

Каждый i -й агент стремится расположиться в середине отрезка, соединяющего $(i-1)$ -го и $(i+1)$ -го агентов

Равномерное расположение агентов на отрезке

Модель агента и протокол управления:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= u_i, \\ u_i &= 0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i), \quad i \in 1:N\end{aligned}$$

x_0 и x_{N+1} — неподвижные концы отрезка

Динамика всей сетевой системы:

$$\dot{x} = Ax + b,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$b = [0.5x_0, 0, \dots, 0.5x_{N+1}]^T \in \mathbb{R}^N$$

$x^* \in \mathbb{R}^N : x^* = -A^{-1}b$ — устойчивое положение равновесия

Равномерное расположение агентов на отрезке

Модель агента и протокол управления:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= u_i, \\ u_i &= 0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i), \quad i \in 1:N\end{aligned}$$

x_0 и x_{N+1} — неподвижные концы отрезка

Динамика всей сетевой системы:

$$\dot{x} = Ax + b,$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0.5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$b = [0.5x_0, 0, \dots, 0.5x_{N+1}]^T \in \mathbb{R}^N$$

$x^* \in \mathbb{R}^N : x^* = -A^{-1}b$ — устойчивое положение равновесия

Устойчивость при более сложных моделях агентов?

Равноудаленное размещение: агенты второго порядка

Модель агента:

$$\ddot{x}_i + \alpha \dot{x}_i = u_i, \quad \alpha \geq 0, \quad i \in 1 : N,$$

Распределенные протоколы управления, обеспечивающие равномерное размещение агентов на заданном отрезке:

Протоколы управления

Проскурников, Парсегов 2016

- 1 $u_i = -\kappa \dot{x}_i + 0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i), \quad \alpha + \kappa > 0$
- 2 $u_i = 0.5(x_{i-1} - x_i) + 0.5(x_{i+1} - x_i) + 0.5p(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i) + 0.5p(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i),$
 $\alpha = 0, p > 0$
- 3 $u_j(t) = w_j(t) + p\dot{y}_j(t) = (1 + p)w_j(t) - p\gamma y_j(t),$
 $\dot{y}_j(t) = -\gamma y_j(t) + w_j(t),$
 $w_j(t) = 0.5(x_{j-1}(t) - x_j(t)) + 0.5(x_{j+1}(t) - x_j(t)), \quad \alpha = 0, p, \gamma > 0$

Три вида $\varphi(s)$

- 1 $(s^2 + (\alpha + \kappa)s)x(t) = Ax(t) + b, \quad s := \frac{d}{dt}, \quad \varphi(s) = s^2 + (\alpha + \kappa)s$
- 2 $s^2x = (ps + 1)(Ax + b), \quad \varphi(s) = s^2/(ps + 1)$
- 3 $s^2x = q(s)(Ax + b), \quad q(s) := 1 + \frac{ps}{s + \gamma}, \quad \varphi(s) = s^2(s + \gamma)/(s(p + 1) + \gamma)$

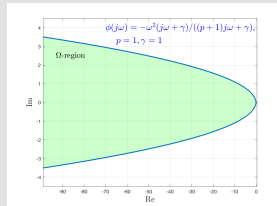
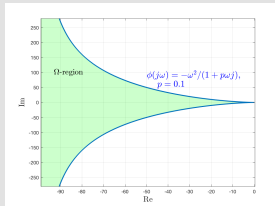
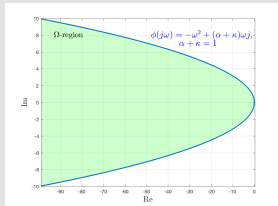
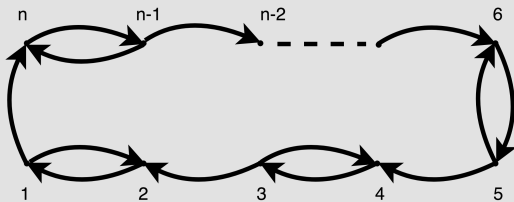
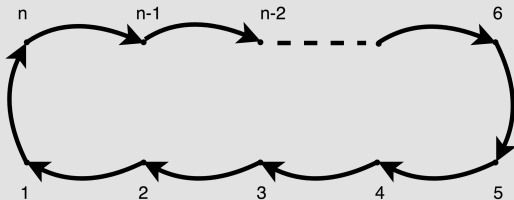


Рис.: Ω -области для разных передаточных функций

Консенсус на кольцевых орграфах

С.Э. Парсегов, П.Ю. Чеботарёв 2018

Орграфы кольцевой структуры



- группа из N идентичных агентов,
- модель второго порядка ($\gamma > 0$)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = -\gamma v_i + u_i \end{cases} \quad i \in 1 : N.$$

В пространстве состояний:

$$\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i,$$

$$\text{где } \xi_i = [x_i, v_i]^\top, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \text{и } B = [0, 1]^\top.$$

- Динамика агента

$$\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i,$$

$$\text{где } \xi_i = [x_i, v_i]^\top, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \text{и } B = [0, 1]^\top.$$

- Динамика агента

$$\dot{\xi}_i = A\xi_i + Bu_i,$$

$$\text{где } \xi_i = [x_i, v_i]^\top, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}, \quad \text{и } B = [0, 1]^\top.$$

- (1) Протокол управления ($K = [1, 0]$)

$$u_i = K(\xi_{i-1} - \xi_i)$$

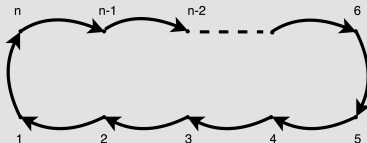
- (2) Протокол управления ($K = [1, 0]$)

$$u_i = \begin{cases} K(\xi_{i+1} - \xi_i) + K(\xi_{i-1} - \xi_i), & i \text{ нечётное, } i \in 1 : N. \\ K(\xi_{i-1} - \xi_i), & i \text{ чётное} \end{cases}$$

**Каждому агенту известны расстояния
до ближайшего одного/двух пронумерованных соседей**

Граф: протокол управления (1)

- Граф взаимодействия агентов

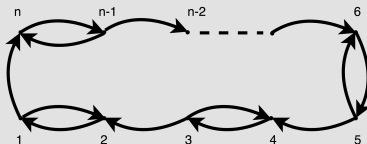


- Матрица Лапласа

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Граф: протокол управления (2)

- Граф взаимодействия агентов



- Матрица Лапласа

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Сетевая динамическая система

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -\mathcal{L}x,$$

$$x = [x_1, \dots, x_N]^T$$

- получить условия на γ , при которых гарантируется достижение консенсуса в сети в смысле

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi_i(t) - \xi_k(t)\| = 0, \forall i, k \in 1 : N$$

- условия должны не зависеть от числа агентов в сети (достаточные, но простые и не очень консервативные)

Essentially Cyclic Graphs

Definition

Digraph \mathcal{G} is essentially cyclic if its Laplacian spectrum contains nonreal eigenvalues

Lemma (Chebotarev, Agaev (2010))

Let \mathcal{G} be a digraph on $n > 3$ vertices constituted by the Hamiltonian cycle $\{(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)\}$ and the opposite cycle $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$ in which i ($2 < i < n$) arbitrary arcs are missing. Then:

- The characteristic polynomial of the Laplacian matrix $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ is

$$\Delta_{\mathcal{L}} = \prod_{k=1}^K Z_{i_k}(\lambda) - (-1)^n,$$

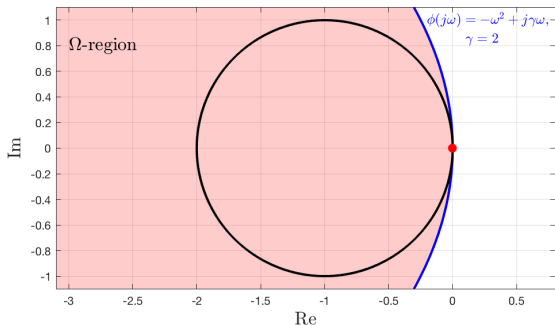
where i_1, \dots, i_K are the path lengths in the decomposition of the cycle $\{(1, n), (n, n-1), \dots, (2, 1)\}$ into the paths linking the consecutive vertices of indegree 1 in \mathcal{G} .

- \mathcal{G} is essentially cyclic
- $Z_n(\lambda) = (\lambda - 2)Z_{n-1}(\lambda) - Z_{n-2}(\lambda)$ is a modified Chebyshev polynomial of the second kind ($Z_0(\lambda) \equiv 1$, $Z_1(\lambda) \equiv \lambda - 1$)

Условие консенсуса (1)

Теорема 5

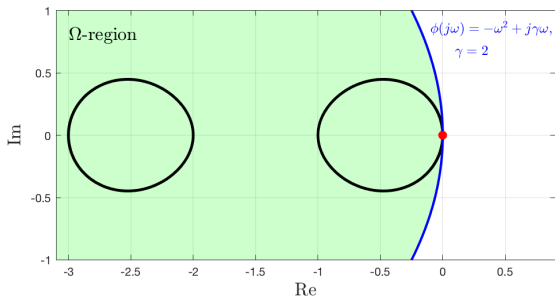
Сетевая система достигает консенсуса при $\gamma > \sqrt{2} \approx 1.4142$



Условие консенсуса (2)

Теорема 6

Сетевая система достигает консенсуса при $\gamma > \sqrt{6/7} \approx 0.9258$



Динамика мнений в социальных сетях



A.B. Прокурников

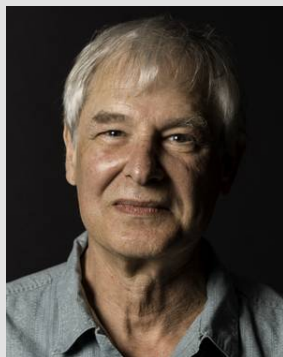
Delft Center for Systems
and Control at TU Delft,
The Netherlands; SPb
State University, IPME
RAS, ITMO University,
St. Petersburg, Russia



1956 - 2017

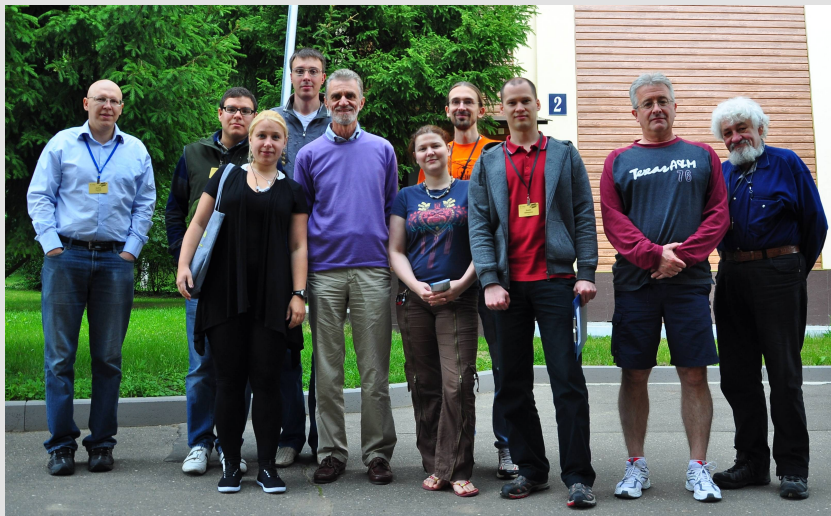
Roberto Tempo

CNR-IEIIT, Politecnico di
Torino, Italy; Editor-in-Chief of
Automatica, Fellow of the IEEE
and the IFAC, Corresponding
Member of the Academy of
Sciences, Institute of Bologna,
Italy



Noah E. Friedkin

Department of Sociology,
University of California,
Santa Barbara, CA, USA



Традиционная молодёжная школа
«Управление, информация и оптимизация», 2014

Продолжение работы в Турине



Politecnico di Torino, 2014

GROUP DYNAMICS

Network science on belief system dynamics under logic constraints

Noah E. Friedkin,^{1*} Anton V. Proskurnikov,^{2,3} Roberto Tempo,⁴ Sergey E. Parsegov⁵

Breakthroughs have been made in algorithmic approaches to understanding how individuals in a group influence each other to reach a consensus. However, what happens to the group consensus if it depends on several statements, one of which is proven false? Here, we show how the existence of logical constraints on beliefs affect the collective convergence to a shared belief system and, in contrast, how an idiosyncratic set of arbitrarily linked beliefs held by a few may become held by many.

Converse ([7], p. 207) defined a belief system as “a configuration of ideas and attitudes in which the elements are bound together by some form of constraint or functional interdependence.” The existence of belief systems is widely accepted and a subject of interest in the scientific community (2–4), but there are still unresolved puzzles. According to cognitive consistency theory, inconsistent beliefs cause tension that individuals seek to resolve (5, 6). Thus, if an individual’s certainty of belief on the truth of one statement is altered, the alteration may propagate changes of the individual’s certainties of beliefs on the truth of other statements. Individual-level, independent adjust-

conclusion that collective action is required to mitigate global warming. Debates in economics on appropriate macroeconomic policy, and debates in politics on acceptable legislation, are also examples of interpersonal influences modifying individuals’ certainties of belief on multiple interdependent statements. A critical open problem is the theoretical integration of theory on cognitive consistency and theory on interpersonal influence systems. We report a generalization of the Friedkin-Johnsen model (15–17) that achieves this integration. When individuals’ beliefs on multiple statements are being influenced, the Friedkin-Johnsen model assumes that a change of belief on one statement does not affect beliefs on

ter understand the dynamics of belief systems in which individuals’ certainties of belief are modified by network mechanisms of interpersonal influence toward a consensus on a set of interdependent beliefs?

An analyzable problem on belief system dynamics can be posed as follows. Let us start from a state of heterogeneity in a population of individuals (i) with various levels of certainty of belief on the truth values of two or more truth statements and (ii) with a common set of logical constraints that associate these statements. In this population, levels of certainty of belief about one statement are associated with levels of certainty of belief about another statement and, more generally, an individual’s level of certainty of belief about one statement is some mixture of that individual’s certainty of beliefs about other statements. Let each individual’s certainty about each statement be subject to disturbance. Cognitive consistency theory posits that the disturbance will cause a within-individual change that recalibrates their certainties of beliefs to achieve consistency. Let each individual in this population be embedded in a social network that allows interpersonal influences on individuals’ beliefs. With such a network, cognitive consistency effects are now competing with effects of other individuals’ displayed beliefs.

In our model (Fig. 1), individual nodes have different certainties of belief on multiple truth statements, which may be changed through their interactions with others. The nodes may

- **S.E. Parsegov, A.V. Proskurnikov, R. Tempo, and N.E. Friedkin**
A New Model of Opinion Dynamics for Social Actors with Multiple Interdependent Attitudes and Prejudices // *the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, 2015
- **N.E. Friedkin, A.V. Proskurnikov, R. Tempo, and S.E. Parsegov**
Network science on belief system dynamics under logic constraints // *Science*, 2016
- **S.E. Parsegov, A.V. Proskurnikov, R. Tempo, and N.E. Friedkin**
A Novel Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks // *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017

The Concise Encyclopedia of Sociology, 2011

Social networks are formally defined as a set of nodes (or network members) that are tied by one or more specific types of relations. In much research, these nodes are individual persons, but they can also be groups, corporations, households, blogs, nation-states, or other collectivities. Ties consist of one or more specific relations, such as financial exchange, friendship, hate, trade, web links, or airline routes.

The Concise Encyclopedia of Sociology, 2011

Social networks are formally defined as a set of nodes (or network members) that are tied by one or more specific types of relations. In much research, these nodes are individual persons, but they can also be groups, corporations, households, blogs, nation-states, or other collectivities. Ties consist of one or more specific relations, such as financial exchange, friendship, hate, trade, web links, or airline routes.

Social influence is the process by which individuals make real changes to their feelings and behaviors through interaction with others who are perceived to be similar, desirable or expert... The structural approach to social influence examines *interpersonal influence* that occurs within a larger network of influences. *Social influence* here is the process by which a group of actors will weigh and then integrate the opinions of others.

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

• $x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \{0, 1\}, \dots ?$

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \{0, 1\}, \dots ?$
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t), \quad x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t), \dots ?$

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \{0, 1\}, \dots$?
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t)$, $x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t), \dots$?
- детерминированное или случайное поведение?

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \{0, 1\}, \dots$?
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t)$, $x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t), \dots$?
- детерминированное или случайное поведение?
- мнений сходятся к чему-то или флуктуируют?

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \{0, 1\}, \dots$?
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t)$, $x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t), \dots$?
- детерминированное или случайное поведение?
- мнений сходятся к чему-то или флуктуируют?
- мнения объединяются в кластеры?

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \{0, 1\}$, ... ?
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t)$, $x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t)$, ... ?
- детерминированное или случайное поведение?
- мнений сходятся к чему-то или флуктуируют?
- мнения объединяются в кластеры?
- консенсус мнений или рассогласование?

Динамика мнений: постановка задачи



Два агента с мнениями x_1, x_2

Как мнения двух социальных агентов формируются и изменяются?

- $x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \{0, 1\}, \dots ?$
- $\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2, t), \quad x_2(t+1) = f(x_1, x_2, t), \dots ?$
- детерминированное или случайное поведение?
- мнений сходятся к чему-то или флуктуируют?
- мнения объединяются в кластеры?
- консенсус мнений или рассогласование?
- как проверить ту или иную модель?

Литература

- Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г., *Социальные сети. Модели информационного влияния, управления и противоборства*, Физматлит, 2018
- Jackson M.O., *Social and Economic Networks*, Princeton University Press, 2008
- Castellano C., Fortunato S., and Loreto V., *Statistical physics of social dynamic*, Rev. Mod. Phys. 81, 591, 2009
- Friedkin N.E., *The Problem of Social Control and Coordination of Complex Systems in Sociology: A Look at the Community Cleavage Problem*, IEEE Control Systems, 2015
- Фрадков А.Л. (Ред.), *Проблемы сетевого управления*, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015
- Bullo F. *Lectures on Network Systems*, 2017, <http://motion.me.ucsb.edu/book-lns/>
- Proskurnikov A., Tempo R. *A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part I, Part II* Annual Reviews in Control, 2017

Консенсус

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot

French J.R.P. *A Formal Theory of Social Power*, Psychological Review, 1956

- первое применение теории графов для задач *социальной психологии*
- социальные агенты полагаются “разумными” и используют особую стратегию для взаимодействия
- модель в дискретном времени с непрерывными мнениями
- анализ модели для разных топологий сети

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot

French J.R.P. *A Formal Theory of Social Power*, Psychological Review, 1956

- первое применение теории графов для задач социальной психологии
- социальные агенты полагаются “разумными” и используют особую стратегию для взаимодействия
- модель в дискретном времени с непрерывными мнениями
- анализ модели для разных топологий сети

Harary F. *A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power*, in Dorwin Cartwright (ed.), *Studies in Social Power*, 1959

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot

French J.R.P. *A Formal Theory of Social Power*, Psychological Review, 1956

- первое применение теории графов для задач социальной психологии
- социальные агенты полагаются “разумными” и используют особую стратегию для взаимодействия
- модель в дискретном времени с непрерывными мнениями
- анализ модели для разных топологий сети

Harary F. *A Criterion for Unanimity in French's Theory of Social Power*, in Dorwin Cartwright (ed.), *Studies in Social Power*, 1959

DeGroot M.H. *Reaching a Consensus*, Journal of the American Statistical Association, 1974

Пример (French, 1956)

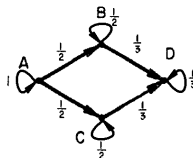
$$a_n = a_{n-1}, \quad (1)$$

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \quad (2)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_{n-1}), \quad (3)$$

$$d_n = \frac{1}{3}(b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}). \quad (4)$$

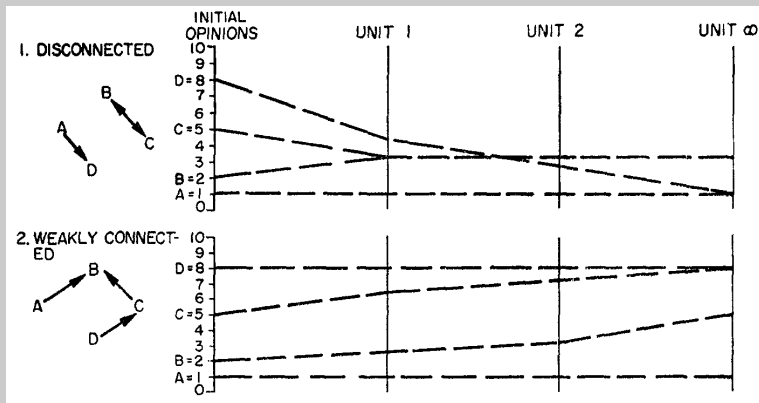
The cell a , a has an entry of 1, indicating that in any unit A 's opinion is completely determined by his previous opinion; accordingly the remaining cells in row a have entries of zero, showing that opinions b , c , d do not influence a , since there are no directed paths from B , C , or D to A . Cells b , a , and b , b have entries of $\frac{1}{2}$ because b_n is a compromise half-way between the previous opinions of A and B , etc.



	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
c	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
d	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	2	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot

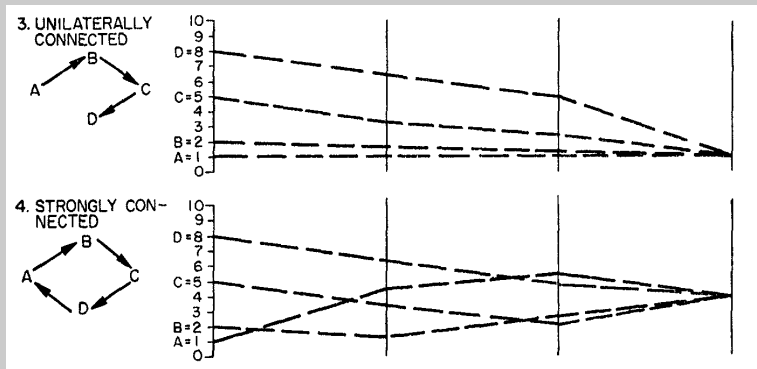
Слабо связные и несвязные графы (French, 1956)



Влияние связности на изменение мнений в группе

Консенсус не достигается для любых начальных условий

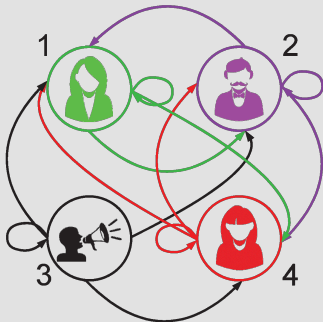
Связные графы (French, 1956)



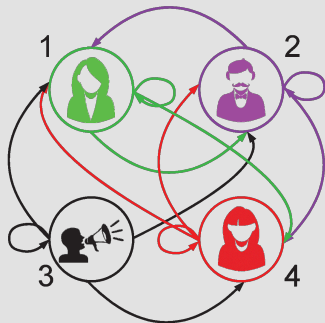
Влияние связности на изменение мнений в группе

Консенсус достигается для любых начальных условий

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример

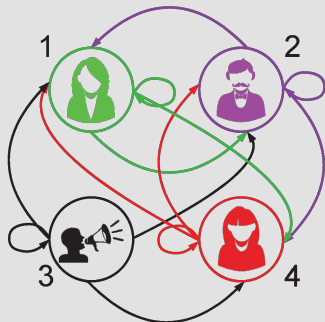


Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$

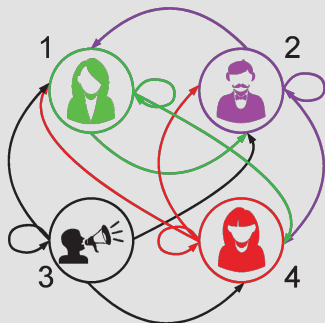
Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$

нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример

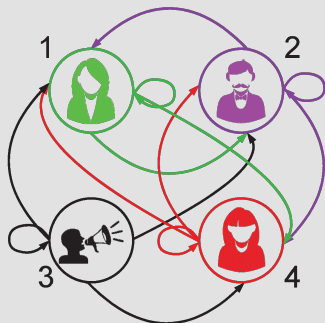


мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$

нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



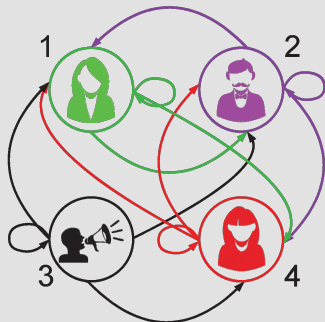
мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$

нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

коэффициенты влияния: w_{ij}

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

матрица влияния: W

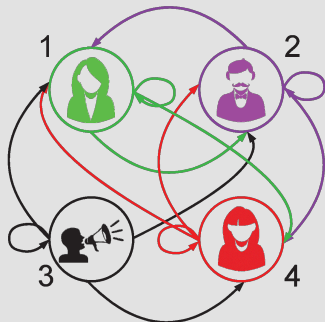
мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$

нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

коэффициенты влияния: w_{ij}

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

матрица влияния: W

$$x(k+1) = Wx(k)$$

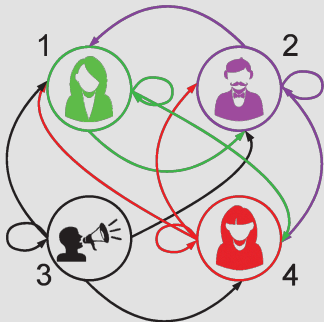
мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$

нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

коэффициенты влияния: w_{ij}

Модель консенсуса French-Harary-DeGroot: Пример



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

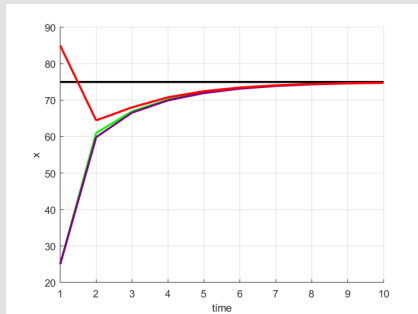
матрица влияния: W

$$x(k+1) = Wx(k)$$

мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$
 нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^\top$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

коэффициенты влияния: w_{ij}



Abelson R.P. *Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy*, Contributions to mathematical psychology, 1964

- модель в непрерывном времени
- $x_i(t) \in \mathbb{R}$ – мнение агента, $j = 1, \dots, n$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Abelson R.P. *Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy*, Contributions to mathematical psychology, 1964

- модель в непрерывном времени
- $x_j(t) \in \mathbb{R}$ – мнение агента, $j = 1, \dots, n$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Olfati-Saber R., Murray R.M. *Consensus Problems in Networks of Agents With Switching Topology and Time-Delays*, IEEE Transactions on Automatic Control, 2004

Fax A., Murray R.M. *Information flow and cooperative control of vehicle formations*, IEEE Transactions on Automatic Control, 2004

Агенты в социальных сетях редко демонстрируют единодушие, мнения часто не согласуются и образуют кластеры разного размера

Рассогласование

- нелинейные модели типа *bounded confidence/homophily/biased assimilation*: агенты игнорируют мнения вне доверительных интервалов (Deffuant-Weisbuch 2000, Krause-Hegselmann 2002)
- сети с отрицательными весами (Altafini 2012, 2013)
- **линейная модель Friedkin-Johnsen, 1990-е**: агент меняет свое мнение не только основываясь на своем мнении и мнениях соседей (DeGroot), но и собственных *предубеждениях*
- ...

Krause U. *Soziale Dynamiken mit vielen Interakteuren. Eine Problemskizze, Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren*, pages 37–51. 1997

Hegselmann R. and Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulations*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 5(3), 2002

- дискретное время
- детерминированная модель
- $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – confidence radius

Krause U. *Soziale Dynamiken mit vielen Interakteuren. Eine Problemskizze, Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren*, pages 37–51. 1997

Hegselmann R. and Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulations*. Journal of Artificial Societies and Social Simulation, 5(3), 2002

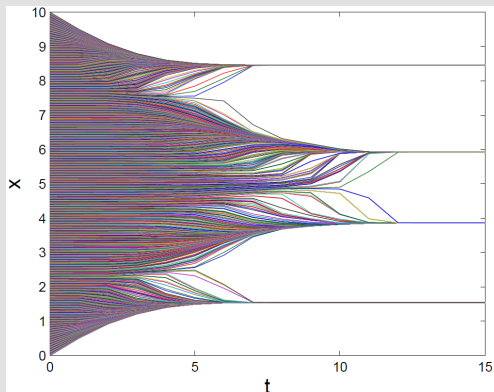
- дискретное время
- детерминированная модель
- $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – confidence radius

$$x_i(k+1) = \frac{\sum_{j: |x_j(k) - x_i(k)| < \varepsilon_0} x_j(k)}{\sum_{j: |x_j(k) - x_i(k)| < \varepsilon_0} 1}$$

Модель Hegselmann-Krause

Krause U. *Soziale Dynamiken mit vielen Interakteuren. Eine Problemskizze, Modellierung und Simulation von Dynamiken mit vielen interagierenden Akteuren*, pages 37–51. 1997

Hegselmann R. and Krause U. *Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulations*. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 5(3), 2002



Изменение мнений 1000 агентов

Модель Deffuant-Weisbuch

Deffuant G., Neau D., Amblard F., and Weisbuch G.: *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. in Complex Systems 3, 2000

- дискретное время
- стохастическая модель = попарное взаимодействие
- $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – confidence radius
- $\gamma_0 \in (0, 1)$ – trust weight
- $\mathbb{1}_\omega$ – функция-индикатор: $\mathbb{1}_\omega = 1$, если условие ω выполнено, $\mathbb{1}_\omega = 0$ в противном случае
- агенты i, j выбираются случайным образом с равной вероятностью из $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ в момент времени k

Модель Deffuant-Weisbuch

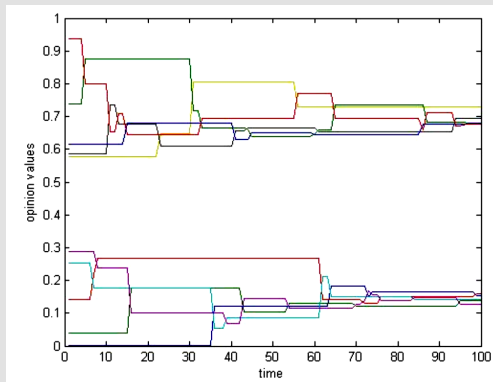
Deffuant G., Neau D., Amblard F., and Weisbuch G.: *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. in Complex Systems 3, 2000

- дискретное время
- стохастическая модель = попарное взаимодействие
- $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – confidence radius
- $\gamma_0 \in (0, 1)$ – trust weight
- $\mathbb{1}_\omega$ – функция-индикатор: $\mathbb{1}_\omega = 1$, если условие ω выполнено, $\mathbb{1}_\omega = 0$ в противном случае
- агенты i, j выбираются случайным образом с равной вероятностью из $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ в момент времени k

$$\begin{cases} x_i(k+1) = x_i(k) + \gamma_0 \mathbb{1}_{\{|x_j(k) - x_i(k)| < \varepsilon_0\}} (x_j(k) - x_i(k)), \\ x_j(k+1) = x_j(k) + \gamma_0 \mathbb{1}_{\{|x_j(k) - x_i(k)| < \varepsilon_0\}} (x_i(k) - x_j(k)). \end{cases}$$

Модель Deffuant-Weisbuch

Deffuant G., Neau D., Amblard F., and Weisbuch G.: *Mixing beliefs among interacting agents*, Adv. in Complex Systems 3, 2000



Изменение мнений 10 агентов, $\varepsilon_0 = 0.3$

Altafini C. *Consensus problems on networks with antagonistic interactions*, IEEE Trans. Autom. Control, 58(4):935–946, 2013

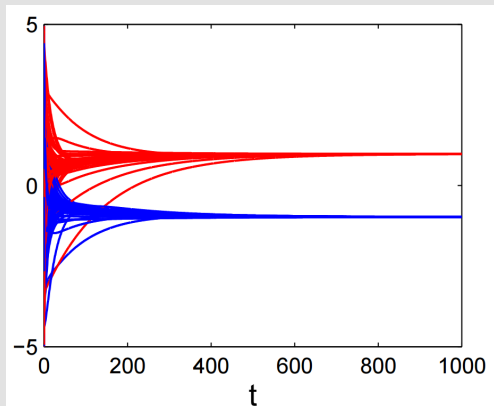
- непрерывное время
- отрицательные веса у ребер графа
- bipartite consensus

Altafini C. *Consensus problems on networks with antagonistic interactions*, IEEE Trans. Autom. Control, 58(4):935–946, 2013

- непрерывное время
- отрицательные веса у ребер графа
- bipartite consensus

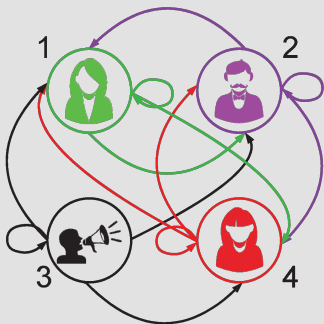
$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|(\text{sign}(a_{ij})x_j - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Altafini C. *Consensus problems on networks with antagonistic interactions*, IEEE Trans. Autom. Control, 58(4):935–946, 2013



Изменение мнений 1000 агентов

От FHD-консенсуса к FJ-рассогласованию



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

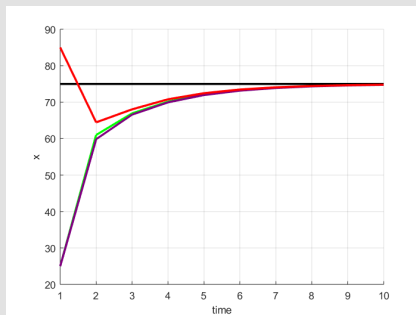
матрица влияния: W

$$x(k+1) = Wx(k)$$

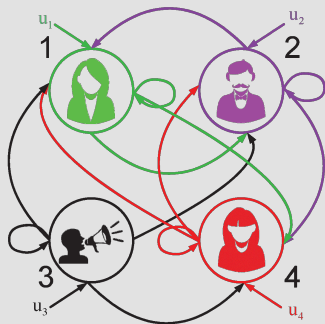
мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$
 нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^T$

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k)$$

коэффициенты влияния: w_{ij}



От FHD-консенсуса к FJ-рассогласованию



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

матрица влияния: W

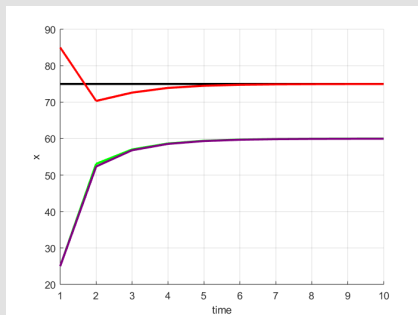
восприимчивость: $\Lambda = I - \text{diag } W$

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u$$

мнение $x_i \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$
 нач. мнения $x(0) = (25, 25, 75, 85)^T$

$$x_i(k+1) = \lambda_{ii} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(k) + (1 - \lambda_{ii}) u_i$$

коэффициенты влияния: w_{ij}
 восприимчивость: $\lambda_{ii} = 1 - w_{ii}$
 предубеждения: $u_i = x_i(0)$



FHD и FJ: Сравнение моделей

- группа n социальных *агентов* со скалярными *мнениями*: $x_i \in \mathbb{R}$
- вектор мнений всей группы: $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$
- стохастическая матрица *межличностного влияния*: $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- диагональная матрица *восприимчивости* к мнениям соседей: Λ
- начальные мнения $u_i = x_i(0)$ или *предубеждения*: $u = x(0)$

French-Harary-DeGroot

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u, \quad \Lambda = I$$

Friedkin-Johnsen

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u, \quad \Lambda = I - \text{diag } W$$

FHD и FJ: Сравнение моделей

- группа n социальных *агентов* со скалярными *мнениями*: $x_i \in \mathbb{R}$
- вектор мнений всей группы: $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$
- стохастическая матрица *межличностного влияния*: $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- диагональная матрица *восприимчивости* к мнениям соседей: Λ
- начальные мнения $u_i = x_i(0)$ или *предубеждения*: $u = x(0)$

French-Harary-DeGroot

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u, \quad \Lambda = I$$

Friedkin-Johnsen

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda) u, \quad \Lambda = I - \text{diag } W$$

Во время социального взаимодействия агенты часто **обсуждают несколько тем**, поэтому **естественно рассматривать векторные мнения**, где каждый вектор-мнение каждого агента состоит из его мнений по нескольким *взаимосвязанным* темам.

Модель Friedkin-Johnsen

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda)u$$

Многомерное обобщение модели Friedkin-Johnsen

Модель Friedkin-Johnsen

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda)u$$

Новая модель: многомерное обобщение FJ-модели

$$x(k+1) = [(\Lambda W) \otimes C]x(k) + [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u,$$

где x_i – векторное мнение i -го агента

Многомерное обобщение модели Friedkin-Johnsen

Модель Friedkin-Johnsen

$$x(k+1) = \Lambda W x(k) + (I - \Lambda)u$$

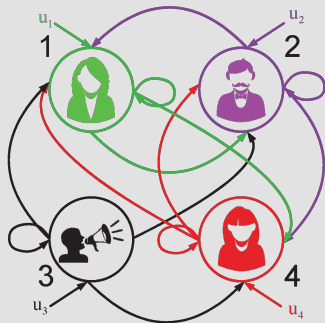
Новая модель: многомерное обобщение FJ-модели

$$x(k+1) = [(\Lambda W) \otimes C]x(k) + [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u,$$

где x_i – векторное мнение i -го агента

- C – стохастическая матрица *структуры взаимосвязанных тем обсуждения*
- модель нельзя получить простым повторением скалярной FJ-модели для каждой темы обсуждения при $C \neq I$
- взаимосвязь между темами обсуждения может возникать как естественным образом, так быть и навязанной группе агентов
- в социологической литературе такую взаимосвязь называют *идеологической системой* или *системой верований*, Converse 1964

Взаимосвязанные мнения: пример

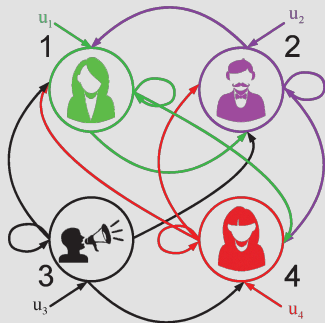


$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

$$x_i(k) = (x_i^1(k), x_i^2(k))^T \in \mathbb{R}^2$$

$$x(k+1) = [(\Lambda W) \otimes C]x(k) + [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u$$

Взаимосвязанные мнения: пример



$$W = \begin{bmatrix} 0.220 & 0.120 & 0.360 & 0.300 \\ 0.147 & 0.215 & 0.344 & 0.294 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.090 & 0.178 & 0.446 & 0.286 \end{bmatrix}$$

$$x_i(k) = (x_i^1(k), x_i^2(k))^T \in \mathbb{R}^2$$

$$x(k+1) = [(\Lambda W) \otimes C]x(k) + [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u$$

Две связанные темы:

1. рыба

2. лосось

$$x = (x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, x_3^1, x_3^2, x_4^1, x_4^2)^T$$

$$u = x(0) = (25, 25, 25, 15, 75, -50, 85, 5)^T$$

Агенты 1 и 2 любят рыбу и лосось; абсолютно упертый агент 3 любит рыбу, но не любит лосось; агент 4 очень любит рыбу и немножко лосось

Независимые vs. Взаимосвязанные

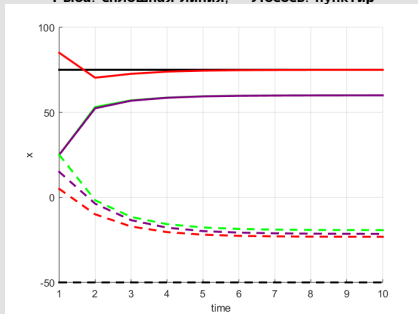
$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Взаимосвязанные мнения: пример

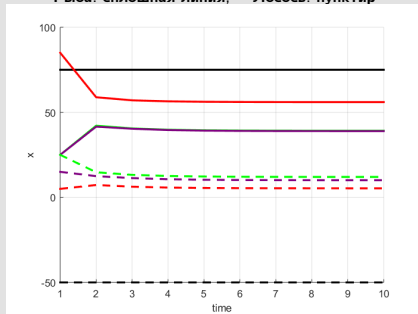
Независимые темы

Рыба: сплошная линия, Лосось: пунктир



Взаимосвязанные темы

Рыба: сплошная линия, Лосось: пунктир

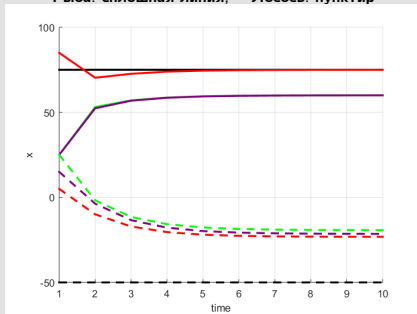


$$x_I' \approx (60, -19.3, 60, -21.5, 75, -50, 75, -23.2)^T \quad x_C' \approx (39.2, 12, 39, 10.1, 75, -50, 56, 5.3)^T.$$

Взаимосвязанные мнения: пример

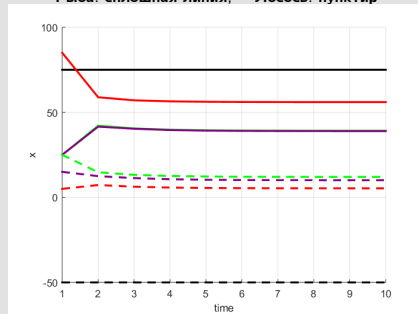
Независимые темы

Рыба: сплошная линия, Лосось: пунктир



Взаимосвязанные темы

Рыба: сплошная линия, Лосось: пунктир



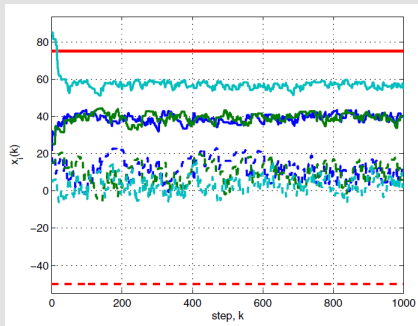
$$x'_I \approx (60, -19.3, 60, -21.5, 75, -50, 75, -23.2)^T \quad x'_C \approx (39.2, 12, 39, 10.1, 75, -50, 56, 5.3)^T.$$

Введение диагонально доминирующей матрицы C приводит к качественному изменению поведения открытых к влиянию агентов 1, 2 и 4. В случае со взаимосвязанными темами обсуждения их отношение к лососю не становится отрицательным, в отличие от случая с независимыми темами.

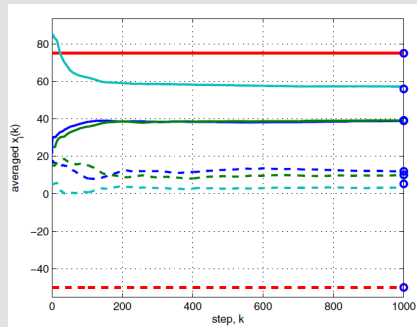
- стохастическая модель = попарное взаимодействие
- сами мнения постоянно осциллируют, не сходятся
- средние состояний сходятся к тому же пределу, что и в детерминированной модели

$$x_i(k+1) = h_i((1 - \gamma_{ij})x_i(k) + \gamma_{ij}x_j(k)) + (1 - h_i)u_i$$

Рандомизированная модель



Состояния



Усреднения

Идентификация матрицы C

- $x'_C = (I_{nm} - (\Lambda W) \otimes C)^{-1}((I_n - \Lambda) \otimes I_m)u$ – предельное мнение агентов
 - матрица W известна
 - как найти матрицу C по измерению \hat{x}' ?
-
- задача $\|\hat{x}' - x'_C\| \rightarrow \min$ невыпуклая

Идентификация матрицы C

- $x'_C = (I_{nm} - (\Lambda W) \otimes C)^{-1}((I_n - \Lambda) \otimes I_m)u$ – предельное мнение агентов
 - матрица W известна
 - как найти матрицу C по измерению \hat{x}' ?
-
- задача $\|\hat{x}' - x'_C\| \rightarrow \min$ невыпуклая
 - построим другую невязку $\varepsilon = [I_{mn} - \Lambda W \otimes C]\hat{x}' - [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u$

Идентификация матрицы C

- $x'_C = (I_{nm} - (\Lambda W) \otimes C)^{-1}((I_n - \Lambda) \otimes I_m)u$ – предельное мнение агентов
- матрица W известна
- как найти матрицу C по измерению \hat{x}' ?

- задача $\|\hat{x}' - x'_C\| \rightarrow \min$ невыпуклая
- построим другую невязку $\varepsilon = [I_{mn} - \Lambda W \otimes C]\hat{x}' - [(I_n - \Lambda) \otimes I_m]u$
- задача оптимизации примет вид:

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon\| \rightarrow \min \\ & \text{subject to } \sum_{j=1}^m c_{ij} = 1 \quad \forall i, \quad c_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

- используя формулу $\text{vec } \mathcal{A} \mathcal{B} = (I_p \otimes \mathcal{A}) \text{vec } \mathcal{B} = (\mathcal{B}^\top \otimes I_n) \text{vec } \mathcal{A} = (\mathcal{B}^\top \otimes I_m) \text{vec } \mathcal{A}$ можно упростить вид невязки

Спасибо за внимание !